

ある種の $P_2(\mathbb{C})$ の分岐被覆

東京都立大学 福井 敏純

(Toshisumi Fukui)

$P_2(\mathbb{C})$ を複素射影平面, $B \subset P_2(\mathbb{C})$ を平面被約曲線とする。

定義 正規曲面 X が B で分岐する $P_2(\mathbb{C})$ の有限被覆であるとは、次が成り立つこと

(i) 全射有限正則写像 $\pi: X \rightarrow P_2(\mathbb{C})$ が存在して

(ii) $X_0 = \pi^{-1}(P_2(\mathbb{C}) - B)$ とおくとき, 制限写像

$\pi|_{X_0}: X_0 \rightarrow P_2(\mathbb{C})$ が不分岐被覆

このとき $\pi: X \rightarrow P_2(\mathbb{C})$ を被覆写像とよぶ。

定義 $\pi: X \rightarrow P_2(\mathbb{C})$ を被覆写像とする。

$\forall x \in X$ に対して分岐指数 $b(x)$ を次で定義する。

V を $f(x)$ の十分小さい近傍, U を x を含む $f^{-1}(V)$ の連結成分とするとき

$$b(x) := \#(\{\pi^{-1}(y) \mid y \in V - B\} \cap U)$$

このとき、直ちに次が従う。

$$b(x) > 1 \quad \implies \quad f(x) \in B$$

以後 $\pi|_{X_0} : X_0 \rightarrow P_2(\mathbb{C})$ の被覆変換群 G が、 X に複素同型群として、次の可換図式をみたすように作用していると仮定する。

$$\begin{array}{ccc} G \times X_0 & \longrightarrow & X_0 & \text{被覆変換} \\ \downarrow \text{id}_G \times \iota & & \downarrow \iota & \\ G \times X & \longrightarrow & X & (\iota: X_0 \rightarrow X \text{ は包含写像}) \end{array}$$

このとき次のような問題を考えよう。

" $P_2(\mathbb{C})$ の B で分岐する有限被覆 X の特異点解消 \tilde{X} の曲面としての構造 (小平次元, コホモロジー群等) と 曲線 B の構造 (既約成分の個数, その次数, 種数, 及び特異点) の間の関係を見つけること。"

本稿では、ある特別な場合にこの問題の答えを出すことを目的とする。

少し記号を準備する。

$\pi: X \rightarrow P_2(\mathbb{C})$ を有限分岐被覆

$B \subset P_2(\mathbb{C})$ を π の分岐軌跡

$\rho: \tilde{X} \rightarrow X$ を最小特異点解消

$R = (\pi \circ \rho)^{-1}(B)_{\text{red}}$ とする

$B = B_1 + \dots + B_s$ を既約分解

$\text{Sing } B = \{P_1, \dots, P_l\}$

$E_i = (\pi \circ \rho)^{-1}(P_i)_{\text{red}} \quad (i=1, \dots, l)$

$E_i = E_{i,1} + \dots + E_{i,r_i}$ を既約分解

$R = E_1 + \dots + E_l$ と $(\pi \circ \rho)^{-1}(B_j)_{\text{red}}$ の共通成分を

R_j , $R_j = R_{j,1} + \dots + R_{j,r_j}$ をその既約分解とする。

このとき

$$R = R_1 + \dots + R_s + E_1 + \dots + E_l$$

$$= R_{1,1} + \dots + R_{1,r_1} + \dots + R_{s,1} + \dots + R_{s,r_s} + E_{1,1} + \dots + E_{1,r_1} + \dots + E_{l,r_l} \quad (\text{既約分解})$$

$x \in X$ の等方部分群 $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$

とするとき X の因子 D に対して generic な $x \in D$ に対しては G_x は同型だからその群を G_D と書くことにする。

命題 A X 上の群 G の作用は \tilde{X} へ拡張できる。

\Leftrightarrow 次の可換図式をみたす群 G の曲面 \tilde{X} への作用が存在する。

$$\begin{array}{ccc} G \times \tilde{X} & \longrightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow \text{id} \times p & & \downarrow p \\ G \times X & \longrightarrow & X \end{array}$$

証明. $\forall g \in G$ に対して合成写像

$$\tilde{X} \xrightarrow{p} X \xrightarrow{g} X \quad \text{を考える.}$$

\tilde{X} は非特異で $g \circ p$ は固有写像だから

$g \circ p: \tilde{X} \rightarrow X$ は X の特異点解消である。

\tilde{X} は正規曲面 X の最小特異点解消だから

$$\exists \tilde{g}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X} \quad \text{s.t.} \quad p \circ \tilde{g} = g \circ p.$$

よって、群 G は \tilde{X} 上の作用に拡張される。 \square

以後、曲面 \tilde{X} に次の条件を仮定する。

$$\textcircled{1} \quad H^0(\tilde{X}, \Omega_{\tilde{X}}') \neq 0$$

$$\textcircled{2} \quad \wedge^2 H^0(\tilde{X}, \Omega_{\tilde{X}}) = 0.$$

条件 $\textcircled{1} \textcircled{2}$ をみたす曲面の例

イ) \tilde{X} が非有理線織曲面に双有理同値なとき

ロ) \tilde{X} が超楕円曲面に双有理同値なとき

条件 $\textcircled{1} \textcircled{2}$ をみたせば、Albanese 写像

$$\theta: \tilde{X} \longrightarrow \text{Alb}(\tilde{X}) = H^0(\tilde{X}, \Omega_{\tilde{X}}')^* / H_1(\tilde{X}, \mathbb{Z})$$

の像は 1 次元である。

$\theta(\tilde{X})$ の正規化を Γ とおくと fibering

$$\theta: \tilde{X} \rightarrow \Gamma$$

が存在する。

$\theta(\tilde{X})$ が 1次元であるから、 \tilde{X} 上の任意の 1形式 ω を $\theta: \tilde{X} \rightarrow \Gamma$ の fibre F 上に制限すると恒等的に 0 に等しい。

命題 B 群 G の曲面 \tilde{X} への作用は fibering $\theta: \tilde{X} \rightarrow \Gamma$ を保つ。即ち

$$\forall g \in G, \forall y \in \Gamma, \exists y' \in \Gamma \text{ s.t. } g(\theta^{-1}(y)) = \theta^{-1}(y')$$

証明。

固有写像定理より $g(\theta^{-1}(y))$ は 1点又は Γ であるから $g(\theta^{-1}(y)) = \Gamma$ として矛盾を導く。

η を Γ 上の 0でない 1形式とする。すると $(\theta \circ g)^*\eta$ は \tilde{X} 上の 1形式で $\theta^{-1}(y)$ 上 0でない。これは矛盾。□

従って 群 G は曲線 Γ に作用してゐる。

$$G \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$$

$$\downarrow \text{id} \times \theta \quad \downarrow \theta$$

$$G \times \Gamma \rightarrow \Gamma$$

$$N = \{g \in G \mid g \cdot y = y \quad \forall y \in \Gamma\}$$

とおくと、 N は G の正規部分群である。

$$\text{命題 C} \quad G_{R_{ij}} \not\subset N \iff \exists y \in \Gamma, \text{ s.t. } R_{ij} \subset \theta^{-1}(y)$$

証明. F を $\theta: X \rightarrow \Gamma$ の general fiber とする。

F は generic だから $R_{ij} \cdot F \geq 0$.

$R_{ij} \cdot F > 0$ と仮定する。

$$\exists z \in R_{ij} \cap F.$$

$$G_{R_{ij}} \not\subset N \quad \text{より} \quad \exists g \in G_{R_{ij}}, g \notin N.$$

$$z \in R_{ij} \quad \text{より} \quad g(z) = z$$

$$g \notin N \quad \text{より} \quad g(z) \notin F$$

これは $z \in R_{ij} \cap F$ に矛盾 によって $R_{ij} \cdot F = 0$.

$$R_{ij} \text{ は既約だから} \quad \exists y \in \Gamma, R_{ij} \in \theta^{-1}(y) \quad \square$$

同様にして、 $\theta: X \rightarrow \Gamma$ の fiber F に対して、

命題 D $G_{R_{ij}} \subset N$ のとき

$$R_{ij} \cdot F = 0 \iff \exists y \in \Gamma, \text{ s.t. } R_{ij} \subset \theta^{-1}(y)$$

命題E $P_2(\mathbb{C})$ の曲線族 $\mathcal{L} = \{ \pi \circ \rho \circ \theta^{-1}(y) \mid y \in \Gamma \}$
 は、線型束 (linear pencil) をなす。

証明.

$P_2(\mathbb{C})$ 上の general line の $\pi \circ \rho$ による引き戻しを
 H とする。 H の genericity より $\theta(H) = \Gamma$ 。
 G の作用は H を保つから 写像

$$H/G \rightarrow \Gamma/G$$

が定義される。 $H/G \cong P_1(\mathbb{C})$ より $\Gamma/G \cong P_1(\mathbb{C})$
 よって 曲線族 \mathcal{L} は $P_1(\mathbb{C})$ で parametrize される。

因子 H は、写像 $\pi \circ \rho: \tilde{X} \rightarrow P_2(\mathbb{C})$ を定義するから
 \mathcal{L} の元は $\alpha = H \cdot \theta^{-1}(y)$ 次の曲線である。

$$Y = \tilde{X}/G \text{ とおく。}$$

$\bar{\theta}: Y \rightarrow \Gamma/G = P_1(\mathbb{C})$ は全射である。

$\phi: \tilde{Y} \rightarrow Y$ を特異点解消。

$\tilde{Y} \xrightarrow{\phi} Y \xrightarrow{\bar{\theta}} \Gamma/G = P_1(\mathbb{C})$ の合成写像を $\gamma: \tilde{Y} \rightarrow P_1(\mathbb{C})$

$\tilde{Y} \xrightarrow{\phi} Y = \tilde{X}/G \rightarrow X/G \cong P_2(\mathbb{C})$ の合成写像を

$$\sigma: \tilde{Y} \rightarrow P_2(\mathbb{C}) \text{ とかく。}$$

$\sigma: \tilde{Y} \rightarrow P_2(\mathbb{C})$ は 双有理正則写像だから。

$\sigma: \tilde{Y} \rightarrow P_2(\mathbb{C})$ は有限回の blow-up の合成でかける。

E を $\sigma: \tilde{Y} \rightarrow P_2(\mathbb{C})$ の例外集合, $E = \sum_{i=1}^r E_i$ と

既約分解とすると、整数 e_1, \dots, e_n が存在して、

$$\gamma^* \mathcal{O}_{P_1(\mathbb{C})}(1) = \sigma^* \mathcal{O}_{P_2(\mathbb{C})}(a) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}} \left(\sum_{i=1}^n e_i E_i \right)$$

とかける。よって

$$\begin{aligned} \sigma_* \gamma^* \mathcal{O}_{P_1(\mathbb{C})}(1) &= \sigma_* \sigma^* \mathcal{O}_{P_2(\mathbb{C})}(a) \otimes \sigma_* \mathcal{O}_{\tilde{Y}} \left(\sum_{i=1}^n e_i E_i \right) \\ &= \mathcal{O}_{P_2(\mathbb{C})}(a) \otimes \sigma_* \mathcal{O}_{\tilde{Y}} \left(\sum_{i=1}^n e_i E_i \right) \end{aligned}$$

十分小さい $P_2(\mathbb{C})$ の開集合 U に対して、

$$\begin{aligned} \Gamma(U, \sigma_* \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(\sum e_i E_i)) &= \Gamma(\sigma^{-1}(U), \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(\sum e_i E_i)) \\ &\hookrightarrow \Gamma(\sigma^{-1}(U) - \varepsilon, \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(\sum e_i E_i)) \quad (\text{制限写像}) \\ &\hookrightarrow \Gamma(\sigma^{-1}(U) - \varepsilon, \mathcal{O}_{\tilde{Y}}) \\ &\simeq \Gamma(U - \sigma(\varepsilon), \mathcal{O}_{P_2(\mathbb{C})}) \\ &\simeq \Gamma(U, \mathcal{O}_{P_2(\mathbb{C})}) \quad (\because \text{Hartogs の拡張定理}) \end{aligned}$$

だから

$$\sigma_* \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(\sum e_i E_i) \hookrightarrow \mathcal{O}_{P_2(\mathbb{C})}.$$

従って

$$\sigma_* \gamma^* \mathcal{O}_{P_1(\mathbb{C})}(1) \xrightarrow{\iota} \mathcal{O}_{P_2(\mathbb{C})}(a) \quad \text{を得る。}$$

よって $\iota^*: H^0(\sigma_* \gamma^* \mathcal{O}_{P_1(\mathbb{C})}(1)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{P_2(\mathbb{C})}(a))$ が単射。

$$\text{i.e. } \iota^*: H^0(\tilde{Y}, \gamma^* \mathcal{O}_{P_1(\mathbb{C})}(1)) \hookrightarrow H^0(\mathcal{O}_{P_2(\mathbb{C})}(a))$$

$$\text{一方 } \gamma^*: H^0(P_1(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{P_1(\mathbb{C})}(1)) \hookrightarrow H^0(\tilde{Y}, \gamma^* \mathcal{O}_{P_1(\mathbb{C})}(1))$$

$$\text{より } \iota^* \circ \gamma^*: H^0(P_1(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{P_1(\mathbb{C})}(1)) \hookrightarrow H^0(P_2(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{P_2(\mathbb{C})}(a))$$

$$\text{写像の構成法より } \mathcal{L} = \mathcal{P}(\iota^* \circ \gamma^*(H^0(P_1(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{P_1(\mathbb{C})}(1))))$$

よって $\mathcal{L} \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}_2(\mathbb{C}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{C})}(a)))$.

従って \mathcal{L} は線型系である。 \square

定義. X が $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ の n 次巡回被覆であるとは.

(i) 被覆変換群 G が $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に同型で.

(ii) 分岐曲線 B の generic な点での逆像における等方部分群が $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に同型

のときとする.

$\pi: X \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ が n 次巡回被覆 $\rho: \tilde{X} \rightarrow X$ を特異点解消とするととき、次が成り立つ.

定理'

(i) \tilde{X} が非有理線織曲面に双有理同値なら次の条件をみたす線型束 (pencil) \mathcal{L} が存在する.

1) \mathcal{L} の generic な元は既約有理曲線.

2) $\exists D_1, \dots, D_t \in \mathcal{L}$ s.t. $B \subset D_1 \cup \dots \cup D_t$

3) $\omega_1: P_1 \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ を \mathcal{L} の各底点での blow-up.

\mathcal{L}_1 を \mathcal{L} の ω_1 による固有像のつくる線型束とする。帰納的に $\omega_j: P_{j+1} \rightarrow P_j$ を \mathcal{L}_j の各底点での blow-up. \mathcal{L}_{j+1} を \mathcal{L}_j の固有像のつくる線型束とする。 \mathcal{L}_k を 底点自由. $\omega = \omega_k \circ \dots \circ \omega_1$ とする.

$\omega^*B = \sum e_i E_i + B'$ (但し B' は ω による固有像, E_i を $\omega: P_k \rightarrow P_2(\mathbb{C})$ の例外集合の各既約因子) と書いたとき, $D \in \mathcal{L}$ に対して

$$D \cdot E_i \neq 0 \quad \Rightarrow \quad m|e_i.$$

(ii) 逆に (i) の (ii) をみたすような線型束 \mathcal{L} が存在するような B で分岐する $P_2(\mathbb{C})$ の m 次巡回被覆の特異点解消は、線織曲面に双有理同値である。

証明

(i) \tilde{X} は非有理線織曲面に双有理同値だから、代数曲線 Γ と写像 $\varphi: \tilde{X} \rightarrow \Gamma$ が存在して φ の general fibre は $P_1(\mathbb{C})$ に同形。

命題 A より 巡回群 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ は曲面 \tilde{X} に作用し、更に、

命題 B より 巡回群 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ は曲線 Γ にも作用して Γ を

$$\Gamma = \{ g \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \mid g \cdot y = y \quad \forall y \in \Gamma \}$$

は $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の真部分群である。

(ii) $N = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ とすると $\tilde{X}/N \xrightarrow{\varphi} \Gamma$ が well-defined. \tilde{X}/N は $P_2(\mathbb{C})$ に双有理同値.

一方 $\text{genus } \Gamma \geq 1$. これは矛盾.

3頁の記号の下で、各 R_j は X の既約因子、 X が $P_2(\mathbb{C})$

の巡回被覆. だから $G_{R_j} = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. ($\forall j$).

よって命題 C より R_j は $p: \tilde{X} \rightarrow \Gamma$ の fibre に属す.

$\mathcal{L} = \{ \pi \circ p \circ p^{-1}(y) \mid y \in \Gamma \}$ とおくと, 命題 E より

\mathcal{L} は $P_2(\mathbb{C})$ の線型束で条件 1) 2) をみたす.

$\pi \circ p|_{R_j}: R_j \rightarrow B_j$ の写像度は 1 だから

$\pi \circ p|_{p^{-1}(y)}: p^{-1}(y) \rightarrow \pi \circ p \circ p^{-1}(y)$ の写像度も 1.

従って群 N は単位群である.

$\hat{X} = P_k \times_{P_2(\mathbb{C})} \tilde{X}$ (fibre 積) とおくと, generic な

$D \in \mathcal{L}_k$ の $\pi \circ p$ による逆像は, m 個の $P_1(\mathbb{C})$ の disjoint

和になる. 一方 E' 上の generic な点の近傍上の $X \times_{P_2(\mathbb{C})} P_k$

の局所座標環は $\mathbb{C}\{x, y, z\}/(z^n - x^e)$ に同型だから

D の $\pi \circ p$ による逆像が m 個の disjoint $P_1(\mathbb{C})$ であるためには $m|e$ しなければならない.

(ii) 1) ~ 1) をみたす線型束が存在したとする.

\mathcal{L}_k は底点自由だから

写像 $\varphi: P_k \rightarrow P_1(\mathbb{C})$ が well-defined

条件 1) より general な $D \in \mathcal{L}_k$ の $\tilde{X} \times_{P_2(\mathbb{C})} P_k \xrightarrow{\tilde{\pi}} P_k$

による逆像は, m 個の disjoint $P_1(\mathbb{C})$

$\Gamma = \{ D_{i,\lambda} \mid D_{1,\lambda} + \dots + D_{n,\lambda} \in \tilde{\pi}^{-1}\mathcal{L}_k \quad \lambda \in P_1(\mathbb{C}) \}$

とおくと $\Gamma \rightarrow P_1(\mathbb{C})$ は m 重被覆で, 線型系 $\tilde{\pi}^{-1}\mathcal{L}_k$

が定義する写像 $\pi: \tilde{X} \times_{P_2(\mathbb{C})} P_k \rightarrow \Gamma$ の general fibre は
 非特異 $P_1(\mathbb{C})$ に同形. よって $\tilde{X} \times_{P_2(\mathbb{C})} P_k$ は線織曲面
 に双有理同値. \square

注) P.4 の条件 ①② をみたす \tilde{X} について同様の事実が成立.

条件 ②) を次のように定義する.

②) 記号 $\omega: P_k \rightarrow P_2(\mathbb{C})$, E_i 等は ①) と同様とする.

$D \in \mathcal{L}_k$ に対して

$$2n - \sum (m_i - (n, e_i)) D \cdot E_i = 0 \quad \text{が成り立つ.}$$

このとき ①) の証明と同様にして、次が証明できる.

" 条件 ①) ②) をみたす線型束 \mathcal{L} が存在するような B で分岐
 するような巡回 n 重被覆の特異点解消は楕円曲面に双有理
 同値である。"

命題 F.

$B \subset P_2(\mathbb{C})$ で分岐する $P_2(\mathbb{C})$ の 2 重被覆の特異点解消を \tilde{X}
 とする. このとき

$$H^0(\tilde{X}, \Omega_{\tilde{X}}) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \wedge^2 H^0(\tilde{X}, \Omega_{\tilde{X}}) = 0$$

証明. g を被覆変換群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の生成元とする.

$\eta \in H^0(\tilde{X}, \Omega_{\tilde{X}})$, $\eta \neq 0$ とすると

$$g^* \eta = \eta \quad \text{又は} \quad g^* \eta = -\eta$$

$g^*\eta = \eta$ とすると η は $\tilde{X}/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上の 1 形式を定義するが、 $\tilde{X}/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は有理曲面と双有理同値だから

$\eta \equiv 0$ とする。よって $\eta \neq 0$ ならば $g^*\eta = -\eta$ 。

$\omega_1, \omega_2 \in H^0(\tilde{X}, \Omega_{\tilde{X}}^1)$ に対して、 $(\omega_1 \neq 0, \omega_2 \neq 0)$

$$g^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = g^*\omega_1 \wedge g^*\omega_2 = (-\omega_1) \wedge (-\omega_2) = \omega_1 \wedge \omega_2,$$

よって $\omega_1 \wedge \omega_2$ は $\tilde{X}/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上の 2 形式を定義する。

$\tilde{X}/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は有理曲面に双有理同値だから

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \equiv 0. \quad \square$$

命題 F と定理の証明を合わせると次の系を得る。

系 (de Franchis)

$\pi: X \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ を B で分岐する 2 重被覆

$\rho: \tilde{X} \rightarrow X$ を特異点解消とする。

$H^0(\tilde{X}, \Omega_{\tilde{X}}^1) \neq 0$ ならば、線型束 \mathcal{L} が存在して、

$$\exists D_1, \dots, D_t \in \mathcal{L} \quad \text{s.t.} \quad B \subset D_1 \cup \dots \cup D_t.$$

$$t \geq 2 \dim_{\mathbb{C}} H^0(\tilde{X}, \Omega_{\tilde{X}}^1) + 2.$$

記号 $g := \dim_{\mathbb{C}} H^0(\tilde{X}, \Omega_{\tilde{X}}^1)$.

例 1. $\mathcal{L} = \{ \text{1 点を通る直線の作る線型束} \}$ のとき

$$\forall D_1, \dots, D_{nd} \in \mathcal{L} \quad (D_i \neq D_j \quad \forall i \neq j)$$

$B = D_1 \cup \dots \cup D_{nd}$ で分岐する $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ の n 重巡回被覆 X を

つくと、 \tilde{X} は $g = \frac{1}{2}(n-1)(nd-2)$ の線織曲面になる。

例 2.

いくつかの 2 次曲線のなす線型束のとき、infinitesimal near points を

とせ、 $B_S \mathcal{L} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ とする。

$\omega_1: P_1 \rightarrow P_2(\mathbb{C})$ を P_1 中心の blow up, $E_1 = \omega_1^{-1}(P_1)$

$\omega_i: P_i \rightarrow P_{i-1}$ ($i=2, 3, 4$) を P_i 中心の blow up $E_i = \omega_i^{-1}(P_i)$

とする。 \mathcal{L} は次の 5 通りある。

イ) $P_2 \notin E_1, P_3 \in E_2, P_4 \in E_3$

ロ) $P_2 \in E_1, P_3 \in E_2, P_4 \notin E_i$ ($i=1, 2, 3$)

ハ) $P_2 \in E_1, P_3 \notin E_1 \cup E_2, P_4 \in E_3$

ニ) $P_2 \in E_1, E_1 \cup E_2, E_3, E_4$ は disjoint.

ホ) E_1, E_2, E_3, E_4 は互いに disjoint.

$D_1, \dots, D_t \in \mathcal{L}$ に対して、 $B = D_1 \cup \dots \cup D_t$ で分岐する m 重巡回被覆 X をつくる。このとき、Hurwitz の方法により

$$イ) \Rightarrow g = \dim_{\mathbb{C}} H^0(\tilde{X}, \Omega_{\tilde{X}}^1) = \frac{1}{2}(n-1)(t-2) - \frac{1}{2}(n - (n, 3t))$$

$$ロ) \Rightarrow g = \frac{1}{2}((n, t) - 1)(t-2)$$

$$ハ) \Rightarrow g = \frac{1}{2}(n-1)(t-2) - \frac{1}{2}(m - (m, t))$$

$$ニ) \Rightarrow g = \frac{1}{2}((n, t) - 1)(t-2)$$

$$ホ) \Rightarrow g = \frac{1}{2}((n, t) - 1)(t-2)$$

が成立つことがわかる。

このようにて3次曲線, 4次曲線, ... の線型束につけても
4頁の条件①②をみたす巡回被覆を11くらいでも構成でき,
その不正則数も計算可能である.

以上.

参考文献

O. Zariski

"Algebraic Surfaces." 2nd suppl. ed., Ergebnisse 61
Springer-Verlag, Heidelberg (1971)