数理解析研究所講究録
535巻 1984年 145-160

複素射影平面の重さつき直線族に対応する複素曲面

九大・理 加藤十吉 (Mitsuyoshi Kato).

§1. 複素軌道体.

compact 複素代数的 variety X とその上の関数 $b: X \to \mathbb{N}=\{1,2,\cdots\}$ を一諸にして, (X,b) を b-空間という。たとえば, 複素多様体 M の自己正則同型群 G が真に不連続に作用していれば, ((G,M) のことを固有変換群という) これから, その商 variety X 及び関数 $b: X \to \mathbb{N}$ が $b(x)=\# G_z$ (G_z の位数) ($x=G\cdot z\in X$) 但し, G_z は $z\in M$ での G の isotropy 群, と定義できる。この b-空間 (X,b) を $G\backslash M$ と表し, 固有変換群 (G,M) の軌道体という。逆に, b-空間 (X,b) に対し, 固有変換群 (G,M) が存在し, $G\backslash M \cong (X,b)$ ($\cong$ は b を保つ正則同型) となるとき, (X,b) は一意化可能であるといい, (G,M) のことを (X,b) の一意化という。もし, M が compact であれば, G は有限群であり, (G,M) を (X,b) の有限一意化といい, (X,b) は有限一意化可能であるという。 この考え方から, 佐武V-多様体に, その各点上での

isotropy 群の位数を付け加えて，それを b-空間として表示することにより，(抽象) 軌道体の定義がえられる。

b-空間 (X, b) が 軌道体 であるとは，X の任意の点 x に対し，x の X における開近傍 X_x 及び $\mathbb{C}^n$ の開集合 V_x 上の 有限変換群 (G_x, V_x) が存在して，$(X_x, b|X_x) \cong G_x \backslash V_x$ となるときをいう。

一般の b-空間 (X, b) に対し，

$$\Sigma b = \{x \in X \mid b(x) \geq 2\} \text{ の閉包}$$

と定義する。軌道体 (X, b) に対し，Σbには stratification で，各 stratum 上で b が定値となるようなもので，strata の個数が最小となるものが自然に存在している。この stratification を $\mathcal{S}$ と表す。$\mathcal{S}$ の X で余次元 1 の strata を $B_1, \cdots, B_r$ とする。($r = 0$ でも以下は問題はないが，$r \geq 1$ の場合が興味深い本質的な場合である。)

$X_0 = X - \Sigma b$, $H = \pi_1(X_0, *)$ とおく。このとき，各 B_i は X_0 の部分多様体で，その法円板のふちを一周する X_0 の loop μ_i をとり，X_0 の基本群 H のえとみなす。

$$\mu^b = \{\mu_i^{b(B_i)} \mid i = 1, \cdots, r\} \subset H$$

の H における正規閉包 (μ^b を含む最小の正規部分群) を

$(\mu^b)^H$ と表す。

次に，Σb の各点 x で局所的に同じ考察をする。x の周近傍 X_x で，$(X_x, b|X_x) \cong G_x \backslash V_x$（上の定義）となるもので，$G_x \subset U(n)$，$V_x = B^n_x(\varepsilon)$ (ε-ball) がとれる。

$(X_x, b|X_x)$ に対し，上と同様に，

$$X_{x,0} = X_x - \Sigma(b|X_x) = X_x - \Sigma b \ , \quad H_x = \pi_1(X_{x,0}, *_x)$$

とおき，$(\mu_x)^{b|X_x}$ を定め，$((\mu_x)^{b|X_x})^{H_x} = (\mu_x{}^b)^{H_x}$ と略記する。$*_x$ と $*$ を X_0 で結ぶことにより，包含写像 $X_{x,0} \hookrightarrow X_0$ のひきおこす基本群の準同型を

$\eta_x : H_x \to H$ とする。

H の正規部分群 K が b－完備であるとは，Σb の任意の点 x で，η_x に自然準同型 $H \to H/K$ を合成した準同型 $\eta_x(K) : H_x \to H \to H/K$ の核 $\mathrm{Ker}\ \eta_x(K)$ が $(\mu_x^b)^{H_x}$ に一致するときをいう。

次の定理は軌道体 (X, b) が一意化可能となる条件及び一意化の分類が通常の正則 (i.e. ガロア) 被覆と同じように，(i.e. $\Sigma b = \emptyset$ としたとき) $X_0 = X - \Sigma b$ の基本群 H の正規部分群との対応で述べられることを主張するものである。

定理 1. （[K_1]） （X, b）を軌道体とする。

(1) （X, b）の一意化（G, M）の正則 G-同型類と $H=\pi_1(X-\Sigma b, *)$ の b-完備正規部分群 K とが 1対1 に対応している。

とくに，一意化可能のとき，$(\mu^b)^H$ は最小の b-完備正規部分群であり，結局，

一意化可能 $\Longleftrightarrow$ $\tilde{\eta}_x : H_x/(\mu_x^b)^{H_x} \to H/(\mu^b)^H$: 単射

が成立する。

(2) （X, b）が一意化可能のとき，$(\mu^b)^H$ に対応する一意化を $(\hat{G}, \hat{M})$ とすれば，これは，任意の一意化（G, M）に対し，同変被覆 $\varphi : (\hat{G}, \hat{M}) \to (G, M)$ が存在するという意味で普遍一意化となっている。$\hat{G}$ のことを（X, b）の基本群 $\pi_1(X, b)$，$\hat{M}$ のことを（X, b）の普遍分岐被覆などともいう。

例.（1次元のとき）。 X を compact Riemann 面とする。b-空間（X, b）が軌道曲線（複素1次元軌道体）である為の必要十分条件は，$\Sigma b = \{p_1, \cdots, p_r\}$（有限集合）となることである。このとき，

$$\pi_1(X, b) = H/(\mu^b)^H = \pi_1(X_0)/\mu_1^{b_1} = \cdots = \mu_r^{b_r} = 1,$$

（$\pi_1(X_0)$ に関係 $\mu_1^{b_1} = \cdots = \mu_r^{b_r} = 1$ を加えたもの; $b_i = b(p_i)$），

はFuchs群である。

軌道曲線(X, b)のオイラー標数$e(X,b)$を

$$e(X, b) = e(X) + \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{1}{b_i} - 1\right)$$

，但し，$e(X)$はXのオイラー標数，

と定義すると，(X, b)が一意化可能であれば，

(S) $\hat{M} = \mathbb{C}P^1$（射影直線）$\Leftrightarrow e(X, b) > 0$

(E) $\hat{M} = \mathbb{C}^2$ $\Leftrightarrow e(X, b) = 0$

(H) $\hat{M} = B^1$（open unit disk）$\Leftrightarrow e(X, b) < 0$

となることも周知の明快な事実である。

驚ろくべきことに，一意化可能でない(X, b)は，

$X = \mathbb{C}P^1$であって，$r = 1$ または $r = 2$ かつ

$b_1 \neq b_2$ の場合に限られる。（このとき，$X_0 = X - \{p_1, \cdots, p_r\}$の基本群が単純すぎるのである。）

Fenchelによって予想され，Foxによって証明された「Fuchs群（(E)又は(H)の場合）にはtorsion free，有限指数の正規部分群が存在する」という定理により，(X, b)が一意化可能ならば，有限一意化(G, M)が存在し，

$$e(M) = \#G\, e(X, b)$$

となっている。（[F]）。

1次元で示される事実を高次元化するのは自然である。以下，2次元の場合について考察する。

§2. 重さつき曲線配置に関する軌道曲面と準軌道曲面.

非特異 compact 複素曲面のことを曲面ということにする。曲面 X 上の曲線 C を既約成分 C_i で $C=\bigcup_{i=1}^{r} C_i$ と表したとき,

(1) 各 C_i が非特異であり,

(2) C_i と C_j $(i\neq j)$ がたかだか1点のみで正規交叉している

ときに, C のことを X 上の曲線配置という。各 C_i に自然数 $b_i \geq 2$ が指定されているとき, 重さつき曲線配置という。

曲線配置 C の特異点は多重点であるが, 2重点(正規交叉点)以外の特異点を特異多重点であるという。特異多重点のない曲線配置のことを正規交叉であるという。b-曲面 (X, b) は, Σb が曲線配置 $C=\bigcup_i C_i$ となっていて, b が 各 $C_i-\Sigma C$ 上で一定値 b_i のとき, 重さつき曲線配置 $\bigcup(C_i, b_i)$ に関する b-曲面という。

次の結果は $U(2)$ の有限複素鏡映群に関する結果から直ちに示せる;

(X, b) が 軌道曲面(局所一意化可能) $\Longleftrightarrow$

ΣC の点 q が

(i) 2重点 $q\in C_i\cap C_j$ $(i\neq j)$ $\Rightarrow$ $b(q)=b_i\cdot b_j$, 又は,

(ii) 特異多重点であれば, 必らず3重点 $q=C_i\cap C_j\cap C_k$

$(i \neq j \neq k \neq i)$ であって，$b_i \leq b_j \leq b_k$ とすると，次の場合となり，$b(q)$ は b_i, b_j, b_k で決ってしまう。

b_i	b_j	b_k	$b(q)$	
2	2	n	$(2n)^2$	
2	3	3	$(2\cdot 6)^2$	$(2[b_i, b_j, b_k])^2$
2	3	4	$(2\cdot 12)^2$	，但し，$[\ ,\ ,\ ]$ は
2	3	5	$(2\cdot 30)^2$	最小公倍数。

このように，曲線配置 $C=\cup C_i$ に関する軌道曲面 (X, b) は強い制限をうける。しかも，重さつき曲線配置 $\cup(C_i, b_i)$ のみで決定される。とくに，重さつきの正規交叉曲線配置から軌道曲面が一意的に定まってしまうこと，そして，一般の曲線配置に関する b-曲面 (Y, b) の各特異多重点を *blowing up* することで正規交叉化ができることに注目する。そこで，(Y, b) を曲線配置 $C=\bigcup_i C_i$ に関する b-曲面とし，C の各特異多重点を *blowing up* してえられる曲面を X，その *resolution* を $p: X \to Y$ とする。

$$C_i' = \overline{p^{-1}(C_i - \Sigma C)} \quad (C_i \text{ の proper transform}),$$

$$E_p = p^{-1}(p) \quad (p \text{ に対応する例外曲線})$$

とおく。C_i' に $b(C_i - \Sigma C) = b_i$，E_p に $b(p) = b_p$ を指定し，X の重さつき正規交叉曲線配置 $\bigcup_i (C_i', b_i) \cup \bigcup_p (E_p, b_p)$

が得られる。この重さつき正規交叉曲線配置の定める軌道曲面を(X, b)と表し、$\rho : (X, b) \to (Y, b)$のことを正規交叉化という。以後、曲線配置$C = \bigcup_i C_i$に関するb-曲面(Y, b)の一意化等はすべて(X, b)のそれ等を意味するものであるとし、(Y, b)のことを準軌道曲面という。

(G, M)が(X, b)の一意化であれば、*normal singularity* を特異点としてもちうる曲面VにGは作用し、G-同変 *resolution* $\varphi : M \to V$ が存在して次の図式を可換にすることが知られる。

$$\begin{tikzcd}
(G, M) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "G\backslash"'] & (G, V) \arrow[d] \\
(X, b) \arrow[r] & (Y, b)
\end{tikzcd},$$

但し、Cの特異多重点pで、$p = G \cdot z \ (z \in V)$のとき、$\# G_z \neq b(p)$であることに注意する。この為に、$(Y, b)$のことを準軌道曲面という呼び方をしたのである。$b(p)$は$E_p$の重さ$b(p)$を指定する為に使われているのである。又、$Y$上の重さつき曲線配置$\bigcup (C_i, b_i)$については、各特異多重点$p$に$b_p$を指定することで、準軌道曲面$(Y, b)$がえられる。

次の定理2は$Y = \mathbb{C}P^2$上に(重さつき)直線族$\bigcup (L_i, b_i)$があれば、これに対し曲面が対応することを示している。

定理 2 ([K_2]). 複素射影平面 $\mathbb{C}P^2$ 上の重さつき直線族(i.e. 直線配置)$\bigcup(L_i, b_i)$ に関する準軌道曲面 $(\mathbb{C}P^2, b)$ が次の条件(1), (2)を満たせば一意化可能であり，しかも有限一意化が存在する。

(1) 各直線 L_i 上に必らず特異多重点が存在する。

(2) 各特異多重点 p で，$b(p) = \mathrm{L.C.M.}\{b_i \mid L_i$ は p 以外に特異多重点を含む$\}$.

(注) 条件(1)を仮定しないと，一般には一意化可能にはならない。例えば，異なる重さをもつ2直線の場合を考えれば充分である。交点を通る直線について，Riemann面のときの一意化可能でない"部分軌道曲線"がひきおこされている! 曲面の場合でも $H = \pi_1(X - \Sigma b) \cong \pi_1(Y - \Sigma b)$ が充分複雑であることが要求される。(2)では $b(p)$ の指定の仕方を1つ選択してある。実際上，$b(p)$ はこれ以外の値をとりうるのであるが，この場合(2)でとられる一意化を[K_2]では主一意化と呼んだのである。$b(p)$ のどのような値に対し定理2が成立するかの一般的規準はないが，基本群 H の構造と深くかゝわっていることは当然である。我々の方法でも特異多重点の分布から，条件(2)を"$b(p)$ の約数"にとりかえることが出来る場合もあるが $b(p)$ の倍数ではどうかについては判然としていない。

§3. 双曲的軌道曲面と特性数

軌道曲面 (X, b) が有限一意化可能であり，その普遍分岐被覆が open unit ball $\mathbb{B}^2(\subset\mathbb{C}^2)$ であるとき，双曲的と名付ける。いいかえれば，$\mathbb{B}^2$ 上の固有変換群 $(\Gamma, \mathbb{B}^2)$ が存在し，Γ には $\mathbb{B}^2$ に固定点なしで作用する有限指数の正規部分群 G が存在して，$\Gamma\backslash\mathbb{B}^2\cong(X, b)$ となるときをいう。

重さつき正規交叉曲線配置 $\cup(D_j, b_j)$ に関する軌道曲面 (X, b) がどの様な条件のもとで双曲的になるかを，Miyaoka-Yau の不等式の等式の成立する場合を考察し，調べてみよう。つまり，軌道曲面 (X, b) の特性数を考える。まず，X のオイラー標数 $e(X)$ に補正項を加えて，

$$e(X,b) = e(X) + \sum_j\left(\frac{1}{b_j}-1\right)\left(e(D_j)-d_j\right) + \sum_q\left(\frac{1}{b_ib_j}-1\right)$$

として，この有理数のことを (X, b) のオイラー標数 $e(X,b)(=c_2(X,b))$ と定義する。
但し，d_j は D_j 上の2重点の個数 $=\#(D_j\cap\Sigma D)$ であり，$\sum_q$ は2重点 $q=D_i\cap D_j$ にわたる和を表す。
次に，X の標準因子 $K(X)$ に補正項を加えて，

$$K(X,b) = K(X) + \sum_j\frac{b_j-1}{b_j}D_j$$

とし，この有理係数因子のことを (X, b) の標準因子と

定義する。

(注) $b\equiv 1$ (i.e. $\Sigma b=\emptyset$) のとき, $K(X,1)=K(X)$, $e(X,1)=e(X)$ となる。以後, (X,b) に対する定義のみを与える。

こうして, (X,b) の chern 数

$$c_2(X,b)=e(X,b)\quad,\quad c_1^2(X,b)=(K(X,b))^2$$

がえられる。 また, (X,b) は D_j に部分軌道曲線

$$(X,b)|_{D_j}=\left(D_j,\frac{1}{b_j}(b|D_j)\right)$$

をひきおこし, このオイラー標数 $e\left(D_j,\frac{1}{b_j}(b|D_j)\right)$ を $e^b(D_j)$ と表せば,

$$e^b(D_j)=e(D_j)+\sum_{d_j}\left(\frac{1}{b_{j_k}}-1\right)$$

が成立する。但し, $\sum_{d_j}$ は D_j 上の2重点 $D_j\cap D_{j_k}$ にわたる和を表す。

(X,b) に有限一意化 (G,M) が存在するとき, その商写像を $\pi:M\to X$ とすれば, $\deg\pi=\#G$ に注意し,

$$e(M)=\#G\cdot e(X,b)\quad,\quad K(M)=\pi^*K(X,b),$$

$$c_1^2(M)=\#G\cdot c_1^2(X,b),$$

また, $\pi^{-1}(D_j)$ の既約成分を $\tilde{D}_j$ とすると,

$$e(\tilde{D}_j)=\deg(\pi|\tilde{D}_j)\cdot e^b(D_j)\quad,\quad(\tilde{D}_j)^2=(\deg\pi|\tilde{D}_j)\cdot\frac{D_j^2}{b_j}$$

が成立することがわかる。

(X,b) の Miyaoka-Yau 特性数 $\varepsilon(X,b)$ を

$$\varepsilon(X,b)=3c_2(X,b)-c_1^2(X,b)$$

と定義する。

$$\varepsilon_X^b(D_j) = \left(K(X,b) + \frac{3D_j}{b_j}\right)D_j = 2\frac{D_j^2}{b_j} - e^b(D_j)$$
と定義し，$b \equiv 1$ のときには，$\varepsilon_X(D_j)$ と表す。

$\varepsilon_X(D_j)$ と $\varepsilon_X^b(D_j)$ の平均を $\tilde{\varepsilon}_X^b(D_j) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_X(D_j) + \varepsilon_X^b(D_j)\right)$ とする。次の結果は，Hirzebruch の報告（1984.3.22 の九大での講演）を軌道曲面の言葉で書き直したものである。

定理 3.（Hirzebruch と Höfer による）。

(1) $\varepsilon(X,b) = \varepsilon(X) + \sum_j \frac{b_j - 1}{b_j}\tilde{\varepsilon}_X^b(D_j)$ 。

(2) (X,b) が (Y,b) の正規交叉化であるとき，§2 の記号のもとで，上式は次の様に書きかえられる：

$$\varepsilon(X,b) = \varepsilon(Y) + \frac{1}{2}\sum_i \frac{b_i - 1}{b_i}\left(\varepsilon_Y(C_i) + \varepsilon_X^b(C_i')\right) - \frac{1}{2}\sum_p \frac{b_p + 1}{b_p}\varepsilon_X^b(E_p) \quad \text{。}$$

(3) とくに，$Y = \mathbb{C}P^2$，C が直線族 $\bigcup_{i=1}^r L_i$ のとき，

$$\varepsilon(X,b) = \frac{1}{2}\left\{\sum_i \frac{b_i - 1}{b_i}\varepsilon_X^b(L_i') - \sum_p \frac{b_p + 1}{b_p}\varepsilon_X^b(E_p)\right\}$$

が成立する。ここで，

$$\varepsilon_X^b(L_i') = (d_i + s_i) - 2 - \sum_{d_i}\frac{1}{b_{i_p}} - \sum_{s_i}\frac{1}{b_p} - \frac{2(s_i - 1)}{b_i},$$
$$\varepsilon_X^b(E_p) = r_p - 2 - \sum_{r_p}\frac{1}{b_{i_\ell}} - \frac{2}{b_p}$$

である。但し，s_i は L_i 上の特異多重点の個数，$\sum_{s_i}$ は L_i 上の特異多重点 p にわたる和を表し，r_p は特異多重点 p の重複度，$\sum_{r_p}$ は直線 $p \in L_{i_\ell}$ にわたる和を表す。

(X, b) の標準次元（小平次元）$\kappa(X, b)$ を X の $K(X, b)$－次元 $\kappa(K(X, b), X)$ のことであると定義する。

勿論，十分大なる自然数 m について，$mK(X, b)$ を整係数として $\kappa(mK(X, b), X)$ を考えるという意味であり，well-defined される。

$b \equiv 1$ のとき，$\kappa(X, 1) = \kappa(X)$，

各 $b_j \to \infty$ のとき，$K(X, b) \to K(X) + \sum_j D_j$

より，$\kappa(X, b) \to$ ($X_0 = X - \sum b$ の対数的小平次元)

となる。

この様に，軌道体は曲面論と対数的曲面論をつなげている都合の良い対象であるとも考えられる。

(X, b) が有限一意化可能であるとき，結局，

$\varepsilon(X, b) = 0$ かつ $\kappa(X, b) = 2 \Rightarrow (X, b)$ が双曲的

が成立する。

$Y = \mathbb{C}P^2$，$C = L = \cup L_i$ とした準軌道曲面の正規交叉化 (X, b) について具体的に十分条件を与えよう。特異多重点 $p \in \Sigma b$，直線 L_i が球面的であるとは，$e^b(E_p) > 0$，$e^b(L_i') > 0$ のときをいう。

定理 4. 直線族 $L=\bigcup_{i=1}^{r} L_i$ に関する準軌道曲面 $(\mathbb{C}P^2, b)$ の正規交叉化を (X, b) とする.

(仮定I) L の6本の部分直線族 $l=\bigcup_{k=1}^{6} L_{i_k}$ で次の性質をみたすものが存在する。

(1) ある L_{i_k} に対し, $b_{i_k} \geq 3$。

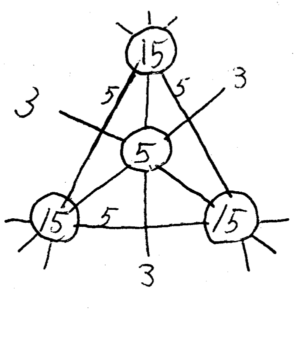
(2) l 上にある L の特異多重点 p の l における重複度を r_p' とすると, (i) $b_p=1 \Rightarrow r_p' \leqq 2$ (ii) $b_p \geqq 2 \Rightarrow r_p' \leqq 3$.

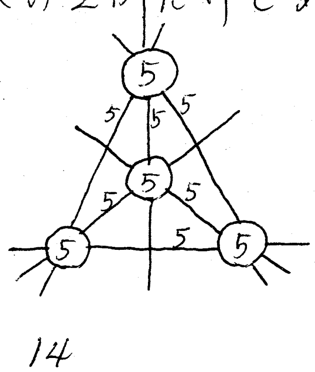
この仮定のもとに, $K(X, b)$ は effective かつ positive となる。さらに,

(仮定II) 各 L_i 上に特異多重点が存在するとし, 各特異多重点 p, 直線 L_i が球面的ではないとする。

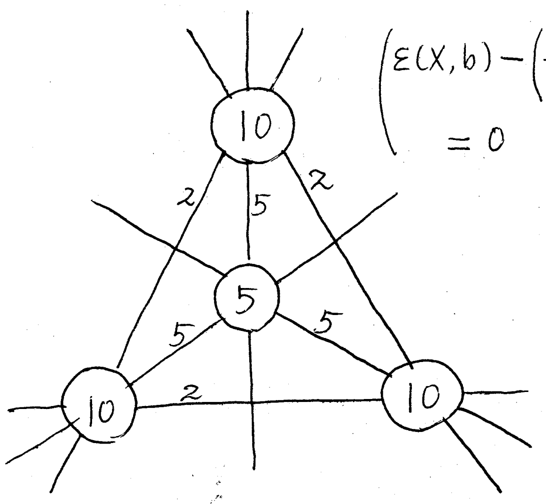
このとき, (X, b) は general type (i.e. $\kappa(X, b)=2$) であり, したがって, (X, b) が双曲的である為には (X, b) が有限一意化可能 かつ $e(X, b)=0$ が成立することが必要十分である。($b_1=\cdots=b_r=n$ のとき, [H]参照)

定理2の条件をみたす双曲的準軌道曲面で, その直線族が完全4角形をなすものは次の2例だけである。

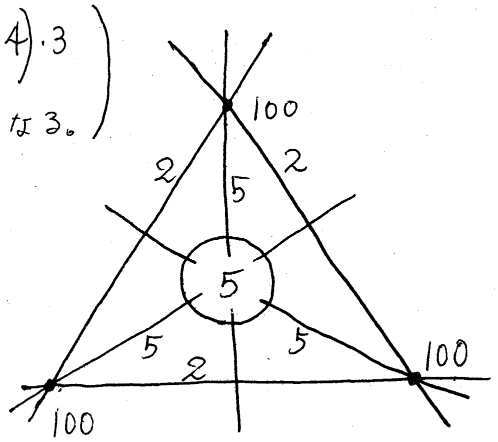




次の例は、3つの特異多重点（$b(p)=10$）で局所一意化可能である。定理2で有限一意化を構成すると、これらの特異多重点に挿入した例外曲線は第1種例外曲線にもちあげられ、blow down することができる。その結果は残りの1つの特異多重点（$b(p)=5$）を blowing up した軌道曲面（このとき、特異多重点 p で $b(p)=(2\cdot 5)^2=100$）の一意化となっている。（右図参照）



$\left(\varepsilon(X,b)-\left(\frac{1}{10^2}\cdot 4\right)\cdot 3 = 0\right.$ となる。$\left.\right)$



完全4角形に関するこれらの結果は寺田氏[T]の結果の一部である。著者はその結果を理解する為の吉田氏の助言に感謝する。完全4角形の場合に定理2からえられる双曲的なものは以上の3種のものしかない。[T]では、$b_i=\infty$、又は、$b_p=\infty$ の場合も含めて計27個あることが示されている。

Reference

[F] R. H. Fox, *On Fenchel's conjecture*, Mat. Tidsckrift B (1952), 61-65.

[H] F. Hirzebruch, *Arrangements of lines and algebraic surfaces*, Arithmetic and Geometry, vol II, Progress in Math. vol 36, Birkhäuser Boston-Basel-Stuttgart (1983), 113-140.

[K_1] M. Kato, *On uniformizations of orbifolds*, (preprint).

[K_2] M. Kato, *On the existence of finite principal uniformizations of $\mathbb{C}P^2$ along weighted line configurations*, Memoires of the Faculty of Science, Kyushu Univ. Ser. A, vol 38 (1984), 127-131.

[K_3] 加藤十吉, $\mathbb{C}P^2$の直線族にそった分岐被覆の構成, シンポジウム「代数幾何学と応用を見込んだトポロジー」記録 (於城崎町, 1983年8月).

[T] T. Terada, *Fonctions hypergéométriques F_1 et fonctions automorphes I*, Journ. Math. Soc. Japan, vol 35 (1983), 451-475.