数理解析研究所講究録
534巻 1984年 286-297
286

拘束を入れた割当問題の計算複雑度について

阪大 工学部　木本 務 (Tsutomu KIMOTO)
築山修治 (Shuji TSUKIYAMA)
白川 功 (Isao SHIRAKAWA)

1. まえがき

割当問題あるいは各辺に重みのついた2部グラフにおける完全マッチングを見い出す問題については，今までに多くの研究が行なわれてきており，

① マッチングの辺の重みの最大値を最小とするような完全マッチングを求める問題 (Max Min Matching Problem),

② マッチングの辺の重みの総和を最小とするような完全マッチングを求める問題 (Weighted Matching Problem),

のいずれに対しても，計算時間が $O(n^3)$ の効率の良いアルゴリズムが提案されている.[(1),(2)] ここで，nはグラフの頂点の個数である.

ところで，$n \times n$ の重み行列と，その行列上の完全マッチング（行から列へのある割当）が与えられた時，適当な行置換及び列置換によりこれらのマッチングの要素を重み行列上の対角要素とすることができる．本文では，この行置換及び列

置換に対して次のような拘束を課すことを考える．

拘束：　互いに素な連続する行（あるいは列）の系列がいくつか与えられた時，各系列に属する行（あるいは列）は，行（あるいは列）置換後も連続しており，かつその順序はもとの順序と同じであるかあるいは反転したものとなっている．

例えば，図１(a)の5×5の行列において，行3, 4及び列3, 4, 5に拘束が課せられており，従って，行置換後も行3, 4は互いに隣接していなければならず，列置換後も列3, 4, 5は連続しており，かつその順序は3, 4, 5かあるいは5, 4, 3でなければならない．

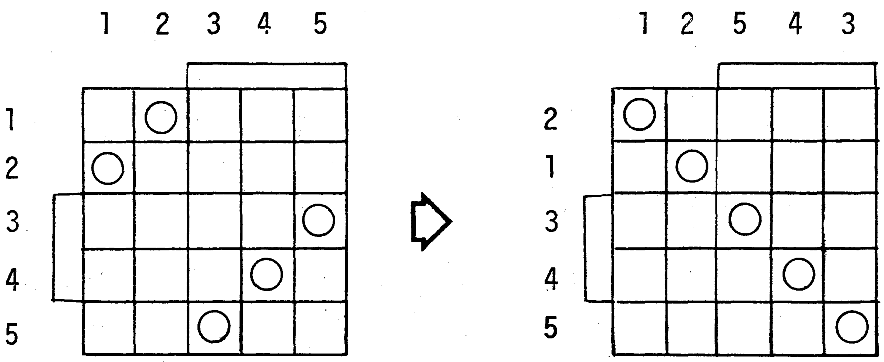

図１(a)

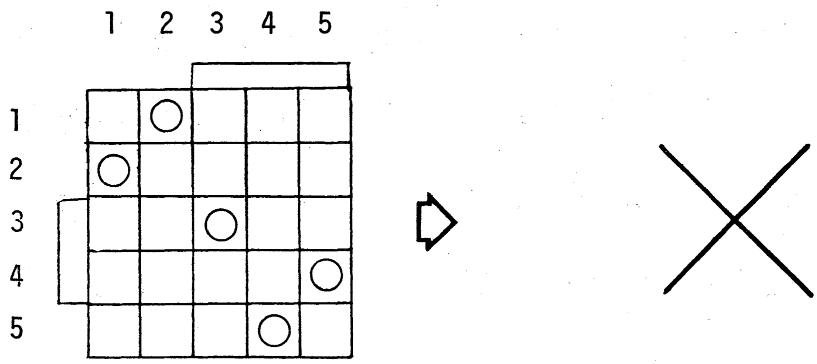

図１(b)

このような拘束を満たす行置換及び列置換だけを考えると，いくつかのマッチングに対しては，そのマッチング要素を対角要素とすることができなくなる．例えば，図１(a)

において○印で示されるマッチングに対しては，拘束を満たしつつ各要素を対角要素とすることはできるが，図1(b)についてはできない．

本文では，拘束を満たす行置換及び列置換によりマッチング要素を対角要素とすることのできる完全マッチングのうちで，マッチング要素の重みの最大値もしくは総和を最小とするものを見い出す問題の計算複雑度について考察する．この問題は，文献(3)において，静止衛星システム間の周波数配置問題への応用に関連して提起されたものである．

2．諸定義

$n \times n$ の重み行列 $W=[w(i,j)]$ において，行番号の集合を $R \triangleq \{i \mid 1 \leq i \leq n\}$，列番号の集合を $C \triangleq \{j \mid 1 \leq j \leq n\}$ とし，完全マッチングを R から C への1対1対応 $f: R \to C$ により表わすと，マッチング要素は $w(i, f(i))$ $(1 \leq i \leq n)$ と書ける．また，行置換を $\mu: R \to R$，列置換を $\nu: C \to C$ と書き，拘束が課せられる行及び列の系列を互いに素な連続する行番号の系列 R_k の族 $\mathcal{R} \triangleq \{R_1, R_2, \cdots, R_r\}$ 及び互いに素な連続する列番号の系列 C_ℓ の族 $\mathcal{C} \triangleq \{C_1, C_2, \cdots, C_c\}$ を用いて表わす．この時，本文で考察する拘束を入れた割当問題は次のような判定問題として定式化できる．

拘束を入れた割当問題RA1（RA2）：　重み行列$W=[w(i,j)]$，行番号の系列の族$\mathcal{R}$，列番号の系列の族$\mathcal{C}$，及び整数Bが与えられた時，次の2つの条件を満たす1対1対応$f:R\to C$が存在するか．

(i)　前述の拘束を満たす行置換μ及び列置換νで，$\mu(i)=\nu(f(i))$　$(1\leq i\leq n)$とする（即ち，各$w(i,f(i))$を対角要素にもってくる）ものが存在する．

(ii)　$\max_i\ [w(i,f(i))]\ \leq\ B$　（RA1の場合），

$\sum_i\ [w(i,f(i))]\ \leq\ B$　（RA2の場合）．

容易に分るように，$\mathcal{R}$あるいは$\mathcal{C}$のいずれか一方が空の場合には，任意の割当fに対して割当要素$w(i,f(i))$を対角要素とするような拘束を満たす行置換μ及び列置換νが存在するから，この問題を$O(n^3)$の計算時間で解くアルゴリズムがある．そこで，以下では，$\mathcal{R}\neq\phi$かつ$\mathcal{C}\neq\phi$と仮定する．

3．拘束を入れた割当問題の計算複雑度

前章で定式化した拘束を入れた割当問題に対して，次の2つの命題が成立する．

命題1：　問題RA1及びRA2は，$|\mathcal{C}|=1$であっても強NP完全[(4)]である．

＜証明＞　良く知られたNP完全問題X3C（EXACT COVER

BY 3-SETS)[4]が，問題RA1（あるいはRA2）に多項式時間変換可能（$X3C \propto RA1$ あるいは $X3C \propto RA2$）であることを証明する．

［X3C］： 集合 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_{3q}\}$ と，X の丁度3個の要素からなる部分集合 S_k の族 $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \cdots, S_p\}$ が与えられた時，(1) $\bigcup_{S \in \mathcal{S}'} S = X$，(2) $S_i \cap S_j = \phi$ （$S_i, S_j \in \mathcal{S}'$, $i \neq j$） を満足するような $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ が存在するか．

X3C の任意の個別問題 Q_{X3C} に対して，次のような問題RA1（あるいはRA2）の個別問題 Q_{RA} を考える．即ち，$n \triangleq 3p+2$，$\mathcal{R} = \{R_k \mid 1 \leq k \leq p,\ R_k = (3k-2, 3k-1, 3k)\}$，$\mathcal{C} = \{C_1 \mid C_1 = (3q+1, 3q+2, \cdots, 3p+2)\}$ とし，問題X3C の集合 X の各要素 x_j を $n \times n$ の重み行列 $W = [w(i,j)]$ の列 j（$1 \leq j \leq 3q$）に，$\mathcal{S}$ の各要素 S_k を $R_k \in \mathcal{R}$ に（即ち W の行 $3k-2, 3k-1, 3k$ に）対応させる．さらに，各 S_k に対応するこれらの行の重み $w(i,j)$ は，$S_k = \{x_\alpha, x_\beta, x_\gamma\} \subset X$ とすれば，

$$w(3k-2, j) \triangleq \begin{cases} 0 & (j = \alpha), \\ 1 & (3q+1 \leq j \leq 3p+2), \\ n+1 & (\text{それ以外の時}), \end{cases}$$

$$w(3k-1, j) \triangleq \begin{cases} 0 & (j = \beta), \\ 1 & (3q+1 \leq j \leq 3p+2), \\ n+1 & (\text{それ以外の時}), \end{cases}$$

$$w(3k, j) \triangleq \begin{cases} 0 & (j = \gamma), \\ 1 & (3q+1 \leq j \leq 3p+2), \\ n+1 & (\text{それ以外の時}), \end{cases}$$

と定め，S_kに対応しない残りの行 $3p+1$ 及び $3p+2$ の重みは，

$$w(3p+1, j) \triangleq \begin{cases} 1 & (j = 3q+1), \\ n+1 & (\text{それ以外の時}), \end{cases}$$

$$w(3p+2, j) \triangleq \begin{cases} 1 & (j = 3p+2), \\ n+1 & (\text{それ以外の時}), \end{cases}$$

と定める．整数Bの値は，問題RA1の場合にはB=1（RA2の場合にはB=n）とする．例えば，図2(a)に示されるX3Cの個別問題に対して，図2(b)に示すような問題RA1（あるいはRA2）の重み行列Wを生成する．

この変換がpの多項式（pの2乗）時間で行なえることは明らかなので，以下では，個別問題Q_{RA}が求める1対1対応fを持つ時かつその時に限り，問題Q_{X3C}が解$\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$を持つことを示す．

まず，Q_{X3C}が解$\mathcal{S}'$を持つと仮定する．この時，$\mathcal{S}'$に属す各部分集合$S_k = \{x_\alpha, x_\beta, x_\gamma\} \in \mathcal{S}'$に対応する$R_k \in \mathcal{R}$の各行$3k-2$, $3k-1$,

$X = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \}$ $(q = 2)$

$\mathcal{S} = \{ S_1, S_2, S_3 \}$ $(p = 3)$

$S_1 = \{ x_2, x_3, x_4 \}$

$S_2 = \{ x_1, x_2, x_3 \}$

$S_3 = \{ x_1, x_5, x_6 \}$

図2(a) 問題X3Cの個別問題

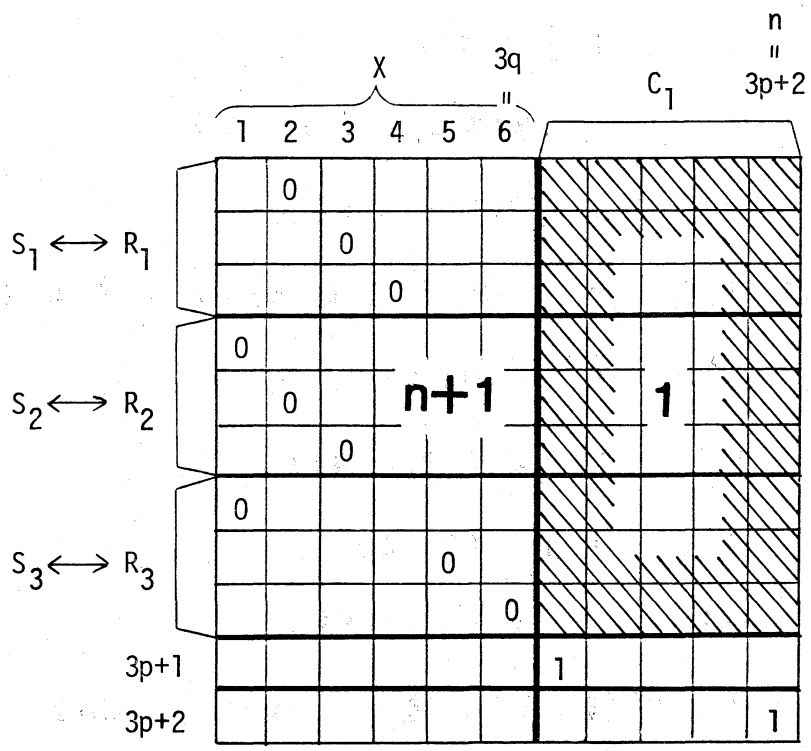

図2(b)　(a)に対する RA1(RA2) の問題 Q_{RA}.

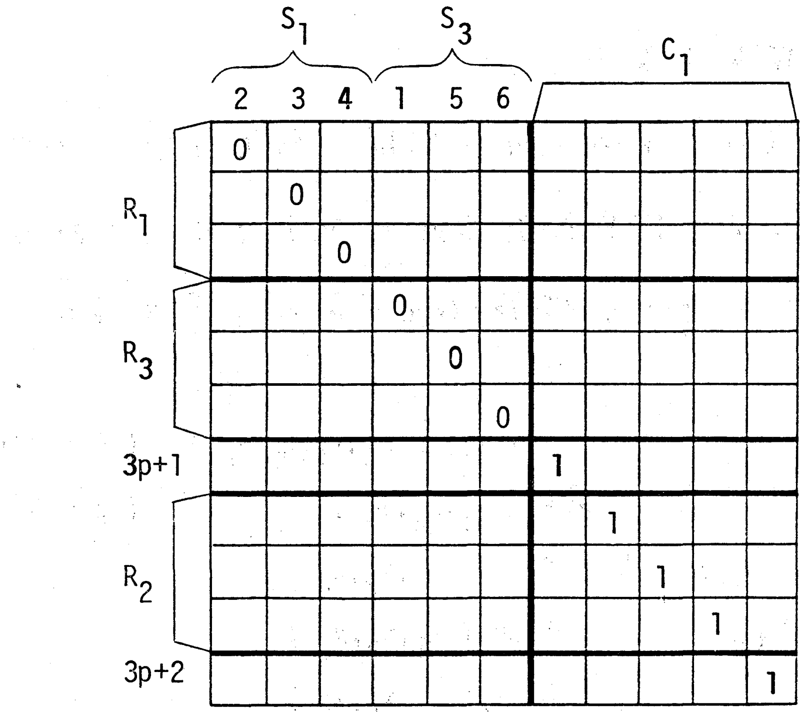

図２（c）

$3k$ に対しては，f の値を，$f(3k-2)=\alpha$，$f(3k-1)=\beta$，$f(3k)=\gamma$ と定め，さらに，行 $3p+1$ 及び $3p+2$ に対しては，$f(3p+1)=3q+1$，$f(3p+2)=3p+2$ と定める．残りの δ' に属さない δ の各要素 S_h に対応する R_h の各行 i を，第 $3q+2$ 行から第 $3p+1$ 行まで順に行置換 μ により置いたとすれば，$f(\mu(i))=\mu(i)$ と定める．このように定められた f は，明らかに問題 RA1（RA2）の条件 (ii) を満た

す、さらに，図2(c)に示すように，初めに$\mathcal{S}'$に属する要素S_kに対応するR_kの行を，次に行$3p+1$を，その下に$\mathcal{S}'$に属さない要素S_hに対応するR_hの行を，最後に行$3p+2$を置くように行置換μを行ない，列$1\sim3q$を適当に置換すれば，各要素$w(i,f(i))$を対角要素とすることができるので，fは条件(i)も満たし，Q_{RA}の解となっていることが分る．

逆に，Q_{RA}が解fを持つと仮定すると，条件(ii)より，$f(3p+1)=3q+1$，$f(3p+2)=3p+2$でなければならない．また，行$3k-2, 3k-1, 3k$に対しては行の拘束$R_k\in\mathcal{R}$ $(1\le k\le p)$があり，かつ列の拘束$C_1=(3q+1, 3q+2, \cdots, 3p+2)$の両端の列には行$3p+1$及び$3p+2$が割当てられているので，$f$が条件(i)を満たすためには，① $1\le f(3k-2), f(3k-1), f(3k)\le 3q$，あるいは，② $3q+2\le f(3k-2), f(3k-1), f(3k)\le 3p+1$でなければならない．①の場合には，条件(ii)より，$w(3k-2, f(3k-2))=w(3k-1, f(3k-1))=w(3k, f(3k))=0$であるから，①のような割当を持つ$R_k$に対応する$S_k\in\mathcal{S}$を集めて$\mathcal{S}'$を作れば，$\mathcal{S}'$は$Q_{X3C}$の解となっていることが分る(図2(c)参照)．

従って，問題X3Cは問題RA1(RA2)に多項式時間変換可能である．一方問題RA1(RA2)がNPに属することは明らかなので，RA1(RA2)はNP完全であり，さらに，この証明過程より，問題RA1(RA2)の部分問題で，重み$w(i,j)$

や整数Bの大きさを問題の規模以下（$n+1$）と制限したものもNP完全であることが分るから命題が成立する．

（証明終）

命題2： 問題RA1及びRA2は，$\mathcal{C}=\{(1,2,\cdots,n)\}$（列番号の集合C全体に対して，1つの拘束が課せられている）であっても強NP完全である．

ここでは，省略するが，NP完全問題3-Part$_2$[5]が，問題RA1及びRA2に多項式時間変換可能であることが証明できる[5]．なお，命題1及び2は，$\mathcal{C}$を$\mathcal{R}$に置き換えても成立する．但し，その場合には列を行に，CをRに変える．

4．外部端子割当問題への応用

通常図3に示すように，LSIチップ等の実装モジュール上には，内部の回路の信号を外部に取り出すことのできる外部端子がチップ周辺に並んでいる．外部端子割当問題とは，外部に接続すべき信号の集合を$X \triangleq \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，外部端子の

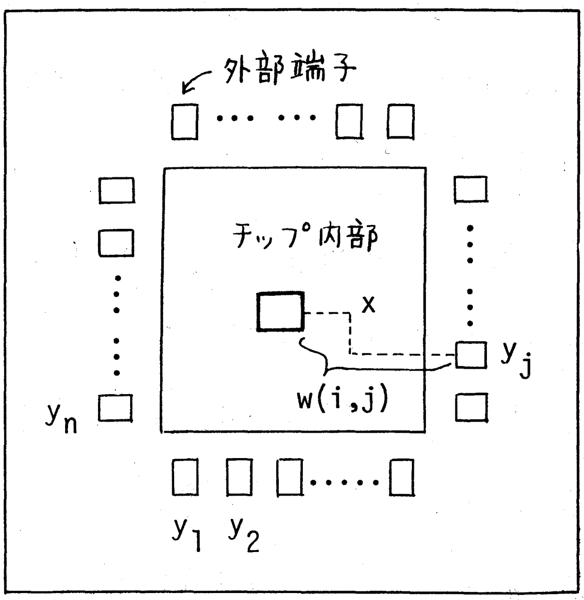

図3　LSIチップ

集合を$Y \triangleq \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$とした時，各信号$x_i \in X$をどの外部端子$y_j \in Y$から外部に取り出すべきかを決定する問題で，集合$X$から集合$Y$への1対1対応$f: X \to Y$のうちで，ある評価規準のもとで最適なものを見い出す問題といえる．この割当問題に対して次のような制約が与えられることがある．

制約： ある信号の系列（マクロ信号）がいくつか与えられた時，各系列に含まれる信号は，互いに隣接する外部端子にその系列と同順もしくは逆順に割当てる．

このような制約は，例えば，アドレスバス，データバス，入出力ポートなどに含まれる信号に対して与えられる．この制約のある外部端子割当問題は，次のような拘束を入れた割当問題RA1（あるいはRA2）として定式化できる．即ち，各信号$x \in X$に対して重み行列$W=[w(i,j)]$ $(1 \leq i,j \leq n)$の各行を，各外部端子$y_j \in Y$に対して各列jを対応づけ，行iに対応する信号xを列jに対応する外部端子y_jに割当てるのに要するコストを$w(i,j)$とする．但し，各マクロ信号に属する信号は，その系列順に連続する行に対応づけ，それらの連続する行は拘束の与えられた行の系列$R_k \in \mathcal{R}$とする．さらに，すべての列から成る系列$(1, 2, \cdots, n)$に対して拘束を与える（$\mathcal{C} = \{(1, 2, \cdots, n)\}$）．重み$w(i,j)$で表わされるコストの一例としては，外部端子$y_j$と行$i$に対応する信号を持

つチップ内部のうちで最もx_iに近いものとの間の仮想配線長などが挙げられる.

このように定式化した問題RA1（あるいはRA2）を解けば，行の拘束$\mathcal{R}=\{R_1, R_2, \cdots, R_r\}$（$r$はマクロ信号の個数）及び列の拘束$\mathcal{C}=\{(1, 2, \cdots, n)\}$により，すべてのマクロ信号が連続した外部端子に割当てられた最適な外部端子の割当が得られる.

この問題は，我々が試作しているゲートアレイ方式LSIの自動レイアウトシステムの構築過程で生じたが，命題7から分るように，これに対する効率の良いアルゴリズムを見い出すことは困難であると考えられる．そこで，我々のシステムでは，チップ内部の回路素子（ゲート）の配置（割当）技法と同様な発見的な手法を用いて外部端子割当問題を解くことにした.

5．むすび

本文では，拘束を入れた割当問題の計算複雑度について，考察を行なった．その結果，行あるいは列のいずれか一方の拘束がない（$\mathcal{R}=\phi$ あるいは $\mathcal{C}=\phi$）場合には，この問題は，$O(n^3)$の計算時間で解けるが，行及び列のどちらにも拘束がある場合には，そのいずれか一方の拘束が唯1つ（$|\mathcal{R}|=1$

あるいは $|e|=1$)であっても強NP完全であることが分った.

参考文献

(1) E.L.Lawler,"Combinatorial Optimization: Networks and Matroids" Holt,Rinehart and Winston,New York(1976).

(2) N.Tomizawa,"On some techniques useful for solution of transportation network problems",Networks,vol.1,pp.173-194(1971).

(3) 遠藤,大附,平山,"拘束を入れた割り当て問題について",信学技報,CAS80-153,pp.63-68(1981).

(4) M.R.Garey and D.S.Johnson,"Computers and Intractability: A Guide to Theory of NP-completeness",W.H.Freeman and Company,San Francisco(1979).

(5) 木本,築山,白川,尾崎,"外部端子割当問題の計算複雑度について",信学技報,CAS82-151,pp.73-78(1983).