数理解析研究所講究録
532巻 1984年 22-40

線型化MHD方程式のスペクトル Surveyと最近の結果について

埼玉大学 加古 孝 (Takashi Kako)

1. 序

$\mathbb{R}^3 \supset \Omega$ における MHD (~~Magneto~~hydrodynamic, 磁気流体力学) プラズマの静止平衡解の無限小近傍での線型化方程式 (LMHD) は $\mathbb{R}\times\Omega \ni (t, \mathbb{x})$ における Lagrange 変位 $(\mathbb{R}^3\ni)\ \xi(t,\mathbb{x})$ $((\partial\xi/\partial t)(t,\mathbb{x}) = V(t, \xi(t,\mathbb{x})+\mathbb{x})$, V は流体の速度ベクトル場) を用いて

$$(1.1)\quad \begin{cases} \rho \dfrac{\partial \xi^2}{\partial t^2} = K\xi \\ K\xi = \operatorname{grad}((\operatorname{grad} P)\cdot\xi + \gamma P \operatorname{div}\xi) \\ \qquad + B\times \operatorname{rot}^2(B\times\xi) - (\operatorname{rot} B)\times \operatorname{rot}(B\times\xi) \end{cases}$$

で与えられる。ここで、γ は比熱比で正定数, ρ, P, B は次のような静止平衡解で, P は正値で

(1.2) $\qquad \operatorname{grad} P = (\operatorname{rot} B)\times B$, $\operatorname{div} B = 0$, ρ; 任意の正値関数

をみたし、充分なめらかとする。 ρ は流体の密度, P は圧力, B は磁場(磁束密度)であり. $j \equiv \operatorname{rot} B$ で電流(密度)が定まる。

特に、$\mathcal{P}$；定数、$B=(0,0,b)$（b；定数）という一様な静止平衡の場合は、よく知られているように、$\mathbb{p}=(0,p_y,p_z)\in\mathbb{R}^3$，$p^2=p_y^2+p_z^2$，$\xi_0\in\mathbb{R}^3$；定数ベクトルとして

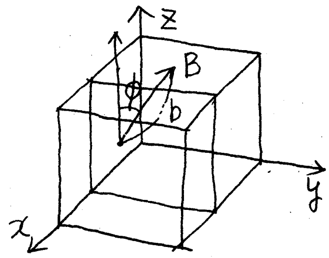
$$
K(e^{i\mathbb{p}\cdot\mathbb{r}}\xi_0)=\begin{pmatrix} -b^2p_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma\mathcal{P}p_y^2-b^2p^2 & -\gamma\mathcal{P}p_yp_z \\ 0 & -\gamma\mathcal{P}p_yp_z & -\gamma\mathcal{P}p_z^2 \end{pmatrix} e^{i\mathbb{p}\cdot\mathbb{r}}\xi_0 \tag{1.3}
$$

となり、解の性質等は Fourier 解析により調べることができる（cf. Courant-Hilbert : Methods of Mathematical Physics, Vol. II, VI-§3a-6）。

しかし、核融合などのプラズマ閉じ込めにおいては、ある種の有界領域における不均一な静止平衡解の近傍における LMHD を考察することになる。まず、最も易しい場合として、1方向のみに依存する不均一性をもつ3次元平坦トーラスにおける静止平衡解に対する問題（slab プラズマとも呼ばれる）が考えられる。§2で、この場合の結果について簡単にふれる。（文献［5］，［9］参照）　次に、軸方向に周期的な円柱の内部における動径方向に不均一な静止平衡の場合（円柱プラズマ）が考えられる。§3で、この問題を多少詳しく調べる。特に、変数分離（モード分解とも言う）した後での磁気軸（円柱の中心軸）における K の境界条件を明らかにしたい。なお、共同研究の折に多少誤まったスペクト

ルについての予想を述べたので訂正しておく。§4では、核融合炉として最も有望視されている装置の1つであるトカマクに即して、トロイダルプラズマの場合に分かっていることについて簡単にふれる（文献［2］,［11］参照）。

上記、いずれの場合においても、磁気流体中の Alfvén 波及び Slow MHD 波が有界領域においても連続スペクトル、もしくは本質的スペクトルをもつということが興味深い。



2. 平坦トーラスの場合（Slab plasma）

2.1. 静止平衡（Equilibrium）解

$\mathbb{T} = S^1 \equiv \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\mathbb{T}^3 \ni \mathbf{r} = (x, y, z)$ として

$$(2.1)\quad \begin{cases} B(\mathbf{r}) = (\,0,\ b(x)\sin\phi(x),\ b(x)\cos\phi(x)\,) \\ P(\mathbf{r}) = C - \frac{1}{2}b(x)^2 \end{cases}$$

$\begin{cases} \text{但し、} b, \phi \text{ はなめらかな } S^1 \text{ 上の関数, } C \text{ は定数で} \\ C - \frac{1}{2}b(x)^2 \geqq C_0 > 0,\ x \in S^1 \quad \text{をみたす。} \end{cases}$

は（1.2）をみたす。あるいは、より一般に MHD 系：

$$(2.2)\quad \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{V}) = 0,\ \frac{D}{Dt}(P\rho^{-\gamma}) = 0, \\ \rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\mathrm{grad}P + j \times B,\ \frac{\partial B}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,E,\ \mathrm{div}B = 0 \\ \text{但し、}\ E + \mathbf{V}\times B = 0,\ j = \mathrm{rot}B \quad \text{（透磁率は1とする）} \end{cases}$$

をみたす解になっている（$\mathbf{V} = 0$；静止解ととる）。（2.2）を（1.2）のまわりで線型化したものが（1.1）に他ならない。

2.2. モード分解

$\xi = e^{imy+inz}\eta(x)$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $\eta(x)$: $\mathbb{R}^3$-値 として

$$-K\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \xi \tag{2.3}$$

但し、

$$H = \begin{pmatrix} -\partial_x(\gamma P + b^2)\partial_x + b^2 n_\phi^2 & -i\partial_x m_\phi(\gamma P + b^2) & -i\partial_x n_\phi \gamma P \\ -i m_\phi(\gamma P + b^2)\partial_x & m_\phi^2 \gamma P + b^2(n_\phi^2 + m_\phi^2) & m_\phi n_\phi \gamma P \\ -i n_\phi \gamma P \partial_x & m_\phi n_\phi \gamma P & n_\phi^2 \gamma P \end{pmatrix}$$

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad m_\phi = m\cos\phi - n\sin\phi, \quad n_\phi = n\cos\phi + m\sin\phi$$

となる。ρを考慮すれば $H_\rho \equiv \rho^{-1/2} H \rho^{-1/2}$ として、H_ρを ヒルベルト空間 $\mathcal{H} \equiv L^2(S^1)^3$ で考察すればよい。

2.3. Resolvent と自己共役拡張

以下、H_ρ を新たに H と書くことにし、$H = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$ と記す。ここで A は H の $(1,1)$ 成分、B は $(1,2), (1,3)$ 成分を並べた $L^2(S^1)^2 \to L^2(S^1)$ への作用素、B^* はその共役、C は $(2,2), (2,3), (3,2), (3,3)$ 成分からなる $L^2(S^1)^2$ におけるかけ算作用素。 B は磁場の記号と混用しているが、この節では以下作用素の記号として用いる。他のところでも同様の混用がなされているので注意されたい。

さて、Hを、その Resolvent を定めることにより決定する。

$\mathcal{D} \equiv H^2(S^1) \oplus \{H^1(S^1) \oplus H^1(S^1)\}^{*)} \ni (f, g) = (f, g_1, g_2)$ に対し、

$H\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ を計算すると、$A_\lambda = A + \lambda$, $C_\lambda = C + \lambda$ として

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_\lambda^{-1} + [A_\lambda^{-1}B]\,D_\lambda^{-1}\,[B^* A_\lambda^{-1}] & -[A_\lambda^{-1}B]\,D_\lambda^{-1} \\ -D_\lambda^{-1}[B^* A_\lambda^{-1}] & D_\lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

但し、$D_\lambda = C_\lambda - [B^* A_\lambda^{-1} B]$, $[\cdot]$ は作用素の closure

となる。このとき、次の補題が成りたつ。

<u>補題</u>(cf. [9]) D_λ は $L^2(S^1)^2$ 上の有界作用素に一意的に拡張され(最初は $H^1(S^1)^2$ を定義域にしておく)

$$D_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{n\phi^2 b^2}{\rho} + \lambda & 0 \\ 0 & \frac{n\phi^2 b^2}{\rho}\frac{\gamma P}{\gamma P + b^2} + \lambda \end{pmatrix} + R \tag{2.5}$$

$\left\{\begin{array}{l} \text{但し、} R : H^s(S^1)^2 \longrightarrow H^{s+2}(S^1)^2,\ \forall s \text{ で Trace class の} \\ \text{作用素である。} \end{array}\right.$

となる。

略証) なめらかな正値関数 $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ に対し

$$\partial_x \alpha(x)\left(-\partial_x \beta(x) \partial_x + \gamma(x)\right)^{-1} \alpha(x) \partial_x = -\frac{\alpha(x)^2}{\beta(x)} + R_1 \tag{2.6}$$

但し、$\left\{\begin{array}{l} R_1 = \frac{1}{\beta_1(x)}\left(-\partial_x^2 + \frac{\gamma_1(x)}{\beta_1(x)}\right)^{-1}\left[\frac{\gamma_1(x)}{\beta_1(x)} - \gamma_1'(x)\left(-\partial_x \beta_1(x)\partial_x + \gamma_1(x)\right)^{-1}\partial_x\right] \\ \beta_1 = \frac{\beta(x)}{\alpha(x)^2},\quad \gamma_1(x) = \gamma(x)(\alpha(x))^{-2} - \alpha(x)^{-1}\left(\beta(x)(\alpha(x)^{-1})'\right)' \end{array}\right.$

と書ける。これを $B^* A_\lambda^{-1} B$ の各成分に適用し、R_1 の性質に注意すれば補題が示される。 q.e.d.

*) $H^s(S^1)$ は S^1 上の s 階のソボレフ空間

この補題を使って次の定理が得られる。

定理2.1（[9]） $H|_{\mathcal{D}}$ は本質的に自己共役で，(2.4)の右辺で定まる Resolvent をもつ自己共役作用素に一意的に拡張される。さらに，H の本質的スペクトル（essential spectrum）は

$$(2.7)\quad \begin{cases} \sigma(F_A) \equiv \{\lambda \mid \lambda = F_A(x) \equiv \dfrac{\eta\phi^2(x)^2 b(x)^2}{\rho(x)},\ 0 \leqq x < 2\pi\} \\ \sigma(F_S) \equiv \{\lambda \mid \lambda = F_S(x) \equiv F_A(x)\dfrac{\gamma P(x)}{\gamma P(x) + b(x)^2},\ 0 \leqq x < 2\pi\} \end{cases}$$

からなる。

2.4. トレース族の散乱理論とHの絶対連続スペクトル

前節で確定した自己共役作用素 H（あるいは，それとユニタリー同値な $\rho^{-1/2} K \rho^{-1/2}$）のスペクトルのうち，絶対連続な部分は，Rosenblume-Kato（[12] 参照）の定理を用いて次のように決定される。

定理3.1（[9]） H の絶対連続部分は，かけ算作用素 $F = \begin{pmatrix} F_A(x) & 0 \\ 0 & F_S(x) \end{pmatrix}$ の絶対連続部分とユニタリー同値であり，

$$(2.8)\qquad H W_\pm = W_\pm \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \quad \text{on } P_{ac}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}\right)\mathcal{H}$$

但し，

$$W_\pm = \operatorname*{s-lim}_{t \to \pm\infty} e^{itH} e^{-it\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}} P_{ac}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}\right)$$

であり，$P_{ac}(\cdot)$ は作用素の絶対連続部分への直交射影

でユニタリー同値が与えられる。

注意） この章で Ω の長さを 2π としたのは簡単のためで，より

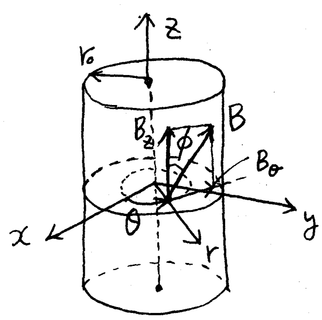
一般の平坦トーラスでも m, n をとり換えれば同様の結果が成立する。

3. 円柱プラズマの場合

この章では、固定境界をもつ円柱プラズマの場合を考える。

3.1. 静止平衡解

仮定：$b(r), \phi(r)\ ;\ [0, r_0] \to \mathbb{R}$，なめらかな関数，かつ，$b'(0)=0,\ \phi(0)=0$ をみたすとする。



この仮定のもとで

$$
(3.1)\quad \begin{cases} B(r,\theta,z) = (0, B_\theta(r), B_z(r))_{r,\theta,z} \\ \qquad = (0, b(r)\sin\phi(r), b(r)\cos\phi(r))_{r,\theta,z} \\ P(r) = P(0) - \int_0^r \left\{ \frac{1}{2}(b(s)^2)' + \frac{1}{s} b(s)^2 \sin^2\phi(s) \right\} ds \end{cases}
$$

は (1.2) をみたす静止平衡解を与える。$j = \mathrm{rot}\, B = (0, (-b(r)\cos\phi(r))', \frac{1}{r}(r b(r)\sin\phi(r))')_{r,\theta,z}$，$' = \frac{d}{dr}$，となっている。このとき，

$$
(3.2)\quad \begin{cases} b(r) = b(0) + \frac{1}{2} b''(0) r^2 + o(r^3) \\ \phi(r) = \phi'(0) r + o(r^2) \end{cases}
$$

が成立している。

3.2. モード分解

$\partial_r = \frac{\partial}{\partial r}$ とし，$\xi = e^{ik\theta + ilz}\eta(r)$ に対して $-K\xi$ を計算すると，2.2 と同様にして

$$
-K\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U(\phi) \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U(-\phi) \end{pmatrix} \xi, \quad U(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}
$$

(3、3)
$$H=\begin{pmatrix} -\partial_r\frac{b^2+\gamma P}{r}\partial_r r+\frac{1}{r}(b^2\sin^2\phi)'-\frac{2b^2\sin^2\phi}{r^2}+b^2 l_\phi^2 & -i\partial_r(b^2+\gamma P)k_\phi+2ib^2 l\frac{\sin\phi}{r} & -i\partial_r\gamma P l_\phi \\ -i(b^2+\gamma P)k_\phi\frac{1}{r}\partial_r r-2ib^2 l\frac{\sin\phi}{r} & k_\phi^2(b^2+\gamma P)+b^2 l_\phi^2 & l_\phi k_\phi\gamma P \\ -i\gamma P l_\phi\frac{1}{r}\partial_r r & l_\phi k_\phi\gamma P & l_\phi^2\gamma P \end{pmatrix}\equiv\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} & \begin{matrix}]1 \\ ]2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underbrace{\quad}_{1} & \underbrace{\quad}_{2} \end{matrix} & \end{array}$$

但し. $k_\phi=\frac{k}{r}\cos\phi-l\sin\phi,\quad l_\phi=l\cos\phi+\frac{k}{r}\sin\phi$

となり、Hは. $\mathcal{K}\equiv L^2([0,r_0];rdr)^3$ で形式的に自己共役。ρ と、rdr という weight を dr につけかえるユニタリー変換を考慮して.

(3.4)
$$H_\rho\equiv\rho^{-1/2}\sqrt{r}\,H\frac{1}{\sqrt{r}}\rho^{-1/2}$$

を $\mathcal{H}\equiv L^2([0,r_0];dr)^3$ で考える。これも形式的に自己共役。以下. H_ρ を再び H と書くことにする。

3.3. Resolvent と自己共役拡張

H の $\mathcal{H}$ における自己共役拡張を考える場合. θ 方向のモード数 k が 0 の場合は. H の成分がすべて有界な係数をもつことになり. slab plasma と同様の扱いが可能である。そこで. この節では $k\neq 0$ の場合に限って考察する。さて. Resolvent を決定するために $\binom{f}{g}\in\mathcal{D}\equiv\{\binom{f}{g}\mid f,g_1,g_2\in C^\infty([0,r_0]),\ \mathrm{supp}f,\ \mathrm{supp}g_i\ (i=1,2)\subset(0,r_0],\ f(r_0)=0\}$ に対し $(H+\lambda)\binom{f}{g}=\binom{u}{v}$ を考

えると、

(3.5) $\qquad (A+\lambda)f + Bg = u, \quad B^*f + (C+\lambda)g = v$

となるが、まず $\lambda > 0$ に対し、$C+\lambda$ は逆をもつので

(3.6) $\qquad g = (C+\lambda)^{-1}v - (C+\lambda)^{-1}B^*f$

となり、才1式に代入して

(3.7) $\qquad \{(A+\lambda) - B(C+\lambda)^{-1}B^*\}f = u - B(C+\lambda)^{-1}v$

を得る。$E_\lambda \equiv (A+\lambda) - B(C+\lambda)^{-1}B^*$ とおいて具体的に計算すると

(3.8) $\qquad -E_\lambda = \partial_r r f(r:\lambda) r \partial_r + g(r:\lambda)$

但し、$f(r:\lambda) = \dfrac{(b^2+\gamma\ell)((\lambda\rho)+\omega_1)((\lambda\rho)+\omega_2)}{\rho r^2 \det C_{(\lambda\rho)}}$

$$\begin{cases} \omega_1 = b^2 \ell_\phi^2, \quad \omega_2 = \omega_1 \gamma\ell/(b^2+\gamma\ell), \\ \det C_{(\lambda\rho)} = (\lambda\rho)^2 + (b^2+\gamma\ell)(\ell_\phi^2+k_\phi^2)(\lambda\rho) + b^2\gamma\ell\,\ell_\phi^2(\ell_\phi^2+k_\phi^2), \end{cases}$$

かつ、

$$\begin{cases} g(r:\lambda) = \dfrac{\sqrt{r}}{\sqrt{\rho}}\left(r\rho f(r:\lambda)\left(\dfrac{\sqrt{r}}{\sqrt{\rho}}\right)'\right)' \\ \qquad + \dfrac{1}{\rho}\Big\{-(\lambda\rho+\omega_1) - r\left(\dfrac{b^2\sin^2\phi}{r^2}\right)' + \dfrac{4\ell^2 b^2 \sin^2\phi}{r^2 \det C_{\lambda\rho}}(b^2\lambda + \gamma\ell\,\omega_1) \\ \qquad\qquad + r\left[\dfrac{2\ell b^2 \sin\phi\, k_\phi}{r^2 \det C_{\lambda\rho}}(\gamma\ell + b^2)(-\lambda\rho - \omega_2)\right]'\Big\} \end{cases}$$

となり、特に、$f(r:\lambda)$, $g(r:\lambda)$ は $[0, r_0]$ で一様有界になる。

これから、

(3.9)
$$\begin{aligned} W\ ;\ \mathcal{H} = \{L^2([0,r_0]\,;dr)\}^3 &\longrightarrow \mathcal{Y} \equiv \{L^2((-\infty, \log r_0]\,;ds)\}^3 \\ f_1 \oplus (g_1 \oplus g_2) &\longmapsto e^{s/2} f_1(e^s) \oplus (e^{s/2} g_1(e^s) \oplus e^{s/2} g_2(e^s)) \end{aligned}$$

という $\mathcal{H}$ から $\mathcal{Y}$ のユニタリー変換を介して、次の補題を得る。

補題 $\mathcal{D}(E_\lambda) \equiv W^*(H^2(-\infty, \log r_0]) \cap H_0^1((-\infty, \log r_0]))$ ((3.9) の W を各成分に制限したものも同様に W で表わす)，として，
E_λ は $L^2([0, r_0]; dr)$ 上の自己共役作用素になる。

略証). 変換 W により

$$(3.10) \qquad W E_\lambda W^* = -(\partial_s + \tfrac{1}{2}) f(e^s; \lambda)(\partial_s - \tfrac{1}{2}) - g(e^s; \lambda)$$

となり，$\log r_0$ は上記作用素の極限円型，$-\infty$ は極限点型の境界になっていることから結果が得られる。 q.e.d.

これから，λ 充分大として (3.7) より

$$(3.11) \qquad f = E_\lambda^{-1} u - E_\lambda^{-1} B (C+\lambda)^{-1} v$$

を得，(3.6) に代入して

$$(3.12) \qquad g = -(C+\lambda)^{-1} B^* E_\lambda^{-1} u + \{(C+\lambda)^{-1} + (C+\lambda)^{-1} B^* E_\lambda^{-1} B (C+\lambda)^{-1}\} v$$

を得る。まとめて

$$(3.13) \qquad \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = (H+\lambda)^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_\lambda^{-1} & -E_\lambda^{-1} B (C+\lambda)^{-1} \\ -(C+\lambda)^{-1} B^* E_\lambda^{-1} & (C+\lambda)^{-1} + (C+\lambda)^{-1} B^* E_\lambda^{-1} B (C+\lambda)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

となる。一方，さらに $B(C+\lambda)^{-1}$ を具体的に計算すると

$$(3.14) \qquad B(C+\lambda)^{-1} = \Bigg(\frac{k_\phi (b^2 \partial \ell)((\lambda\rho) + w_2)}{\det C_{\lambda\rho}} (-i\partial_r) - i \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\rho}} \left(\frac{k_\phi (b^2 \partial \ell)(\lambda\rho + w_2)\sqrt{\rho}}{\sqrt{r} \det C_{\lambda\rho}} \right)' + \frac{2ib^2 \ell \sin\phi (\lambda\rho + \ell_\phi{}^2 \partial \ell)}{r \det C_{\lambda\rho}} ,\ \frac{\ell_\phi \partial \ell (\lambda\rho + w_1)}{\det C_{\lambda\rho}} (-i\partial_r) - i \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\rho}} \left(\frac{\ell_\phi \partial \ell (\lambda\rho + w_1)\sqrt{\rho}}{\sqrt{r} \det C_{\lambda\rho}} \right)' - \frac{2ib^2 \ell \sin\phi\, \ell_\phi k_\phi \partial \ell}{r \det C_{\lambda\rho}} \Bigg)$$

となる。特に，$r \sim 0$ では，$B(C+\lambda)^{-1} \sim (-i\partial_s, 0)$ となる。

このことから、(3.13)の右辺で定義される作用素は、有界な自己共役作用素に一意的に拡張され、簡単にわかるように単射でもあるから次の定理を得る。

<u>定理3.1</u> $\mathcal{D}$を定義域とする$H+\lambda$の自己共役拡張で、そのResolventが(3.13)の右辺で与えられるものが存在する。

<u>注意</u> $\mathcal{D}$上で$H+\lambda$は本質的に自己共役であろうと思われるが証明できていない。

3.4. 本質的スペクトルについて

前節で確定した自己共役作用素H(あるいは、同じことだがそのResolvent $(H+\lambda)^{-1}$)のスペクトルの性質を調べる。現在のところ、本質的スペクトルについて次の結果を得ている。

<u>定理3.2</u> Hの本質的スペクトル$\sigma_{ess}(H)$は、

(3.15) $$\sigma_{ess}(H)\supset\{\sigma(F_A)\cup\sigma(F_S)\}$$

$$\begin{cases}\text{但し、}\ \sigma(F_A)\equiv\left\{\lambda \,\middle|\, \lambda=\dfrac{b(r)^2\ell\phi(r)^2}{\rho(r)}\left(=\dfrac{\omega_1}{\rho}(r)\right),\ 0\leqq r\leqq r_0\right\}\\ \qquad\ \sigma(F_S)\equiv\left\{\lambda \,\middle|\, \lambda=\dfrac{b(r)^2\ell\phi(r)^2\gamma P(r)}{b(r)^2+\gamma P(r)}\left(=\dfrac{\omega_2}{\rho}(r)\right),\ 0\leqq r\leqq r_0\right\}\end{cases}$$

をみたす。

<u>注意</u> 上の(3.15)で等号が成立すると予想されるが証明できていない。

<u>注意</u> 共同研究の折、∞までのびるHの本質的スペクトルがある(かもしれない)ということを述べたが、思い違いがあったので取り消させていただきます(否定もされていませんが)。

定理3.2の略証) $\mu\in\sigma(F_A)\cup\sigma(F_S)$ に対し、特異列を構成できればよい。これを $(H+\lambda)^{-1}$ で考えると $(\mu+\lambda)^{-1}$ に対して ($\sigma(F_A)$ についていうと)、$\mu=F_A(r_\mu)$ として

$$
(3.16)\quad \begin{cases} \|\eta_{A,\mu,\varepsilon}\|=1, \quad \operatorname*{w\text{-}lim}_{\varepsilon\to 0}\eta_{A,\mu,\varepsilon}=0 \\ \|(H+\lambda)^{-1}\eta_{A,\mu,\varepsilon}-(\mu+\lambda)^{-1}\eta_{A,\mu,\varepsilon}\|\longrightarrow 0 \quad (\varepsilon\to 0) \end{cases}
$$

となるものが構成できればよい。これは、$\varphi\in C_0^\infty(R)$、$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(s)|^2ds=1$ となる関数をとり、$s=\log r$ として ($s_\mu=\log r_\mu$)

$$
\tilde{\eta}_{A,\mu,\varepsilon}(s)\equiv\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\varphi((s-s_\mu)/\varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon\ll 1
$$

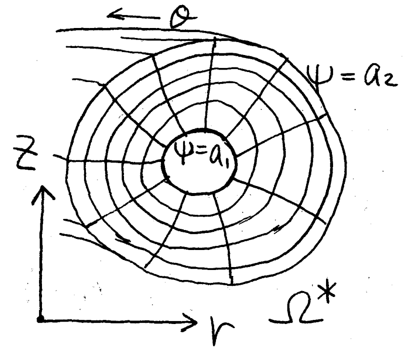
をとればよい。$(\Pi^*\tilde{\eta}_{A,\mu,\varepsilon})(r)$ が求める $\eta_{A,\mu,\varepsilon}(r)$ を与える。$\sigma(F_S)$ についても同様である。 q.e.d.

4. トーラスプラズマの場合

円柱プラズマに対しては前章でみたようにかなりのことが分かってきており、後は予想を証明するための技術的問題が残されているという感じであるが、トーラスプラズマの場合特に磁気軸が存在する場合には、本質的スペクトルに対する予想も明確にはたてにくい。しかし、Hard core pinch と呼ばれる内部導体壁を置いた問題では、本質的スペクトルを決定することができている(文献[2],[10])。以下、簡単に結果を紹介する。

4.1. 静止平衡解

軸対称トーラスプラズマは、次の Grad-Shafranov 方程式で定まる静止平衡解をもつ（cf. [3], [15]）。



すなわち、Ω^* を円環に微分同相な領域で (ψ, χ) を Ω^* 上のなめらかな関数で（$\Omega^* \subset \{(r, z) \mid r > 0\}$）

$$\Omega^* \ni (r, z) \longmapsto (\psi, \chi) \in [a_1, a_2] \times S^1$$

が微分同相を与え、しかも

$$(4.1)\quad \begin{cases} -\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(r, z) = r^2\left(\dfrac{\partial P}{\partial \psi}\right)(r, z) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial I^2}{\partial \psi}\right)(r, z) \\ \qquad\qquad (\text{Grad-Shafranov 方程式}) \\ \begin{cases} \psi = a_1 \ (\text{内側の境界}) \\ \psi = a_2 \ (\text{外側の境界}) \end{cases} \end{cases}$$

及び，

$$(4.2)\qquad \frac{\partial \psi}{\partial r}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial z} = 0, \qquad 0 \leqq \chi(r, z) < 2\pi$$

をみたすものを見出だそう。ここで、P, I は ψ の関数（適当になめらかな）である。

(4.1), (4.2) のなめらかな解に対し

$$(4.3)\quad \begin{cases} P(r, \theta, z) = P(\psi(r, z)) \\ B(r, \theta, z) = \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial z}, \dfrac{1}{r}I, -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial r}\right) \end{cases}$$

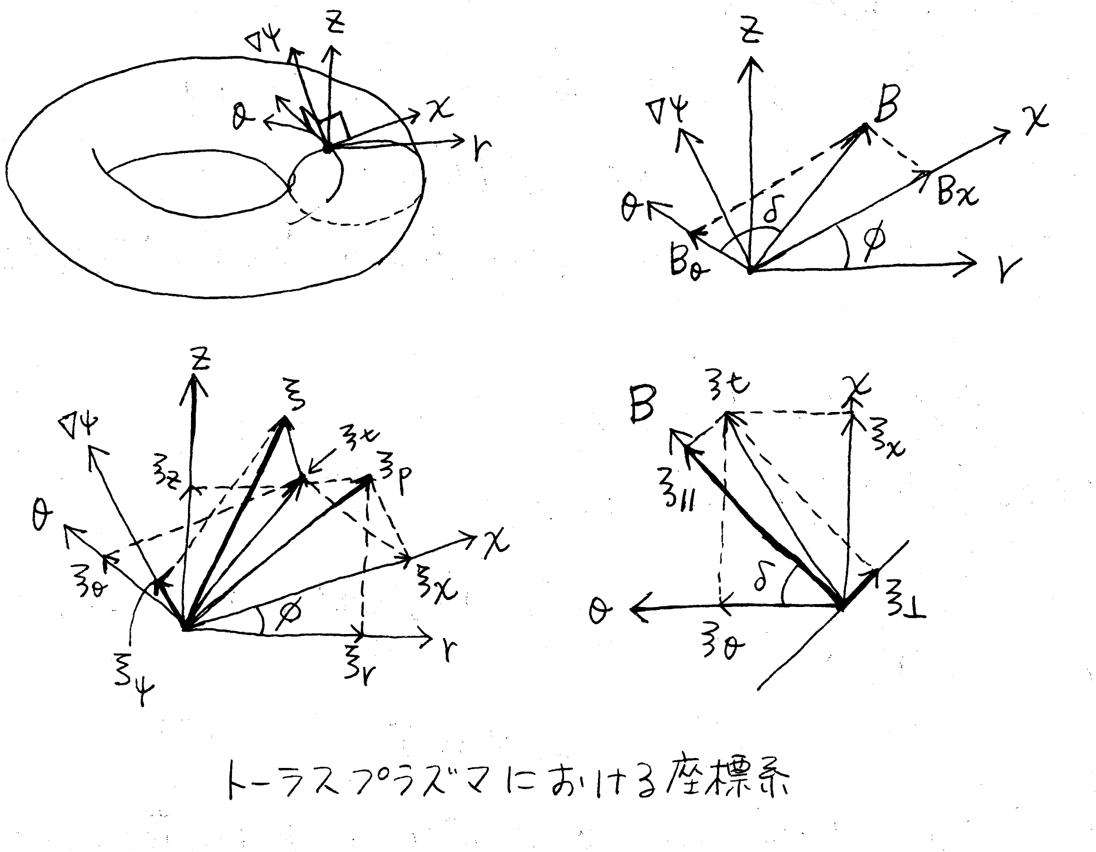
が、軸対称3次元領域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid (r = \sqrt{x^2+y^2}, z) \in \Omega^*\}$ における Ω の境界で B が tangential な (1.2) の解となる。

4、2. トロイダルモード分解

Ωにおける座標として(ψ, χ, θ)をとることにし、(1.1)でρもθによらないとする。このとき $\xi = e^{in\theta}\eta(\psi, \chi)$ に対し、

$$-K\xi = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}\xi \tag{4.4}$$

と表現される。ただし、ξは $\xi = {}^t(\xi_\psi, \xi_\perp, \xi_\parallel)$ で、Lagrange変位ベクトル自身は $\xi_\psi e_{\nabla\psi} + \xi_\perp e_\perp + \xi_\parallel e_\parallel$ ($e_{\nabla\psi}$; grad ψ方向の単位ベクトル, $e_\parallel$: 磁場方向の単位ベクトル, $e_\perp$: $e_{\nabla\psi}$, $e_\parallel$ に垂直な単位ベクトル) と表わされる表現とする。



トーラスプラズマにおける座標系

さらに $\partial_\psi = \partial/\partial\psi$, $\partial_x = \partial/\partial x$, として

$$(4.5)\quad \begin{cases} A = -\partial_\psi \alpha_{11} \partial\psi - \partial_x \alpha_{22} \partial_x - \partial_x \alpha_2 + \alpha_2^* \partial_x + \alpha_0 \\ B = -\partial_\psi (\beta_{12} \partial_x + \beta_1) - \partial_x \beta_2 - \beta_0 \\ B^* = (\partial_x \beta_{12}^* - \beta_1^*)(-\partial_\psi) + \beta_2^* \partial x - \beta_0^* \\ C = -\partial_x \gamma_{22} \partial_x - \partial_x \gamma_2 - \gamma_2^* \partial_x + \gamma_0 \end{cases}$$

と書ける。ここで $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_0$ は実数値関数, γ_{22}, γ_0 は 2×2 対称行列値関数, α_2 は関数, $\beta_{12}, \beta_1, \beta_2, \beta_0$ は 1×2 行列値関数, $\beta_{12}^*, \beta_1^*, \beta_2^*, \beta_0^*$ はその共役行列値関数 γ_2 は 2×2 行列値関数, γ_2^* は γ_2 の共役行列値関数であり, すべて有界でなめらかな係数をもつ。具体的な型については [4] を参照されたい。さらに

$$(4.6)\quad \begin{cases} \gamma_{22} - \frac{1}{\alpha_{11}} \beta_{12}^* \beta_{12} \geq c_0 > 0 \ (\text{行列として}) \\ \qquad (\psi, x) \in [a_1, a_2] \times S^1 \end{cases}$$

が成立している。また, A は (ψ, x) 変数に関し一様楕円型である。

4.2. 自己共役拡張の存在

形式的な作用素 K は

$$(4.7)\quad (K+\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} (A+\lambda)^{-1} + [(A+\lambda)^{-1}B] D_\lambda^{-1} B^* (A+\lambda)^{-1} & -[(A+\lambda)^{-1}B] D_\lambda^{-1} \\ -D_\lambda^{-1} B^* (A+\lambda)^{-1} & D_\lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

但し, D_λ は $C+\lambda - B^*(A+\lambda)^{-1}B$ に適当に意味づけし

た作用素で、具体的には対応する二次形式より定める。

また[・]はclosureを表わす。

このときD_λの定義域に関して

(4.8) $$\mathcal{D}(D_\lambda^{1/2})=\{L^2(\{a_1,a_2\})\otimes H^1(S^1)\}^2\supset\mathcal{D}(D_\lambda)$$

となっていることがいえる。

4.3. 凍結作用素と本質的スペクトル

Kの本質的スペクトルの決定には、Goedbloed [4] によって示唆され、Descloux-Geymonat [2] によってより数学的に明確にされた凍結作用素を考えることがポイントになる。

我々のapproachでは、Resolventの次のような展開に対応する。すなわち、

(4.9) $$(K+\lambda)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & D_\lambda^{0\,-1}\end{pmatrix}+\text{コンパクト作用素}$$

但し、

(4.10) $$D_\lambda^0=-\partial x\left\{\gamma_{22}-\frac{\beta_{12}{}^*\beta_{12}}{\alpha_{11}}\right\}\partial x+\left\{\gamma_2-\frac{\beta_1{}^*\beta_{12}}{\alpha_{11}}\right\}\partial x$$
$$-\partial x\left\{-\frac{\beta_{12}{}^*\beta_1}{\alpha_{11}}+\gamma_2{}^*\right\}+\left\{\gamma_0-\frac{\beta_1{}^*\beta_1}{\alpha}\right\}+\lambda$$

(凍結作用素, freezing operator)

と書ける。証明は、D_λ^{-1}に対する次の補題から従う。

<u>補題</u> D_λ^{-1}は

(4.11) $$D_\lambda^{-1}=D_\lambda^{0\,-1}-D_\lambda^{-1}Q_\lambda D_\lambda^{0\,-1},\quad D_\lambda^{-1}Q_\lambda D_\lambda^{0\,-1}:\text{コンパクト}$$

という表示をもつ。

証明のidea）具体的に計算して $Q_\lambda = D_\lambda - D_\lambda^\circ$ として

$$
\begin{aligned}
&D_\lambda^{-1} Q_\lambda D_\lambda^{\circ -1} \\
(4.12)\qquad &= \{D_\lambda^{-1}(-\partial_x \beta_{12}^*)\}\{(A_1+\lambda)^{-1}(-\partial_x \alpha_{22}\partial_x + \lambda)^{1/2}\}\times \\
&\quad \times\{(-\partial_x \alpha_{22}\partial_x + \lambda)^{1/2}\alpha_{11}^{-1}(\beta_{12}\partial_x)D_\lambda^{\circ -1}\} + \text{低階のコンパクト作用素}
\end{aligned}
$$

と書けるが、$\mathcal{D}(D_\lambda) \subset \{L^2([a_1, a_2]) \otimes H^1(S^1)\}^2$ ということを用いれば第一項もコンパクトになることがわかる。 q.e.d.

(4.9)よりただちに次の定理を得る。

<u>定理4.1</u>（[10]，[2]も参照） Kの本質的スペクトルは D_λ° の本質的スペクトルに一致する。D_λ° の ψ を固定した時の x の作用素としての固有値（離散的）を $\{\lambda_j(\psi)\}_{j=1}^\infty$ とすると D_λ° の本質的スペクトルは

$$
\Sigma = \bigcup_{\substack{a_1 \leq \psi \leq a_2 \\ 1 \leq j \leq \infty}} \{\lambda_j(\psi)\}
$$

で与えられる。

残された問題としては、円柱プラズマや slab プラズマの場合の結果をどこまでトーラスプラズマの場合に拡張できるか、また拡張できずに新しい現象が表われるかを明らかにしていくことがある。また、固有関数展開や、波の加熱に関連する問題も（[5]で多少扱われているが）今後の課題であろう。

最後に、この分野の研究に筆者をさそってくださり、その後もたえざる批判と助言をいただき、また討論の相手となっていただいている、電気通信大学の牛島照夫教授に感謝の意を表わしたい。また、同大学の花田孝郎氏・中村正彰氏，東京大学の菊地文雄氏にもいろいろ教えていただいたことを感謝する。さらに、直接・間接にこの分野の貴重な文献を紹介していただき、また、いろいろな助言・批判もいただいた日本原子力研究所の竹田辰興氏、常松俊秀氏、徳田伸二氏を始めとする理論解析研究室の皆様に深く感謝したい。

<u>References</u>（文中引用していないものも含まれている。また完全を期したものではない）

[1] Bernstein,I., Frieman,E., Kruskal,M. and Kulsrud: An energy principle for hydrodynamic stability problems. Proc. Royal Soc. A. <u>244</u> (1958) 17-40.

[2] Descloux,J. and Geymonat,G.: Sur le spectre essential d'un opérateur relatif à la stabilité d'un plasma en géométrie toroidale. C. R. Acad. Sc. Paris. <u>290</u> (1980) 795-797.

[3] Friedman,A.: Variational principle and free-boundary problems, John-Wiley & Sons, New York (1982).

[4] Goedbloed,J.P.: Spectrum of ideal magnetohydrodynamics of axisymmetric toroidal systems. Phys. Fluids. <u>18</u> (1975) 1258-1268.

[5] Goedbloed,J.P.: Lecture notes on ideal magnetohydrodynamics. Rijnhuizen Report 83-145, FOM-INSTITUUT VOOR PLASMAFYSICA (1983).

[6] Grad,H.: Magnetofluid-dynamic spectrum and low shear stability

Proc. Nat. Acad.Sci. USA. 70 (1973) 3277-3281.

[7] Grubb,G. and Geymonat,G.: The essential spectrum of elliptic systems of mixed order. Math. Ann. 227 (1977) 247-276.

[8] Gruber,R.: Numerical computations of the magnetohydrodynamic spectrum for one and two dimensional equilibria using regular finite elements and finite hybrid elements. Thèse No 264, Ecole Polytechnique Fédérale Lausanne. 1976.

[9] Kako,T: On the absolutely continuous spectrum of MHD plasma confined in the flat torus. to appear.

[10] Kako,T: On the essential spectrum of MHD plasma in toroidal region. to appear.

[11] Kako,T: Scattering theory for abstract differential equations of second order. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec.IA. 19 (1972) 377-392.

[12] Kato,T: Perturbation theory for linear operators. Berlin-Heideberg-New York. Springer 1966.

[13] Miyamoto,K.: Plasma physics for nuclear fusion. in Japanese. Tokyo: Iwanami 1976.

[14] Rappaz,J: Approximation of the spectrum of a non-compact operator given by the magnetohydrodynamic stability of a plasma. Numer. Math. 28 (1977) 15-24.

[15] Temam,R.: A nonlinear eigenvalue problem; equilibrium shape of a confined plasma. Arch. Rat. Mach. Anal. 60 (1975) 51-73.

[16] Ushijima, T.: On the linearized magnetohydrodynamic systems of equations for a confined plasma in a vacuum region. Computig Meth. Appl. Sci. Eng. V. Glowinski,R. & J.L.Lions (editors) (1982) 507-527.