数理解析研究所講究録
534巻 1984年 310-315

弦のない4ーサイクルの最大個数

お茶大 理 立花俊一 (Shun-ichi Tachibana)
武蔵工大 奈良知恵 (Chiê Nara)

グラフの数え上げにおいて、頂点数pのグラフに含まれるある特定の性質をもつ誘導部分グラフの最大個数を求める事は、興味ある問題である。トーナメントにおける強連結な部分トーナメントの最大個数は既に解決されている([1])。ここでは頂点数pのグラフに含まれる弦のない4ーサイクルの最大個数を求め、かつその極値グラフを決定する。また弦のない4ーサイクルは完全二組グラフ$K_{2,2}$と同型であるから、これを一般化して$n \geqq 2$について、頂点数pのグラフに含まれる完全二組グラフに同型な誘導部分グラフの最大個数を求め、かつその極値グラフを決定する。

グラフは全て単純グラフ、即ち輪や多重辺のない無向有限グラフとする。グラフGの頂点数を$|G|$, 辺数を$e(G)$, Gの補グラフを$\overline{G}$, Gの頂点vの次数を$d_G(v)$ 又は$d(v)$ と書く。またグラフHに同型なGの誘導部分グラフの個数を

$f(H,G)$、特にHに同型なGの誘導部分グラフの中でvを含むものの個数を $f(H,G,v)$ と書く。混乱の恐れがない時は、簡単の為に $f(H,G)$, $f(H,G,v)$ の代りにそれぞれ $f(G)$, $f(G,v)$ と書く。正の実数xについてその切り下げを記号$\lfloor x \rfloor$で、切り上げを記号$\lceil x \rceil$で表わす。

定理1　頂点数pのグラフに含まれる弦のない4-サイクルの最大個数は

$$\binom{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}{2}\binom{\lceil \frac{p}{2} \rceil}{2}$$

である。極値グラフは完全二組グラフ $K_{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil}$ である。

定理1の証明　pに関する数学的帰納法で証明する。

$p=4$ の時は明らかに成立する。$p-1$ のとき成立すると仮定してpの時も成立する事を示す。頂点数pの任意のグラフをGとする。Gの最小次数 $\delta(G)$ をとる一つの頂点をv、即ち $d(v)=\delta(G)$ とする。簡単の為に $d(v)=d$ と書く。まず

(1)
$$f(G,v) \leq \binom{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}{2}\left(\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil - 1\right)$$

を示す。vに隣接する頂点集合による誘導部分グラフをG_0

とおくと、 $|G_0|=d$ である。vを含む弦のない4ーサイクルは少なくともvに隣接する(即ち、G_0の) 2頂点で互いに隣接しないものと、vに隣接しない1頂点より成る事から

(2) $$f(G,v) \leqq \left\{\binom{d}{2} - e(G_0)\right\}(p-d-1)$$

である。

$d \leqq \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$ の場合は容易に(2)より(1)が示される。

$d > \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$ の場合。 $\delta(G)=d(v)=d$ よりG_0の頂点uについて $d_{G_0}(u) \geqq d(u)-(p-|G_0|) \geqq 2d-p$ 、従って $e(G_0) \geqq \frac{1}{2} d(2d-p)$ である。故に(2) に代入して

$$f(G,v) \leqq \frac{d}{2}(p-d-1)^2 < \binom{\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor}{2}\left(\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil - 1\right)$$

が成立する。

次に帰納法の仮定より $G'=G-v$ (Gからvとvに接続する辺を取り除いたグラフ)について

$$f(G') \leqq \binom{\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor}{2}\binom{\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil - 1}{2}$$

が成り立つ。従って

$$f(G) = f(G,v) + f(G') \leqq \binom{\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor}{2}\binom{\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil}{2}$$

を得る。このとき等号が成立するのは、Gが$K_{\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil}$に

限る事もわかり定理1が証明される。

定理2　$n \geqq 3$ について、頂点数pのグラフに含まれる完全二組グラフ $K_{n,n}$ の最大個数は

$$\binom{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}{n}\binom{\lceil \frac{p}{2} \rceil}{n}$$

である。極値グラフは完全二組グラフ $K_{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lceil \frac{p}{2} \rceil}$ である。

証明の要点　定理1の証明と同様の手順で証明されるが、主な部分は

$$d > \lfloor \frac{p}{2} \rfloor \text{ のとき } \quad f(G, v) < \binom{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}{n}\binom{\lceil \frac{p}{2} \rceil - 1}{n-1}$$

を示す事である（こゝで記号 G, v 及び後に使う G_0 は全て定理1の証明中の定義による）。

まず、v を含む $K_{n,n}$ に同型な誘導部分グラフは少なくとも G_0 の独立な n 個の頂点と v に隣接しない $n-1$ 個の頂点より成る事から

$$f(G, v) \leqq f(\overline{K_n}, G_0)\binom{p-d-1}{n-1}$$

である。また G_0 の独立な n 個の頂点集合は、$\overline{G_0}$ の完全部分グ

ラフをなすn個の頂点集合と一対一対応をするから$f(\overline{K_n}, G_0) = f(K_n, \overline{G_0})$である事に注意する。さて$f(K_n, \overline{G_0})$について一般に次の事が知られている。

辺数　$q = \binom{m}{2} + r,\quad 0 \leqq r \leqq m-1$　のグラフに含まれる完全グラフK_ℓ $(\ell \geqq 2)$ の最大個数は

$$(*) \qquad \max_{e(G)=q} f(K_\ell, G) = \binom{m}{\ell} + \binom{r}{\ell-1}$$

である([2])。

そこで$e(G_0)$を評価すると$\delta(G) = d > \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$から

$$e(G_0) \leqq \begin{cases} \binom{m}{2}, & p = 2m \text{ のとき} \\ \binom{m}{2} + \frac{d}{2}, & p = 2m+1 \text{ のとき} \end{cases}$$

を得る事ができる。　$p = 2m$のとき(*)より$f(K_n, \overline{G_0}) \leqq \binom{m}{n}$、従って

$$f(G, v) \leqq \binom{m}{n}\binom{m-2}{n-1} < \binom{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}{n}\binom{\lceil \frac{p}{2} \rceil - 1}{n-1}$$

を得る。$p = 2m+1$のとき、(*)より　$f(K_n, \overline{G_0}) \leqq \binom{m}{n} + \binom{\frac{d}{2}}{n-1}$ が成り立つ。そこで$n \geqq 3$を用いると次の不等式

$$\binom{\frac{d}{2}}{n-1}\binom{p-d-1}{n-1} < \binom{m}{n}\binom{m-1}{n-2}$$

を示す事ができ

$$f(G,v) < \binom{m}{n}\binom{m}{n-1} = \binom{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}{n}\binom{\lceil \frac{p}{2} \rceil - 1}{n-1}$$

が成立して定理2が証明される。

尚、これ等の結果はその後 B. Bollobás との共同研究によって $K_{n,n}$ の代りに $K_{n,n+1}$ とした場合にも解決されている。

参考文献

[1] L.W.Beineke and F.Harary, The maximum number of strongly connected subtournaments, Can.Math.Bull. 8(1965).491-498.

[2] P.Erdös, On the number of complete subgraphs contained in certain graphs, Pulb.Math.Hungr.Acad.Sci. 7(1962),459-464.