

プラズマ平衡に現れる Queer Differential Equation の
解の存在について

電気通信大学 中村正彰 (Masaaki Nakamura)

核融合を目指した、トカマク・プラズマの平衡に現れる
非線形問題を紹介し、その解の存在定理を、J. Mossino [1]
に従って、多価作用素の不動点定理を用いて示す。

§ 1. 多価作用素

Ω を \mathbb{R}^n ($n=2,3$) の滑らかな境界を Γ として有界領域と
可。 $B = \{v \in L^\infty(\Omega) \mid 0 \leq v(x) \leq |\Omega|, \text{ a.e. } x \in \Omega\}$ と可。

1.1. 多価作用素 $\beta: L^2(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$

$v \in L^2(\Omega)$ に対して $\bar{\beta}(v)(x)$, $\underline{\beta}(v)(x)$ を次のよう
に定める。

$$\bar{\beta}(v)(x) = |\{y \in \Omega \mid v(y) \geq v(x)\}|$$

$$\underline{\beta}(v)(x) = |\{y \in \Omega \mid v(y) > v(x)\}|$$

ここで $|\{ \cdot \}|$ は $\{ \cdot \}$ のルベーグ測度である。

可と一般に

$$\bar{\beta}(v)(x) \geq \underline{\beta}(v)(x) \quad \text{a.e. } x \in \Omega$$

このとき $\beta(v)(x)$ を次のように定める。

$$\beta(v)(x) = [\underline{\beta}(v)(x), \bar{\beta}(v)(x)], \quad \text{a.e. } x \in \Omega.$$

一般に $\beta(v)(x)$ は多価である。

(注) $0 \leq \forall x \in |\Omega|$, $|\{y \in \Omega \mid v(y) = t\}| = 0$ のとき

$$\bar{\beta}(v)(x) = \underline{\beta}(v)(x)$$

以上に於て $\beta: L^2 \rightarrow B \subset L^\infty(\Omega)$ を定める。

$$\beta(v) = \{ \xi \in B \mid \xi(x) \in \beta(v)(x), \text{ a.e. } x \in \Omega \}$$

1.2. カラテオドリ作用素 $\mathcal{F}: L^\infty \rightarrow L^2$

$\mathcal{F}: \Omega \times [0, |\Omega|] \rightarrow \mathbb{R}$ が次の条件 i) ~ iii) を満たすものをカラテオドリ関数といふ。 $\mathcal{F} \in \text{CAR}(\Omega)$ と表す。

G i) $\mathcal{F}(x, \cdot)$ 連続 a.e. $x \in \Omega$

G ii) $\mathcal{F}(\cdot, s)$ 可測 a.e. $s \in [0, |\Omega|]$

G iii) $|\mathcal{F}(x, s)| \leq a(x) + b|s|^p$, $a \in L^2$, $1 \leq p < +\infty$.

すると、

(1) G i), G ii) が満たされていると、任意の可測関数 $v(x)$

に対して $\mathcal{F}(x, v(x))$ は可測関数となる。

(2) $v \in L^\infty$ ならば $\mathcal{F}(x, v(x)) \in L^2$.

1.3. 作用素 $T_1: L^2 \rightarrow L^2$

$$\therefore \lambda = g(x, \mu) \in g(x, \beta(v)(x))$$

b) ほとんどすべての $x \in \Omega$ に対して $g(x, \beta(v)(x))$ は連結である。

\therefore $K_i, i=1, 2$ は相対閉集合で次の条件を満たすことができる。

$$g(x, \beta(v)(x)) = K_1 \cup K_2, \quad K_1 \cap K_2 = \emptyset$$

K_i に対して F_i は次の σ に定める。

$$F_i = \{ \mu \in \beta(v)(x) \mid g(x, \mu) \in K_i \}, \quad i=1, 2.$$

可分と

$$\beta(v)(x) = F_1 \cup F_2, \quad F_1 \cap F_2 = \emptyset, \quad F_i \text{ 開 } \therefore G1)$$

これは $\beta(v)(x)$ が閉区間 (= 連結) であることと

矛盾する。

c) $g(x, \beta(v)(x)) \subset \mathbb{R}$ 連結閉集合であるから凸集合。

d) $\Gamma_1(v)$ は閉集合。

\therefore $\mu_n \in \Gamma_1(v), \mu \rightarrow \mu$ in L^2 ならば $\mu \in \Gamma_1(v)$ を示す。

$$\mu_n \rightarrow \mu \text{ in } L^2$$

$$\Rightarrow \exists \mu_{n_j} \text{ s.t. } \mu_{n_j} \rightarrow \mu \text{ a.e. } x.$$

$$\Rightarrow \mu_{n_j}(x) \in \Gamma_1(v)(x) \text{ a.e. } x.$$

$$\Rightarrow \mu \in \Gamma_1(v)$$

iii) $\Gamma(v)$ は凸集合

8. β に f, γ . 多価作用素 $\Gamma: L^2 \rightarrow L^2$ を次の f に定める。

$$\begin{aligned}\Gamma(v) &= f \circ \beta(v) \\ &= \{ \varphi \in L^2 \mid \exists \xi \in B \text{ such that } \xi \in \beta(v), \varphi = f \circ \xi \}.\end{aligned}$$

§ 2. 問題の紹介

問題 1

次の方程式を満たす $u \in H^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ を求めよ。

$$-\Delta u \in f \circ \beta(u) \quad \text{in } \Omega$$

問題 2

次の方程式を満たす $u \in H^2(\Omega)$ を求めよ。

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + u \begin{cases} = 0 & \text{if } u \geq 0 \\ \in f \circ \beta(u) & \text{if } u < 0 \end{cases} \\ u = \text{未知定数 on } \partial\Omega \\ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = -1 \end{array} \right\} \text{ in } \Omega$$

§ 3. 一般存在定理

3.1. 多価作用素 $\Gamma: L^2 \rightarrow L^2$ の性質

$\Gamma 1)$ $\Gamma(L^2(\Omega)) \subset L^2(\Omega)$ 有界

$\Gamma 2)$ 任意の $v \in L^2(\Omega)$ に対し $\Gamma(v) \neq \emptyset$. 凸性

閉集合。

$\Gamma(3)$ Γ が $\Gamma(3)$ ならば $G(\Gamma) = \{(\nu, \varphi) \mid \varphi \in T(\nu)\} \subset L^2_s \times L^2_w \leftarrow$
 び閉集合。

このとき

命題 3.1.

$\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$ の下で $\Gamma(3)$ は

$\Gamma(3) \Leftrightarrow \Gamma: L^2_s \rightarrow L^2_w$ 上半連続

ここで $L^2_{s(w)}$ は 強(弱)位相で考えた L^2 である。

3.2. 作用素 A

V をヒルベルト空間で次の条件を満たすものと可とする。

$$H^1_0(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$$

このとき $A: V \rightarrow V'$ は次の条件を満たす可とする。

A1) A は連続

A2) A は制反的 (coercive)

A3) $R(A) = V'$

A4) $K \subset V'$ 凸閉集合と可すると $A^{-1}(K) \neq \emptyset$ も凸閉集

合。

(注1) A coercive $\Leftrightarrow \lim_{\|v\| \rightarrow \infty} \frac{(Av, v)}{\|v\|} = \infty$

(注2) A 線形ならば $A1) \sim A3) \Rightarrow A4)$

例1) $V = H_0^1(\Omega)$, $A = -\Delta$ とすると (A1)~(A4)

はすべて満たされる。

例2) $V = H^1(\Omega)$, $A = -\Delta + 1$ とすると (A1)~(A4)

はすべて満たされる。

(注3) $V \subset L^2$ コンパクトであるから $A^{-1}: V \rightarrow V$ は

$L^2 \subset (H^1)' \subset V' \subset H^{-1}$ を考慮すると L^2 に制限すれば

$L^2 \rightarrow L^2$ の作用素としてコンパクトである。従って

$L_w^2 \rightarrow L_w^2$ 連続である。

3.3. 多価作用素の不動点定理. Ky Fan の定理

定理1 Ky Fan の不動点定理 []

E : ハウスドルフ・局所凸空間

$K \subset E$ 凸コンパクト集合 $\neq \emptyset$

$T: K \rightarrow 2^K$ が次の条件を満たす。

i) T は上半連続

ii) 任意の $x \in K$ に対し $T(x)$ は空でない凸閉集合。

$\Rightarrow x_0 \in K$ で $x_0 \in T(x_0)$ なる元 x_0 が存在する。

3.4. 一般存在定理

定理2.

Ω 滑らかな境界をもつ \mathbb{R}^n の有界領域。

V ヒルベルト空間で $H^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$ を満たす.

$A: V \rightarrow V'$ で $A(1) \sim A(4)$ を満たす.

$\Gamma: L^2 \rightarrow V'$ で $\Gamma(1) \sim \Gamma(3)$ を満たす.

\Rightarrow

$u \in V$ で $u \in A^{-1} \circ \Gamma(u)$ を満たす u が存在する.

(証明)

$\Gamma(1)$ と $A(2)$ により

$\exists B \subset V$ 閉球 s.t. $A \circ \Gamma(L^2(\Omega)) \subset B$.

このとき

$B \subset V \subset H^1(\Omega) \subset L^2$ から $B \subset L^2$ 凸コンパクト集合.

従って $A^{-1} \circ \Gamma(B) \subset B$.

$\Gamma(2)$ により $\forall v \in B$ に対して $\Gamma(v)$ 凸閉集合 $\neq \emptyset$.

$A(4)$ により $A^{-1} \circ \Gamma(v)$ 凸コンパクト集合 $\neq \emptyset$.

$\Gamma(3)$ により $G(\Gamma) \subset L^2 \times L^2_w$ 閉凸. 可分かつ上半連続

$A^{-1}: L^2_w \rightarrow L^2$ 連続であるから $A^{-1} \circ \Gamma$ 上半連続.

従って, Ky Fan の定理により

$\exists u \in B$ s.t. $u \in A^{-1} \circ \Gamma(u)$. (q.e.d.)

(注) A が一価作用素のときは, $Au \in \Gamma(u) \Leftrightarrow u \in A^{-1} \circ \Gamma(u)$

系 3.1.

A が線形, $l \in V'$ のとき $\exists v \in V$ s.t. $Au \in \Gamma(u) + l$.

(注) A の定義域を $D(A) = \{u \in V \mid Au \in L^2(\Omega)\}$ とし

$D(A) \subset H^2(\Omega)$ とすると, 方程式の解 u は

$$u \in V \cap H^2(\Omega).$$

§ 4 問題の解決

4.1. 問題 1 の解の存在

$\Gamma_1(v) = g \circ \beta(v)$ が $\Gamma 2)$, $\Gamma 3)$ を満たすことを示す。

 $\Gamma 2)$ の証明

i) 任意の $v \in L^2$ に対して $\Gamma_1(v) \neq \emptyset$ を示す。

ii) $\Gamma_1(v)$ 閉集合であることを

a) $\exists \varepsilon > 0$ かつ $\forall \varepsilon > 0$ の $x \in \Omega$ に対して $g(x, \beta(v)x)$ は閉集合。

b) $\lambda_n \in g(x, \beta(v)x)$, $\lambda_n \rightarrow \lambda$ ならば $\lambda \in g(x, \beta(v)x)$ を示す。

$\forall \lambda_n$ に対して $\exists \mu_n \in \beta(v)x$ s.t. $\lambda_n = g(x, \mu_n)$

$\exists \{\mu_{n_j}\} \subset \{\mu_n\}$ s.t. $\mu_{n_j} \rightarrow \mu$

一方, $\beta(v)x$ は閉区間であることを用いて $\mu \in \beta(v)x$

$g(1)$ に対して $g(x, \mu_n) \rightarrow g(x, \mu)$

$\therefore \gamma_i \in \Gamma(v), i=1,2$. したがって $\gamma_x = (1-x)\gamma_1 + x\gamma_2 \in \Gamma(v)$ を示す。

ほとんどの x に対して $\gamma_x \in \Gamma(v(x))$.

$\gamma_i(x) \in \Gamma_i(v(x))$. かつ $\Gamma_i(v(x))$ 凸閉集合

従って

$$\gamma_x(x) \in \Gamma_i(v(x)) \quad \text{a.e. } x \in \Omega$$

$$\therefore \gamma_x \in \Gamma_i(v)$$

Γ_3 の証明

(*) $v_n \rightarrow v$ in L^2 , $\gamma_n \in \Gamma_i(v_n)$, $\gamma_n \rightarrow \gamma$ in L^2 かつ $\gamma \in \Gamma_i(v)$ を示す。

$v_n \rightarrow v$ in L^2 であるから 部分列 $\{n_k\}$ とおくと $v_{n_k} \rightarrow v$ in L^2 かつ $v_{n_k}(x) \rightarrow v(x)$ a.e. $x \in \Omega$ とし得る。

$v_{n_k}(x) \rightarrow v(x)$ a.e. $x \in \Omega$ とし得る。

Egoroff の定理により

$$\forall \eta > 0, \exists K_\eta \subset \Omega \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} |\Omega - K_\eta| \leq \eta, \\ v_{n_k}|_{K_\eta} \rightarrow v|_{K_\eta} \text{ 一様} \end{cases}$$

従って

$$\gamma(x) \in \mathcal{G}(x, \beta(v(x))) \quad \text{a.e. } x \in K_\eta$$

を示せば (*) が成立する。

任意の正の数 ε を固定して考える。

$$\exists m_0 = m_0(\eta, \varepsilon) \quad \text{s.t.} \quad m \geq m_0 \quad \text{ならば} \quad \sup_{K_\eta} |v_m(x) - v(x)| < \varepsilon$$

$m \geq m_0, x \in K_\eta$ とおくと

$$\begin{aligned} \underline{\beta}(v_m)(x) &= |\{y \in \Omega \mid v_m(x) - v_m(y) > 0\}| \\ &\geq |\{y \in K_\eta \mid v_m(x) > v_m(y)\}| \\ &\geq |\{y \in K_\eta \mid v(x) \geq v(y) + 2\varepsilon\}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &|\{y \in \Omega \mid v(x) - v(y) \geq 2\varepsilon\}| \\ &= |\{y \in K_\eta \mid v(x) - v(y) \geq 2\varepsilon\} \cup \{y \in \Omega - K_\eta \mid v(x) - v(y) \geq 2\varepsilon\}| \\ &\leq |\{y \in K_\eta \mid v(x) - v(y) \geq 2\varepsilon\}| + |\{y \in \Omega - K_\eta \mid v(x) - v(y) \geq 2\varepsilon\}| \\ &\leq |\{y \in K_\eta \mid v(x) - v(y) \geq 2\varepsilon\}| + \eta \end{aligned}$$

従って

$$\underline{\beta}(v_m)(x) \geq -\eta + |\{y \in \Omega \mid v(x) \geq v(y) + 2\varepsilon\}|$$

同様にして

$$\bar{\beta}(v_m)(x) \leq \eta + |\{y \in \Omega \mid v(x) - v(y) \geq -2\varepsilon\}|$$

$\exists \delta > 0$

$$\delta(a, x) = |\{y \in \Omega \mid v(x) - v(y) \geq a\}|$$

とおくと

$$\beta(v) \subset [-\eta + \delta(2\varepsilon, x), \eta + \delta(-2\varepsilon, x)] = S(\eta, \varepsilon, x)$$

従って

$$\mu_m(x) \in \mathcal{F}(x, \beta(v_m)(x)) \subset \mathcal{F}(x, S(\eta, \varepsilon, x)), \text{ a.e. } x \in K_\eta$$

よって

$$\{\phi \in L^2(K_\eta) \mid \phi(x) \in \mathcal{F}(x, S(\eta, \varepsilon, x)) \text{ a.e. } x \in K_\eta\} \text{ は}$$

閉集合。

一、

$$f_m|_{K_\eta} \rightarrow f|_{K_\eta} \text{ in } L^2(K_\eta)$$

従、?

$$\forall \eta > 0, \forall \varepsilon > 0 \text{ には } \exists \delta > 0$$

$$f(x) \in g(x, S(\eta, \varepsilon, x)) \text{ a.e. } x \in K_\eta$$

$$\varepsilon = \varepsilon_n \downarrow 0 \text{ と可選と}$$

$$\sigma(2\varepsilon, x) \uparrow \beta(v(x)), \sigma(-2\varepsilon, x) \downarrow \bar{\beta}(v(x)) \text{ a.e. } x \in \Omega$$

$$\therefore S(\eta, \varepsilon, x) \downarrow [-\eta + \beta(v(x)), \eta + \bar{\beta}(v(x))] \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

従、?

$$\forall \eta > 0, \text{ a.e. } x \in K_\eta \text{ には } \exists \delta > 0$$

$$f(x) \in g(x, [-\eta + \beta(v(x)), \eta + \bar{\beta}(v(x))])$$

次に、

$$\eta = \frac{1}{n} \downarrow 0 \text{ と可選と } K_\eta \uparrow$$

と可選)

$$\eta' \leq \eta \Rightarrow (x \in K_{\eta'} \Rightarrow x \in K_\eta)$$

$$\therefore \forall \eta > 0, \text{ a.e. } x \in K_{\eta'}, \forall \eta' \leq \eta \text{ には } \exists \delta > 0$$

$$f(x) \in g(x, [-\eta + \beta(v(x)), \eta' + \bar{\beta}(v(x))])$$

$$\therefore \exists \delta'' \quad \eta' \downarrow 0 \text{ と可選と}$$

$$f(x) \in g(x, [\beta(v(x)), \bar{\beta}(v(x))]) \quad (\text{q.e.d.})$$

$$V = H_0^1(\Omega), A = -\Delta \text{ と可選 } A(1) \sim A(4) \text{ には } \delta > 0 \text{ 可選?}$$

満たす u 、解の正則性 Γ_1 により、 $u \in H^2 \cap H^1_0$ である。

定理 4.1.

$$\exists u \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega) \text{ s.t. } -\Delta u \in T_1(u)$$

4.2. 問題 2 の解の存在

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\partial\Omega} = \text{定数}\},$$

$$D(A) = V, \quad A = -\Delta + I$$

とすれば $A(1) \sim A(4)$ はすべて満たす。

さらに

$$l \in V' \text{ 且 } l(v) = -v|_{\partial\Omega} \text{ とすると } A^{-1}l \in H^2$$

$T_2(v)$ を次のように定める。

$$T_2(v) = h(-v)T_1(v)$$

ここで

$$h(-v)(x) = [\underline{h}(-v)(x), \bar{h}(-v)(x)],$$

$$\bar{h}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}, \quad \underline{h}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$T(1), T(2)$ は明らかに満たす。

$T(3)$ の証明。

T_1 に対する証明のときと同じ仮定の下に

$$h(x) \in T_2(v)(x) \quad \text{a.e. } x \in K_\gamma$$

を示せばよい。

同様に、 $\varepsilon > 0$, $m \geq m_0$ を固定して考えよ。

a. e. $x \in K_\gamma$ に対して

$$\beta(v_m(x)) \subset [-\gamma + \sigma(2\varepsilon, x), \gamma + \sigma(-2\varepsilon, x)] = S(\gamma, \varepsilon, x)$$

より

$$\underline{h}(-v_m(x)) \geq \underline{h}(-v(x) - \varepsilon),$$

$$\bar{h}(-v_m(x)) \leq \bar{h}(-v(x) + \varepsilon),$$

$$\therefore \underline{h}(-v_m(x)) \subset [\underline{h}(-v(x) - \varepsilon), \bar{h}(-v(x) + \varepsilon)] = T(\varepsilon, x)$$

$\delta > 0$, $m \geq m_0$, a. e. $x \in K_\gamma$ に対して

$$\gamma_m(x) \in \underline{h}(-v_m(x)) \cap \{x, \beta(v_m(x))\} \subset T(\varepsilon, x) \cap \{x, S(\gamma, \varepsilon, x)\}$$

$T(\varepsilon, x) \downarrow \underline{h}(-v(x))$ ($\varepsilon \downarrow 0$) であるから、"直に"

$m \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $\gamma' \rightarrow 0$ と可なり。

$$\gamma(x) \in T_2(v(x)) \quad \text{a. e. } x \in K_\gamma \quad (\text{q. e. d.})$$

さらに系 3.1. と $u \in H^2(\Omega)$ ならば

$$u - \Delta u = 0 \quad \text{on } \{u=0\}$$

であることから、解の存在を示す可なり。

定理 4.2.

$$\exists u \in H^2(\Omega) \quad \text{s.t.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + u \begin{cases} = 0 & \text{if } u \geq 0 \\ \in g \circ \beta(u) & \text{if } u < 0 \end{cases} \\ u = \text{未知定数} \\ \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = -1 \end{array} \right.$$

文献

- [1] J. Mossino, Some nonlinear problems involving a free boundary in plasma physics, J. of Diff. Eq. 1979, vol. 34 No. 1. pp. 114-138.
- [2] F. Terkelsen, A short proof of Faw's fixed point theorem, Proc. A.M.S. 1974, vol. 42. pp. 643-644.
- [3] M.A. Krasnosel'skii, Topological methods in the theory of nonlinear integral equation, 1964, Pergamon.