

純情用型特異点の分類と構成

筑波大 渡辺公夫 (Kimio Watanabe)
都立大 石井志保子 (Shihoko Ishii)

完備代数多様体と n -次元で分類した (しつゝある?)
ように、正規孤立特異点もそのようなやり方で分類できる
か という事と出發点とする。

本論では (X, x) を解析空間上の正規孤立特異点の芽と
する。その次元は常に n という記号を用いて表わす。
また上記の X は、十分小さい x の Stein 近傍をも表わす。
 $f: \hat{X} \rightarrow X$ を特異点 (X, x) の resolution とすると、 (X, x)
の幾何種数 $P_g(X, x)$ と $\dim_{\mathbb{C}} R^{n-1} f_* \mathcal{O}_{\hat{X}, x}$ で定義し、これの多
重化として、渡辺 ([14]) は 多重種数 $\{\delta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ を導入した。

特異点 (X, x) が quasi-Gorenstein のとき [14] により
次の δ_m が成り立つことがわかった。

$$(i) \delta_m(X, x) = 0 \quad \text{for } \forall m \geq 1$$

$$(ii) \delta_m(X, x) = 1 \quad \text{for } \forall m \geq 1$$

(iii) $\delta_m(X, x)$ は変数 m に関して n 位の order で増大する。

ここで (X, x) が有理的であることと (i) が成立することとは同値である。

(ii) が成立するような特異点 (X, x) を純情円型と呼ぶこととできる ($P_2(X, x) = \delta_1(X, x) = 1$ からもらってくる情円型)。

$n=2$ のとき、純情円型特異点とは、simple elliptic 又は cusp であることが知られており、それぞれに美しい理論がある。

ここでは $n \geq 3$ とし、純情円型特異点を調べることにする。

§1 では、Du Bois 特異点の概念を紹介する。正規孤立特異点 (X, x) に対し、Du Bois であることと、canonical map $R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}, x} \rightarrow H^i(E, \mathcal{O}_E)$ が $\forall i > 0$ に対し同型になることと同値になる、ただし $f: \tilde{X} \rightarrow X$ は good resolution (cf. Def. 1) であり、 $E = f^{-1}(x)_{\text{red}}$ 。

§2 では、 (X, x) が quasi-Gorenstein のとき、Du Bois であることと、 $\delta_m(X, x) \leq 1$ ($\forall m \in \mathbb{N}$) と同値であることを示す。さらに good resolution $f: \tilde{X} \rightarrow X$ に対し $f^{-1}(x)_{\text{red}} = E$ を irreducible components E_i ($i=1, \dots, r$) に分解し、 $K_{\tilde{X}} = f^* K_X + \sum m_i E_i$ と表わすことに、I の (i)(ii)(iii) はそれぞれ m_i と同値。

$$(i) \Leftrightarrow m_i \geq 0 \text{ for } \forall i$$

$$(ii) \Leftrightarrow m_i \geq -1 \text{ for } \forall i, \quad m_i = -1 \text{ for } \exists i$$

$$(iii) \Leftrightarrow m_i \leq -2 \text{ for } \exists i$$

§3 では、quasi-Gorenstein 特異点の good resolution に関する基本的な事柄を準備する。

§4 では、絶情円型特異点と n 個の型に分類しその good resolution を調べ子。

§5 では、 $n \geq 2$ の次元で、それ以外の型をもつ絶情円型孤立特異点を構成する。

Def. 1. resolution $f: \tilde{X} \rightarrow X$ が good resolution であるとは、 $E = f^{-1}(0)_{\text{red}}$ が simple normal crossings divisor になること、すなわち、

Def. 2. partial resolution $f: \hat{X} \rightarrow X$ ([7]) が good partial resolution であるとは、 $E = f^{-1}(0)_{\text{red}}$ が pure dim. $n-1$ をもつ variety with simple normal crossings のことである。

§1. Du Bois 特異点達

この § では、Du Bois が導入し、Steinbrink が命名した Du Bois 特異点の概念を紹介する。

Prop. 1.1 (Du Bois [3]) 任意の \mathbb{C} 上の algebraic variety V 上

に \mathbb{P}^1 上-行す. analytic quasi-coherent sheaves の complex $(\underline{\Omega}_V^i, F)$ に次を満すものが存在する. (= \mathbb{Z} -filtration F は decreasing) 且 \mathbb{Z} 上-行す \mathbb{P}^1 上-行す derived category の中 \mathbb{Z} -unique である.

(1) $d: \underline{\Omega}_V^i \rightarrow \underline{\Omega}_V^{i+1}$ は first order differential operator \mathbb{Z} - $\text{Gr}_F \underline{\Omega}_V^i \wedge$ の induced map は \mathcal{O}_V -linear;

(2) $\underline{\Omega}_V^i$ は constant sheaf \mathbb{C} の resolution である, \mathbb{Z} - $\text{Gr}_F \underline{\Omega}_V^i$ の cohomology sheaves は coherent である;

(3) filtered complex の natural morphism

$$p: (\underline{\Omega}_V, \sigma) \rightarrow (\underline{\Omega}_V, F)$$

が存在する. $T = T^* \underline{\Omega}_V$ は De Rham complex, σ は "stupid filtration" である. 特異点 V smooth のとき, p は quasi-isomorphism になる.

(4) V compact のとき, $(\underline{\Omega}_V, F)$ の hypercohomology の spectral sequences は E_1 上-行す. $H^k(V, \mathbb{C})$ 上の limit filtration は Deligne の Hodge filtration と一致する.

(5) $f: \tilde{X} \rightarrow X$ \mathbb{C} 上 finite type の scheme 上の morphism である, X の subscheme Y の 外側 \tilde{Y} は 同型 である. $\tilde{Y} \in Y$ の 逆像 である. $f': \tilde{Y} \rightarrow Y \in f$ の \tilde{Y} 上の 制限 である. filtered derived category の中 \mathbb{Z} -次 の triangle が存在.

$$0 \rightarrow \underline{\Omega}_X \rightarrow \underline{\Omega}_Y \oplus Rf_* \underline{\Omega}_X \rightarrow Rf_* \underline{\Omega}_Y \rightarrow 0.$$

Def. 1.2. 特異点 (X, x) が Du Bois.

\Leftrightarrow ρ から induce される natural map $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \text{Gr}_F^0 \underline{\Omega}_{X,x}$
def が quasi-isomorphism

代数多様体 X が Du Bois

\Leftrightarrow X 上のすべての点 x が Du Bois
def

以後 $\text{Gr}_F^0 \underline{\Omega}_X$ を単に $\underline{\Omega}_X^0$ と表わそう ([11] の書き方に従って)

Prop. 1.3. D は complete algebraic scheme over \mathbb{C} で高次元 normal crossing singularities を持つとき。
 $\text{Gr}_F^0 H^i(D, \mathbb{C}) \cong H^i(D, \mathcal{O}_D)$ であり、 F は Deligne の Hodge filtration である。

[証明] [3] により D は Du Bois variety。また D は complete T から Prop 1.1 の (4) を用いて得られる。

Prop. 1.4. X は variety S は reduced closed subscheme とする。
 S が Du Bois であるとき、 $f: \tilde{X} \rightarrow X$ が S の外側と同型 \tilde{X} も $\tilde{S} = f^{-1}(S)_{\text{red}}$ も Du Bois である。

たゞよふにとる. $f: \widehat{S} \rightarrow S$ は f の制限とある.

\Rightarrow (i) 可なり. X が Du Bois ならば canonical map

$\varphi_i: R^i f_* \mathcal{O}_{\widehat{X}} \rightarrow R^i f'_* \mathcal{O}_S$ は任意に $i > 0$ に對し同型.

(ii) 特々に X が normal ならば X が Du Bois であること

φ_i が任意の $i > 0$ に對し同型になり, $\mathcal{O}_{\widehat{S}} \rightarrow f'_* \mathcal{O}_{\widehat{S}}$ が同型に一致すること同値.

[証明] Prop. 1.1 の (5) を morphism f に對して応用する.

\widehat{X} も \widehat{S} も S も Du Bois であるから次の long exact sequence ^{得る} _{なり}

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathcal{H}^0 \underline{\Omega}_X^0 \rightarrow f_* \mathcal{O}_{\widehat{X}} \oplus \mathcal{O}_S \rightarrow f'_* \mathcal{O}_{\widehat{S}} \\ &\rightarrow \mathcal{H}^1 \underline{\Omega}_X^0 \rightarrow R^1 f_* \mathcal{O}_{\widehat{X}} \rightarrow R^1 f'_* \mathcal{O}_{\widehat{S}} \\ &\vdots \\ &\rightarrow \mathcal{H}^i \underline{\Omega}_X^0 \rightarrow R^i f_* \mathcal{O}_{\widehat{X}} \rightarrow R^i f'_* \mathcal{O}_{\widehat{S}} \end{aligned}$$

定義より, X が Du Bois であることと $\mathcal{H}^0 \underline{\Omega}_X^0 \simeq \mathcal{O}_X, \mathcal{H}^i \underline{\Omega}_X^0 = 0$ ($i > 0$) は同値であるから, (i)(ii) は可なりである.

Cor. 1.5 (Steinbrink [11]) 正規孤立特異点 (X, x) に関する.

(X, x) が Du Bois $\Leftrightarrow (R^i f_* \mathcal{O}_{\widehat{X}})_x \rightarrow H^i(E, \mathcal{O}_E)$ は同型 ($i > 0$)

Γ - \widehat{X} $f: \widehat{X} \rightarrow X$ は good partial resol.

\widehat{X} が Du Bois, $E = f^{-1}(x)$ red.

[証明] E は正規交互 F から [3] により Du Bois である。 \square である。
Prop. 1.4. を使えばよい。

Prop. 1.6. (Steinrück [11]) (X, x) を正規孤立特異点, $f: \tilde{X} \rightarrow X$ を good resolution, $E = f^{-1}(x)_{\text{red}}$ とする。

\square のとき natural map $(R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_x \rightarrow H^i(E, \mathcal{O}_E)$ ($i > 0$) は surjective である。

[証明] canonical maps α, β, γ diagram \square である。

$$\begin{array}{ccc} H^i(\tilde{X}, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\beta} & H^i(E, \mathbb{C}) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \delta \\ H^i(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) & \xrightarrow{\gamma} & H^i(E, \mathcal{O}_E) \end{array}$$

\tilde{X} は E に deformation retract である。 β は同型である。 E は Du Bois であるから $H^i(E, \mathcal{O}_E) \cong \text{Gr}_F^0 H^i(E)$ であるから δ は surjective である。 α, γ は surjective であるから $\alpha \gamma^{-1} \delta^{-1}$ は同型である。

Cor. 1.7. 孤立特異点 (X, x) が rational であるから Du Bois である。

[証明] rational singularity は normal であるから Cor. 1.5 が適用できる。 任意の $i > 0$ に対して surjection $(R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_x \rightarrow H^i(E, \mathcal{O}_E)$ かつ $(R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_x = 0$ であるから同型である。

一般に特異点 (X, x) (孤立とは限らない) が rational であること $Rf_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \cong \mathcal{O}_X$ in derived category と定義でき、
 $f: \tilde{X} \rightarrow X$ は 特異点達の resolution,
 Steenbrink は conjecture とし、「 \mathbb{A}^2 の rational singularity は Du Bois?」を [11] において挙げている。筆者はこれに
 対応する完全な答えを知らない、そこで後に §5 で用いる、肯定的な例をここで1つ挙げておく。

Example 1.8. \mathbb{C}^n の中で、方程式 $z_1 z_2 - z_3 \cdots z_k = 0$ ($3 \leq k \leq n$)
 で定義される多様体の特異点達は \mathbb{A}^2 の Du Bois の rational.
 実際、rational にひきこくは $k < n$ を知らぬといふ (例は [13]).
 上記の多様体を X とする $f: \tilde{X} \rightarrow X$ を [13] で構成された
 resolution とすると、canonical map $Rf_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \rightarrow Rf_* \mathcal{O}_E$ は、
 両方が \mathcal{O} の同型、また $\mathcal{O}_S \rightarrow Rf_* \mathcal{O}_E$ も同型だから Prop 1.4
 より X は Du Bois.

§2. 多重種数と Du Bois' 条件.

この § においては (X, x) は \mathbb{A}^2 の n 次元 ($n \geq 2$) 正規
 孤立特異点とする。

Def 2.1 ([14]) (X, x) を 2 次元多重特異点 $\{\delta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ の列に定義する。

$$\delta_m(X, x) = \dim_{\mathbb{C}} \Gamma(X - \{x\}, \mathcal{O}(mK)) / L^{2/m}(X - \{x\}).$$

Γ は $L^{2/m}(X - \{x\})$ は $X - \{x\}$ 上の $L^{2/m}$ -可積分な m 重の holomorphic n -form の集合。

Prop. 2.2 ([14]) $f: \tilde{X} \rightarrow X$ を 特異点 (X, x) の good resolution とする。例に於て $E = f^{-1}(x)_{\text{red}}$ と書く。

$$\delta_m(X, x) = \dim_{\mathbb{C}} \Gamma(\tilde{X} - E, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}})) / \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}} + (m-1)E))$$

Def. 特異点 (X, x) が Gorenstein 特異点であるとは、 $\mathcal{O}_{X, x}$ が Gorenstein 環になることである。

これは (X, x) が Gorenstein 特異点になること、(1) ω_X が invertible であるか、(2) $R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} = 0$ ($0 < i < n-1$) が任意の resolution $f: \tilde{X} \rightarrow X$ について成立することと同値である。

Def. (X, x) が quasi-Gorenstein 特異点であるとは、 ω_X が invertible になることである。

Theorem 2.3. $f: \tilde{X} \rightarrow X$ を quasi-Gorenstein 特異点 (X, x) の good resolution とする。 $E = f^{-1}(x)_{\text{red}}$ とし $E = \sum E_i$

と、既約成分に分解してよく、可子と次の三条件は同値である。

- (i) $\delta_m(X, X) \leq 1$ for any $m \in \mathbb{N}$
- (ii) (X, X) は Du Bois である。
- (iii) $K_{\tilde{X}} = f^*K_X + \sum m_i E_i$ $\Leftrightarrow \forall i, m_i \geq -1$ for $\forall i$

証明は 2 つの部分に分けて行う。

Lemma 3.2.1 定理の仮定の下で次の三条件は同値。

- (i) $\delta_m(X, X) \leq 1$ for any $m \in \mathbb{N}$
- (ii)' $H^{n-1}(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) \simeq H^{n-1}(E, \mathcal{O}_E)$ isomorphic
- (iii) $K_{\tilde{X}} = f^*K_X + \sum m_i E_i$ $\Leftrightarrow \forall i, m_i \geq -1$ for $\forall i$

[Lemmaの証明] (ii)' \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (ii)' の順で証明しよう。

(ii)' が成立していることより、まず仮定可。 等式；

$$(1) \quad \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}} + E)) = \Gamma(\tilde{X} - E, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}))$$

が成立することを示そう。 \subset は明らかである。 \supset 。

$$(2) \quad \dim \frac{\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}} + E))}{\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}))} \leq \dim \frac{\Gamma(\tilde{X} - E, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}))}{\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}))}$$

が成立すること、 \Leftrightarrow 等号が成立することと、(1)の等号が成立することと同値であることを注意しておく。

(2)の左辺は adjunction formula と Grauert-Riemenschneiderの消滅定理 ($H^i(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}})) = 0 \quad i > 0$) を用いれば、 $h^0(E, K_E)$ に等しくなる。

これは Serre の双対定理より $h^{n-1}(E, \mathcal{O}_E)$ と等しい。

一方 (2) の右辺は Sin の定理と Serre の双対定理を用いる。 $h^{n-1}(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ に等しくなる。 (ii)' の条件より (2) の等式が成立し、よって (1) も成立する。 必要があれば X をさらに \mathbb{C}^1 上 \mathbb{C}^2 の $\mathcal{O}(K_X)$ が trivial になるようにとすればよい。 \mathbb{C}^1 の生成元を ω と表わすと、等式 (1) の両辺に ω^t をかけるとよって、等式：

$$(3) \quad \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(\sum (m_i + 1) E_i)) = \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$$

が得られる。 $1 \neq 0$, $\sum m_i \geq -1$ for $\forall i$ が成立 (iii) の条件

次に (iii) を仮定しよう。 ある包含関係；

$$\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(f^*K_X - E)) \subset \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}))$$

が成立する。 $\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(f^*K_X)) = \Gamma(\tilde{X} - E, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}))$ であるので、上記の包含関係より, surjective map.

$$\Gamma(E, \mathcal{O}_E) = \frac{\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(f^*K_X))}{\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(f^*K_X - E))} \longrightarrow \frac{\Gamma(\tilde{X} - E, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}))}{\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}))}$$

が得られる。 X は normal \mathbb{C} から $h^0(E, \mathcal{O}_E) = 1$ 。 $1 \neq 0$ であるので \mathbb{C} の surjection より、 $1 \geq P_2(X, X)$ 。 もし $P_2(X, X) = 0$ ならば [14] より、 $\delta_m(X, X) = 0$ ($\forall m \in \mathbb{N}$) であるから (i) をみたす。 $P_2(X, X) = 1$ と仮定しよう。 ある \tilde{X} 上 n -form θ で E 上に 1 位の極をもつものがある。

$\Gamma(\tilde{X} - E, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}})) = \langle \theta \rangle \oplus \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}))$ をみたす。 \mathbb{C} 上の左

1718. \mathbb{C} -vector spaces の直和. $m > 1$ に対し $\Gamma(\tilde{X}-E, \mathcal{O}(mK))$

は $\{\theta^a g_1 \cdots g_{m-a} \mid g_i \in \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}))\}$ で \mathbb{C} 上生成される.

θ の E での pole の位数は 1 であるから, $a < m$ に対し

$\theta^a g_1 \cdots g_{m-a} \in \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}} + (m-1)E))$. したがって $\Gamma(\tilde{X}-E, \mathcal{O}(mK))$
 $= \langle \theta^m \rangle \oplus \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}} + (m-1)E))$. Prop 2.2 より $\delta_m(X, X) = 1$ ($\forall m \in \mathbb{N}$)

最後に, (i) を仮定して (iii)' を示そう. (X, X) が rational である.

Cor 1.7 により Du Bois であるから (iii)' は当然成り立つ.

(X, X) を絶対剛型と仮定しよう. E での pole を持つような

meromorphic n -form θ をとると, 仮定より

$$\Gamma(\tilde{X}-E, \mathcal{O}(mK)) = \langle \theta^m \rangle \oplus \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mK + (m-1)E)).$$

したがって θ は E での order 1 の pole を持つことがわかる.

実際, θ の E での pole の order を s とすると, あると任意の holomorphic

n -form g に対し, $\theta^{m-1} \cdot g \in \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mK + (m-1)E))$ で代わ

ればならない. したがって g は $(s-1)(m-1)$ 位の零を

E 上で持つことがわかる. m は任意であるから, $s=1$ で

代わればならない.

したがって, $\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K+E)) = \Gamma(\tilde{X}-E, \mathcal{O}(K))$ がわかる.

$$\text{したがって, } h^{n-1}(E, \mathcal{O}_E) = h^0(E, K_E) = \dim \frac{\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K+E))}{\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K))} = P_g(X, X) = 1$$

(E が, Γ canonical to surjective map $H^{n-1}(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) \rightarrow H^{n-1}(E, \mathcal{O}_E)$
 $\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $\mathbb{C} \quad \quad \quad \mathbb{C}$)

は同型. (QED Lemma 23.1)

Lemma 2.3.1 により (i) \Leftrightarrow (iii) \Leftarrow (ii) が示されたので、あとは (i), (iii) \Rightarrow (ii) を示せばよい。

Lemma 2.3.2. 定理の仮定の下で、(iii) $K_{\tilde{X}} = f^* K_X + \sum m_i E_i$ ($m_i \geq -1$ for $\forall i$) が成立 (2) であるならば (X, X) は Du Bois.

[Lemma 2.3.2 の証明] "(iii) \Rightarrow (ii)" $H^{n-1}(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) \cong H^{n-1}(E, \mathcal{O}_E)$ (よ. 5) の Lemma で証明されたことより、 $0 < i < n-1$ には \tilde{H}^i .

$H^i(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) \rightarrow H^i(E, \mathcal{O}_E)$ が単射であることはいずれも、

Prop. 1.6 により同型であることが導かれる。Cor. 1.5 により (X, X) は Du Bois にたつ。 (X, X) が rational のとき、

Du Bois にたつことはいずれも、2) であるので、 (X, X) を 絶情用型 としつう。すると、 $\tilde{X} \rightarrow E \rightarrow \tilde{X}$ は nonvanishing holomorphic $\tilde{X} \rightarrow E \rightarrow \tilde{X}$ で 1 位の pole をもつ n -form ω が存在するので (Lemma 2.3.1) ω を $\tilde{X} \rightarrow E \rightarrow \tilde{X}$ 経由することにより、層準同型

$$\mathcal{O}_{\tilde{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X}}(K+E)$$

が得られ、よ. 2. 無限遠点に台をもつ \mathbb{Z} -モジュール群を含む可換図

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & H_c^i(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) & \rightarrow & H^i(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) & \xrightarrow{\psi_i} & H_\omega^i(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) & \rightarrow & H_c^{i+1}(\mathcal{O}) \\ & \downarrow & & \downarrow \beta_i & & \downarrow \gamma_i & & \downarrow \\ \rightarrow & H_c^i(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(K+E)) & \rightarrow & H^i(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(K+E)) & \xrightarrow{\mu_i} & H_\omega^i(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(K+E)) & \rightarrow & H_c^{i+1}(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(K+E)) \end{array}$$

が成り立つ。ここで β_i は単射になる。実際、Grauert-Riemenschneider の消滅定理と Serre の双対定理より、すべての $i < n$ について $H_c^i(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 0$ 。したがって ψ_i は $i < n-1$ について全単射。しかも ω は \tilde{X} 上 $\tilde{X}-E$ では 0 にならないので、 γ_i も全単射である。よって可換式 $\gamma_i \circ \psi_i = \mu_i \circ \beta_i$ より、 β_i は単射である。

次に以下の可換図

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-E) & \rightarrow & \mathcal{O}_{\tilde{X}} & \rightarrow & \mathcal{O}_E \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{O}_{\tilde{X}}(K) & \rightarrow & \mathcal{O}_{\tilde{X}}(K+E) & \rightarrow & \mathcal{O}_E(K_E) \rightarrow 0 \end{array}$$

より、2ホモロジー群の可換図

$$\begin{array}{ccccc} \rightarrow & H^i(\mathcal{O}(-E)) & \rightarrow & H^i(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) & \xrightarrow{u_i} & H^i(\mathcal{O}_E) \\ & \downarrow & & \downarrow \beta_i & & \downarrow \alpha_i \\ \rightarrow & H^i(\mathcal{O}(K)) & \rightarrow & H^i(\mathcal{O}(K+E)) & \xrightarrow{v_i} & H^i(K_E) \end{array}$$

が得られる。Grauert-Riemenschneider の消滅定理より、 $i > 0$ について、 $H^i(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(K)) = 0$ 。したがって v_i は全単射である。よって可換式 $\alpha_i \circ u_i = v_i \circ \beta_i$ より、 β_i が単射であることから $v_i \circ \beta_i$ も単射。ゆえに u_i も単射となる。(QED of Lemma 2.2.)
(QED of Th. 2.3)

§3. 正規孤立 *quasi-Gorenstein* 特異点の *good resolution*.

この § 7 は (X, x) は常に正規孤立 *quasi-Gorenstein* 特異点とし、 $f: \tilde{X} \rightarrow X$ は *good resolution* とする。 $E = f^{-1}(x)_{\text{red}}$ とする。 E の dual graph を Γ_E と表す可。 simplicial complex Γ_E の i -th Betti number を $b_i(\Gamma_E)$ と表す可。

Proposition 3.1. 任意の $i \geq 0$ に対し、等式:

$$b_i(\Gamma_E) = \dim_{\mathbb{C}} W_0 H^i(E)$$

が成立する。 $T = T^i$ として W^i は $H^i(E, \mathbb{C})$ 上の mixed Hodge structure の weight filtration.

[証明] E は simple normal crossings であるから、mixed Hodge structure の weight filtration の定義により明らか。

Prop. 3.2. 任意の $i \geq 0$ に対し、不等式:

$$b_i(\Gamma_E) \leq \dim_{\mathbb{C}} (R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_x$$

が成立する。ここで任意の $i > 0$ に対し等号が成立していることとすると、 (X, x) は Du Bois になる。

[証明] Prop 1.6 により、 $\dim_{\mathbb{C}} (R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_x \geq h^i(E, \mathcal{O}_E)$ が成り立つ。 $i > 0$ について成立する。一方 Prop 1.3 と

Prop 3.1 により, $h^i(E, \mathcal{O}_E) = \dim_{\text{Gr}_F^0} H^i(E) \geq \dim \text{Wo} H^i(E) = b_i(\Gamma_E)$.
 Z の不等式 \Rightarrow TIT の成り立ち. 最初の主張が示される.
 等号が成立するとき, 等号 $\dim(R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_x = h^i(E, \mathcal{O}_E)$ が
 得られるので, Prop. 1.6 により, $R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \simeq H^i(E, \mathcal{O}_E)$ が
 導かれる.

Def. 3.3. quasi-Gorenstein 特異点 (X, x) の good resolution
 $f: \tilde{X} \rightarrow X$ に対し, $K_{\tilde{X}} = f^* K_X + \sum_{i \in I} m_i E_i - \sum_{j \in J} m_j E_j$;
 $m_i \geq 0$ ($i \in I$) $m_j > 0$ ($j \in J$) と表わされるとき,
 $\sum m_j E_j$ を f の essential divisor と呼ぶ.

Remark 3.4. (X, x) が rational のとき, essential
 divisor は空集合, 純楕円型のとき, essential divisor は
 reduced に T する.

Def. 3.5. good resolution $f: \tilde{X} \rightarrow X$ が essential
 good resolution であるとは, $K_{\tilde{X}} = f^* K_X + \sum m_\alpha E_\alpha$;
 $m_\alpha \leq 0$ と表わされるときである. (=0 を許す (218=21=注意))

Remark 3.6. (X, x) が 2次元の場合, essential good
 resolution は必ず存在可能であることがわかっている. しかし高次

$\varepsilon=1$ とおくと、それは正しくない、例として、3次元の $\mathbb{C}DV$ 特異点 ([7]) は、可 $\varepsilon=2$ の good resolution が essential $\varepsilon=1$ とおくとおかない。

\tilde{X} に mild な特異点 (具体的に $\varepsilon=1$ は terminal 特異点) と許せば、"essential good resolution" は存在するであろうと予想される。

以下に good resolution において essential divisor がいかに本当に "essential" な役割を $\varepsilon=1$ とおくとおかないことを見よう。

Prop 3.7. $f: \tilde{X} \rightarrow X$ は quasi-Gorenstein 特異点の good resolution とおくと、 E_J は f の essential divisor とおくと、次が成り立つ。

- (1). $D \geq E_J$ とおくと任意の divisor D に対して $h^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) = P_g(X, X)$
- (2). E_J の component E を含む \mathbb{Q} -divisor D に対して $h^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) = 0$

[証明]. $D \geq E_J$ とおくと divisor D を E_J の定理から $\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}} + D)) = \Gamma(\tilde{X} - E, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}))$ 。

Grauert-Riemenschneider の消滅定理により $H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}})) = 0$ 。

$$\begin{aligned} \text{よって } P_g(X, X) &= \dim \Gamma(\tilde{X} - E, \mathcal{O}(K)) / \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K)) = \dim \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K+D)) / \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K)) \\ &= \dim \Gamma(D, \mathcal{O}(K_D)) \\ &= \dim H^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) \quad (\text{II) の証明終}) \end{aligned}$$

次に $D \in E_J$ の component $\subseteq \mathbb{A}^1$ ではない effective な divisor とする。 $D' = E_J + D$ とすると D' は (1) の条件を満たす。 D の仮定により、 $E_J \cap D$ の次元は $n-2$ 以下であるから、 Γ の φ は 全射 となる。

$$H^{n-1}(D', \mathcal{O}_{D'}) \xrightarrow{\varphi} H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J}) \oplus H^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) \rightarrow H^{n-1}(E_J \cap D, \mathcal{O})$$

E_J, D' に対し (1) の結果を用い、 Γ の φ は $H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J}) \wedge$ の同型 となる。 Γ 上 $H^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) = 0$

Prop. 3. 8. 上の 3. 7 と同様の仮定のもとで、 $D \not\subseteq E_J$ とする 任意の effective divisor D に対し、

$$h^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) \leq P_2(X, x)$$

[証明] $E_J = D + D'$ と分解し、 $D' > 0$ 。

Adjunction formula を用い、 次の exact sequence が得られる

$$0 \rightarrow K_D \rightarrow K_{E_J} \rightarrow K_{E_J}|_{D'} \rightarrow 0$$

E_J の定義により、 $K_{E_J} \geq 0$ 。 Γ 上、 global section の map $\Gamma(E_J, K_{E_J}) \rightarrow \Gamma(D', K_{E_J}|_{D'})$ は zero map となる。
 (したがって canonical injection $\Gamma(D, K_D) \rightarrow \Gamma(E_J, K_{E_J})$ は、
 全射 にならない。 Serre の双対性より、 命題 が得られる。

Cor. 3.9. (X, \mathcal{X}) は純情円型 quasi-Gorenstein 特異点とし、
 $f: \tilde{X} \rightarrow X$ は good resolution とすると、essential divisor
 E_J は connected である。 E_J が irreducible であるとき、
 $D \leq E_J$ とするならば任意の effective divisor D に対し、
 $H^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) = 0$ とする。

[証明] $P_g(X, \mathcal{X}) = 1$ であるから命題 3.8 より
 明らか。 E_J が irreducible であるとしておく。 $E_J = D_1 + D_2$
 $(D_1, D_2 > 0)$ と分解する。 $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ とする。

$$\begin{array}{ccccccc} H^{n-2}(D_1 \cap D_2, \mathcal{O}_{D_1 \cap D_2}) & \rightarrow & H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J}) & \xrightarrow{\varphi} & H^{n-1}(D_1, \mathcal{O}_{D_1}) \oplus H^{n-1}(D_2, \mathcal{O}_{D_2}) & \rightarrow & H^{n-1}(D_1 \cap D_2, \mathcal{O}) \\ \parallel & & & & & & \parallel \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}$$

より φ が同型になる。 先に示したことから、 $\oplus H^{n-1}(D_i, \mathcal{O}_{D_i}) = 0$
 とするはずであるから、これは矛盾。

§4. 純情円型特異点の分類

$f: \tilde{X} \rightarrow X$ は純情円型特異点 (X, \mathcal{X}) の good resolution
 とする。 E_J は f の essential divisor とする。

E_J は simple normal crossings であるから Prop. 1.3 より、

$$H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J}) \cong \text{Gr}_F^0 H^{n-1}(E_J) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} H_{n-1}^{0,i}(E_J)$$

Prop. 3.7 より $H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J}) = \mathbb{C}$ であるから $\text{Gr}_F^0 H^{n-1}(E_J)$ は n 次元の $H_{n-1}^{0,1}(E_J)$ と一致する。

Def. 4.1. 純情用型特異点 (X, x) が $(0, i)$ 型である ($i=0, 1, 2, \dots, n-1$) とは、 $H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J})$ が $(0, i)$ -Hodge component から成ることをいう。

ここで $H^{n-1}(E \setminus \epsilon) \rightarrow H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J})$ は同型であるから $H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J})$ が $(0, i)$ -Hodge comp から成ることは $H^{n-1}(E \setminus \epsilon)$ が $(0, i)$ -Hodge component から成ることを同値であることに注意。

Prop. 4.2. Γ の定義から純情用型特異点 (X, x) の型は good resolution $f: \tilde{X} \rightarrow X$ の Γ に依る。

[証明] $f_i: X_i \rightarrow X$ ($i=1, 2$) は (X, x) の good resolutions とする。 $f_i^{-1}(x)_{\text{red}} = E_i$ と置く。 birational morphism $g: X_1 \rightarrow X_2$ が存在する場合には証明可なり十分である。
 Γ の完備化とすることにより X_i は完備だと思えば、 E_i の外側では g は同型だから、次の mixed Hodge structure の exact sequence が得られる。

$$\rightarrow H^{n-1}(X_2, \mathbb{C}) \rightarrow H^{n-1}(X_1, \mathbb{C}) \oplus H^{n-1}(E_2, \mathbb{C}) \rightarrow H^{n-1}(E_1, \mathbb{C}) \rightarrow$$

Gr_F^0 ε $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$ により \mathbb{R} の exact sequence が得られる

$$\rightarrow H^{n-1}(X_2, \mathcal{O}_{X_2}) \rightarrow H^{n-1}(X_1, \mathcal{O}_{X_1}) \oplus H^{n-1}(E_2, \mathcal{O}_{E_2}) \xrightarrow{\varphi} H^{n-1}(E_1, \mathcal{O}_{E_1}) \rightarrow H^n(X_2, \mathcal{O}_{X_2})$$

X_i ($i=1,2$) は non-singular \mathbb{C} -complete \mathbb{C} から $H^0(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$ は $(0,0)$ -component から成る。 $H^{n-1}(E_1, \mathcal{O}_{E_1})$ は $(0, n-1)$ -comp. \mathbb{C} も \mathbb{C} である。 φ は surjective. もし $H^{n-1}(E_1, \mathcal{O}_{E_1})$ が $(0, i)$ -type ($i \neq n-1$) ならば φ の surjectivity から、それは $H^{n-1}(E_2, \mathcal{O}_{E_2})$ から来るといふことになる。 $H^{n-1}(E_2, \mathcal{O}_{E_2})$ も $(0, i)$ -type \mathbb{C} である。 もし $H^{n-1}(E_1, \mathcal{O}_{E_1})$ が $(0, n-1)$ -type であるならば $H^{n-1}(E_2, \mathcal{O}_{E_2})$ が異なる type ならば、その φ の像は 0 になる。 $H^{n-1}(X_2, \mathcal{O}_{X_2})$ は $(0, n-1)$ -comp \mathbb{C} である。 \mathbb{C} の \mathbb{R} 上での分解は $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ である。 \mathbb{C} の \mathbb{R} 上での分解は $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ である。 \mathbb{C} の \mathbb{R} 上での分解は $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ である。 \mathbb{C} の \mathbb{R} 上での分解は $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ である。

Theorem 4.3 $f: \tilde{X} \rightarrow X$ を 絶情円型特異点 (X, x) の essential good resolution とする。 (X, x) が $(0, s)$ 型とすると、essential divisor E_J の dual graph Γ_{E_J} は $(n-s-1)$ 次元の単体的複体になる。 (ただし単体的複体 Γ の次元とは、 Δ に含まれる単体の次元の最大値のことを指す)

Theorem の証明のために Lemma 4.5 を準備しよう (易しいので証明は省く)

Lemma 4.5. D は 1次元の完備連結多様体で simple normal crossings であるとする. $K_D \cong \mathcal{O}_D$ とすると.

(0) $H^1(D, \mathcal{O}_D)$ が $(0,0)$ -Hodge-component から成るといえるとき D は rational curves の cycle である.

(1) $H^1(D, \mathcal{O}_D)$ が $(0,1)$ -Hodge-component から成るといえるとき D は irreducible elliptic curve である.

[Th 4.3 の証明] $E(r, s)$ は non-singular $(r+1)$ -fold \mathbb{P}^1 の完備連結な effective divisor で simple normal crossings, である.

$K_D \cong \mathcal{O}_D$, $H^r(D, \mathcal{O}_D) = \mathbb{C}$ は $(0, r)$ -Hodge-component から成るといえるものの全体の集合とする. E_J は $E(r-1, s)$ の元であることに注意すれば $E(r, s)$ の勝手な元 D に対し.

dual graph Γ_D が $(r-s)$ 次元であることを示せばよい.

$r=1$ の場合は帰納法で示そう.

$r=1$ のときは Lemma 4.5 より明らか.

$r > 1$ とし $E(r-1, s)$ ($s \leq r-1$) の元 D の元に対し主張が成立しているとする. $E(r, r)$ の元は D として irreducible であることとを示そう.

$D \in E(r, r)$ が irreducible ではないと可なり。 $D = D' + D''$ と自明ではない分解と可なり ($D', D'' > 0$)。 Mayer-Vietoris から induce される exact sequence

$$H^{r-1}(D' \wedge D'', \mathcal{O}_{D' \wedge D''}) \rightarrow H^r(D, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{\psi} H^r(D', \mathcal{O}_{D'}) \oplus H^r(D'', \mathcal{O}_{D''})$$

1) $H^r(D, \mathcal{O}_D)$ は $(0, r)$ -Hodge component から成り立っている。
 $H^{r-1}(D' \wedge D'', \mathcal{O}_{D' \wedge D''})$ には、その F^3 の component は F^3 に入らない。
 1) から、2) ψ は単射となる。 \Rightarrow $H^r(D', \mathcal{O}_{D'}), H^r(D'', \mathcal{O}_{D''})$ は Cor 3.9 と同じ議論が可なり。 0 には r の値。

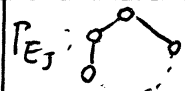


$\Delta < r$ と仮定しよう。 $D \in E(r, \Delta)$ に対して $D_j \in D$ が Δ の irreducible component とし、 $D'_j = D - D_j$ とおく。
 $D'_j |_{D_j}$ は連結成分 $C_i (i=1, \dots, t)$ に分解する。可なりと adjunction formula が可なり。 $K_{D'_j} = -\sum_{i=1}^t C_i$ から $K_{C_i} \cong \mathcal{O}_{C_i}$ が成り立つ。 \Rightarrow Mayer-Vietoris から induce される exact sequence を考えよう。

$$H^{r-1}(D_j, \mathcal{O}_{D_j}) \oplus H^{r-1}(D'_j, \mathcal{O}_{D'_j}) \xrightarrow{\rho} \bigoplus_{i=1}^t H^{r-1}(C_i, \mathcal{O}_{C_i}) \rightarrow H^r(D, \mathcal{O}_D) \rightarrow 0$$

$H^r(D, \mathcal{O}_D)$ は $(0, \Delta)$ -Hodge-comp から成り立っている。 $H^{r-1}(C_i, \mathcal{O}_{C_i})$ ($i=1, \dots, t$) の u 部分 u は $(0, \Delta)$ -type ではないから成り立つ。

それ故 $H^{r-1}(C_t, \mathcal{O}_{C_t})$ とし、 $t=1$ の場合は、帰納法の仮定より、 $D'_j |_{D_j} = C_1$ の dual graph の次元は $r-1-\Delta$ であり、
 故に D_j は Γ_D の中で、 $r-\Delta$ 次元の単体の頂点と可なり。

Theorem 4.6. (X, χ) を 3次元 純情用型 quasi-Gorenstein 特異点. $f: \hat{X} \rightarrow X$ を essential good resolution. E_J を f の essential divisor とする. J と E_J (あるいは dual graph Γ_{E_J}) は 次のいずれか

型 $R^1 f_* \mathcal{O}_{\hat{X}}$	\circ	Σ	----	2g	----
0,2	$\Gamma_{E_J}; \circ$ a K3-surface	$\Gamma_{E_J}; \circ$ an Abelian surface	—	—	—
0,1	$\Gamma_{E_J}; \circ \circ \dots \circ$ \circ : rat. surface \circ : elliptic ruled —: elliptic curve	$\Gamma_{E_J};$  \circ : elliptic ruled —: elliptic curve	—	—	—
0,0	Γ_{E_J} : S^2 の単体分割  \circ : rat surface —: rat curve	Γ_{E_J} : T^2 の単体分割  \circ : rat surface —: rat curve	-----	Γ_{E_J} : genus g の $1-2$ -面の単体分割 \circ : rat surface —: rat curve	-----

[注] — は存在しないことを示す.

[証明] E_J は simple normal crossings である. $K_{E_J} \cong \mathcal{O}_{E_J}$ になることに注意する. E_J が irreducible のとき, 当然 (0,2) type であり, 曲面の分類論より, K3 あるいは Abelian になることがわかる. あるいは $\dim R^1 f_* \mathcal{O}_{\hat{X}} = h^1(E_J, \mathcal{O}_{E_J})$ による.

その値はそれぞれ $0, 2$ と 1 である。

E は irreducible \mathbb{P}^1 と 1 である。 adjunction formula より $K_{E_i} = -\sum_{j \neq i} E_j|_{E_i}$. $C = \sum_{j \neq i} E_j|_{E_i} \cong \mathcal{O}_C$ である。 Lemma 4.5 より C の connected component は elliptic curve または rational curves の cycle であることである。 [6] の P. 967 と [12] の Lemma 2 を用いる。組 (E_i, C) は次のいずれかであることである。

- (α) E_i : rational surface C : elliptic curve 1本
- (β) E_i : elliptic ruled surface C : elliptic curves 2本の disjoint union
- (γ) E_i : rational surface C : rational curves cycle 1本

これは Cor 3.9 により。 次の exact sequence がある

$$H^1(E_i, \mathcal{O}) \oplus H^1(\sum_{j \neq i} E_j, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C) \rightarrow H^2(E_j, \mathcal{O}_{E_j}) \rightarrow 0$$

まず $H^2(E_j, \mathcal{O}_{E_j})$ は $(0, 1)$ -型 であるから $H^1(C, \mathcal{O}_C)$ は $(0, 1)$ -型の comp を含み得ない。 Lemma 4.5 より (α) か (β) のいずれかである。 以下は

\mathbb{P}^1 は $\begin{matrix} \text{(α)} & \text{(β)} & \dots & \text{(β)} & \text{(α)} \\ \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet \end{matrix}$ 又は $\begin{matrix} & \text{(β)} & & \\ & \circ & \text{---} & \circ & \\ \text{(β)} & \diagdown & & \diagup & \text{(β)} \\ & \circ & & \circ & \\ & \text{(β)} & & \text{(β)} & \end{matrix}$ のいずれかである。

$R^1 f_* \mathcal{O}_X = h^1(E_j, \mathcal{O}_{E_j})$ の計算はせよし。

$H^2(E_j, \mathcal{O}_{E_j})$ は $(0, 0)$ -型 であるから $H^1(C, \mathcal{O}_C)$ は $(0, 0)$ -型の comp を含み得ない。

ならず. Lemma 4.5 より, E_J の π^{-1} の component は (γ) の π^{-1} である. γ, Σ . P_{E_J} は boundary の π^{-1} compact surface である. $\therefore \therefore \therefore H^2(E_J \otimes \mathcal{O}_{E_J})$ は $(0,0)$ π^{-1} である. $W_0 H^2(E_J) \cong \mathbb{C}$ である. $b_2(P_{E_J}) = 1$ (π^{-1} である. $\therefore P_{E_J}$ は orientable である.

§5. 純楕円型特異点の構成.

\therefore の ξ π^{-1} は π^{-1} の purely elliptic singularity の例を blow up blowdown により 構成する.

Lemma 5.1. Y は normal Gorenstein variety π^{-1} である. rational Du Bois 特異点しかも, π^{-1} である. $E \in Y$ の compact connected π^{-1} effective divisor π^{-1} simple normal crossing である, π^{-1} である. $K_Y = -E$ と仮定する.

E が exceptional π^{-1} である. \exists π^{-1} contract π^{-1} π^{-1} 特異点 (X, x) は purely elliptic quasi-Gorenstein 特異点である.

[証明] まず $H^i(Y, \mathcal{O}_Y(K_Y)) = 0$ for $i > 0$ を示そう.

$f: Y \rightarrow X$ は contraction morphism とし. $g: \tilde{X} \rightarrow Y$ は Y の singularity の resolution とする. (\tilde{X} は 複素多面体と見るとする)

それは Grauert-Riemenschneider 変換定理を用いて

$$H^i(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}})) = 0 \quad R^i g_* \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}) = 0 \quad (i > 0) \text{ かつ } H^i \tilde{X}$$

($i > 0$) 2 spectral sequences

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q g_* \mathcal{O}(K_{\tilde{X}})) \Rightarrow E^{p,q} = H^{p+q}(\hat{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}})) = 0$$

は E_2 2-degenerate (2 $H^i(Y, g_* \mathcal{O}(K_{\tilde{X}})) = 0 \quad (i > 0)$) である。

Y は rational singularity である (かつ $\mathcal{O}(K_Y) = \mathcal{O}(K_{\tilde{X}})$)。

$$\mathcal{O}(K_Y) \cong \mathcal{O}(-E) \text{ であるので } H^i(Y, \mathcal{O}_Y(-E)) = 0 \quad (i > 0) \text{ かつ } H^i \tilde{X}$$

$$(2) \text{ かつ } H^i(Y, \mathcal{O}_Y) \cong H^i(E, \mathcal{O}_E) \text{ for } i > 0.$$

よって Prop 1.4 より (X, x) は non-rational (2 $H^i(E, \mathcal{O}_E) \neq 0$)

は Du Bois singularity である。これは quasi-Gorenstein

である (2 $\mathcal{O}(K_Y) = -E$) であるから

$$\Gamma(Y-E, \mathcal{O}(K_Y)) \cong \Gamma(Y-E, \mathcal{O}_Y) \cong H^0(Y, \mathcal{O}_Y) = k$$

$$\text{同型 } \Gamma(X-3X_3, \mathcal{O}(K)) \cong \Gamma(X-3X_3, \mathcal{O}) \quad K \text{ 3 } > \text{ 3. } \cong H^0(X, \mathcal{O}_X)$$

より $X-3X_3 \cap \Sigma$ は non-vanishing holomorphic n -form

が存在する。

Lemma 5.2. Z は non-singular n -fold, $E_0 \subset Z$ は connected 2 射影的 2 simple normal crossing 2 division 2 $K_Z = -E_0$ を満たすことができる。 L は E_0 上の divisor 2 $L \otimes \mathcal{N}_{E_0/Z}^{-1}$ が ample 1 2 である。

$|L|$ の general member $C \subset \Sigma$ を blow up (π, σ) を
 Y , E_0 a proper transform $\exists E \subset \sigma^{-1}(C) \subset Y$, E は Lemma
 5.1 の条件 を満たす。

[証明] $C \subset \Sigma$ general \Rightarrow C は E_0 の各 component
 Γ は non-singular \Rightarrow Γ 上の singular points は $\sum_{i=1}^n z_i \cdots z_k = 0$
 $z_n = 0$ ($k < n$) \Rightarrow Γ の方程式で定義されたと
 思われる。 (π, σ) の center Γ の blow up Y は
 $x_{n+1} x_n - x_1 \cdots x_k = 0$ で定義される singularity を持つ。
 \Rightarrow C は Example 1.8 $k \leq 3$ rational Du Bois \Rightarrow \exists
 $E \rightarrow E_0$ は E_0 の Cartier divisor \Rightarrow C は blow up $\pi^{-1}(C)$ の
 同型になる。 (π, σ) は simple normal crossing variety
 になる。 $\pi^* K_Y = b^* K_\Sigma + D$ $\pi^{-1}(C) \subset D$ $b: Y \rightarrow \Sigma$ は
 $C \subset \Sigma$ を center \Rightarrow $\pi^{-1}(C)$ を blowing up. D は Σ の exceptional divisor
 \Rightarrow $\pi^{-1}(D)$ は reduced になる理由は codimension 2 \Rightarrow
 general Γ は non-singular to center Γ \Rightarrow blow up $\pi^{-1}(D)$ は
 Γ になる。 \exists $K_Y = -E - D + D = -E$. \exists k . $N_{E/Y} \cong$
 $N_{E/\Sigma} - C$ \Rightarrow $N_{E/Y}$ は negative \Rightarrow E は Y の $\pi^{-1}(C)$
 exceptional \Rightarrow C (5.1). \Rightarrow C は Lemma 5.1 の条件
 を満たす \Rightarrow C は満たす。

\mathbb{P}^n (or $\mathbb{C}P^n$) simple normal crossing variety \mathbb{P}^n $\begin{matrix} \sqrt{E_0} \\ \sum \end{matrix}$
 pure dimension $(n-1)$ の \mathbb{P}^n non-singular n -fold \sum
 $K_X = -E_0$ と \mathbb{P}^n の \mathbb{P}^n は \mathbb{P}^n の \mathbb{P}^n である。 \mathbb{P}^n は \mathbb{P}^n
 \mathbb{P}^n の center \mathbb{P}^n blow up blow down (2. 純情同型特異点
 点から構成できる \mathbb{P}^n である。 \mathbb{P}^n 以下で具体的に構成して
 みる。

Example 5.3. $H \subset \mathbb{P}^n$ is degree $n+1$ a hypersurface
 \mathbb{P}^n degree 1 の component $n-1$ 次元 \mathbb{P}^n と degree $n+2$
 の irreducible component \mathbb{P}^n の 和 \mathbb{P}^n simple normal
 crossing である。 $C = H \cap H_d$ と \mathbb{P}^n \mathbb{P}^n \mathbb{P}^n .
 H_d is general of degree $d \geq n+2$ の hypersurface
 である。 $\mathbb{P}^n \supset H \supset C$ \mathbb{P}^n . Lemma 5.2 の条件 \mathbb{P}^n \mathbb{P}^n
 \mathbb{P}^n から blow up/blow down により、純情同型特異点から
 なる \mathbb{P}^n exceptional divisor の Hodge type は H の Hodge
 type と同じ \mathbb{P}^n から \mathbb{P}^n なる \mathbb{P}^n 特異点 \mathbb{P}^n (0,1) 型 \mathbb{P}^n である \mathbb{P}^n
 \mathbb{P}^n である (これは \mathbb{P}^n の証明を参照。 cf. [15]) \mathbb{P}^n \mathbb{P}^n である
 任意の $n \geq 2$ と $0 \leq s \leq n-1$ に対して n 次元 (0,1) 型
 純情同型特異点 \mathbb{P}^n が存在 \mathbb{P}^n である \mathbb{P}^n \mathbb{P}^n \mathbb{P}^n \mathbb{P}^n
 \mathbb{P}^n である \mathbb{P}^n \mathbb{P}^n \mathbb{P}^n の計算により \mathbb{P}^n \mathbb{P}^n \mathbb{P}^n
 \mathbb{P}^n である \mathbb{P}^n \mathbb{P}^n \mathbb{P}^n \mathbb{P}^n \mathbb{P}^n

Example 5.4 $D_1 \in$ non-singular elliptic curve.
 $D_2 \in \mathbb{P}^2$ の general position にある 3 本の lines l_1, l_2, l_3
 とある。 $E = D_1 \times D_2 \subset D_1 \times \mathbb{P}^2 = \Sigma$, E 上の ample
 divisor C を blow up blow down してやると、3次元
 の純楕円型特異点 $(0,1)$ 型 $R'_f \otimes \mathcal{O}_X$ の次元が 2
 になるものが得られる。 E 上 D_2 を non-singular l_1, l_2, l_3
 の curve l_1, l_2, l_3 としてやると、同じやり方で純楕円型の $(0,2)$
 型特異点 $R'_f \otimes \mathcal{O}_X$ の次元が 2 になるものが得られる。 もろく
 Abelian surface を negative line bundle a zero section として入れ
 ることもできる。 方法でも得られる。

Th 4.6.2 について

これらにより、 E_f の各々の型に対応する 3次元の純楕円
 型特異点が存在することがわかる。

型	0	2	---	2g	---
0.2	Example 5.3	Ex 5.4	-	-	-
0.1	Example 5.3	Ex 5.4	-	-	-
0.0	Ex. 5.3	環 [16]	-- [16] --	[16]	----- [16]

Remark 1 non-degenerate to hypersurface 特異点が

純惰用型にたがどうかは、その Newton 境界が

$(1, \dots, 1)$ を通るかどうかで判定される。さらに詳しく

$(0, \dots, 0)$ 型にたがのはどのような場合かとやはり

Newton 境界の言葉で判定できる。おもしろいと思われる。

$\{f=0\}$ で定義された純惰用型特異点 (X, x) について

(X, x) が $(0, \dots, 0)$ 型 $\iff f$ の Newton 境界で $(1, \dots, 1)$ を通る
face の次元が d 次元。

という予想があるがこれは一般には天に open である

しかし Newton 境界が単体的複体にたがっているのは

f に対しは正しいことが証明されている (飯田 [17])

Remark 2 Example 5.4 と、渡辺の示した Lemma 2.3.2

以外は、石井の [15] のひきうつしである。

そのため命題等の番号がとんでしまったこととあわびがある。

証明は [15] より詳しく書いておきがある。

Remark 3. Th 2.3 は \mathbb{Q} -Gorenstein 特異点 (rK が Cartier
divisor にたが、CM 条件は仮定しない) に対しても成立する。

REFERENCES

- 1 Deligne, P.: Théorie de Hodge II, III. Publi. Math. I.H.E.S., 40, 5-58 (1971), 44, 5-78 (1974).
- 2 Dolgachev, I.: Cohomologically insignificant degenerations of algebraic varieties. Compositio Math., 42, 279-313 (1981).
- 3 Du Bois, P.: Complexe de de Rham filtré d'une variété singulière. Bull. Soc.math. France 109, 41-81 (1981).
- 4 Friedman, R.: Global smoothings of varieties with normal crossings. Annals of Math. 118, 75-114 (1983).
- 5 Grauert, H.: Über modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. Math. Annalen 146, 331-368 (1962).
- 6 Kulikov, V.: Degenerations of K3 surfaces and Enriques surfaces. Math. USSR Izvestija 11, 957-989 (1977).
- 7 Reid, M.: Canonical 3-folds. Proc. Conf. Alg. Geom., Angers ed. A Beauville, Sijithoff and Nordhoff. (1979).
- 8 ——— : Minimal models of canonical 3-folds. Symposia in Math. 1 Kinokuniya-North Holland (1981).
- 9 Schmid, W.: Variation of Hodge structures; the singularities of

- the period mapping. *Inv. Math.* 22, 211-319 (1973).
- 10 Steenbrink, J.: Cohomologically insignificant degenerations. *Compositio Math.*, 42, 315-320 (1981).
 - 11 ——— : Mixed Hodge structures associated with isolated singularities. *Proc. Sym. in Pure Math.*, 40 Part 2 513-536 (1983).
 - 12 Umezu, Y.: On normal projective surfaces with trivial dualizing sheaf. *Tokyo J. Math.* 4, 343-354 (1981).
 - 13 Vieweg, E.: Rational singularities of higher dimensional schemes. *Proceedings of the A.M.S.* 63, 6-8 (1977).
 - 14 Watanabe, K.: On plurigenera of normal isolated singularities I. *Math. Annalen* 250, 65-94 (1980).
 - 15 Ishii, S.: *On normal isolated Gorenstein singularities. preprint*
 16. Tsuchihashi : *Higher dimensional analogues of periodic conti. fractions and cusp singularities. Tohoku Math. J. 35. 607-639 (1983)*
 17. Iida, S.: *Letter to K.Watanabe.*