数理解析研究所講究録
535巻 1984年 57-60

$\mathbb{CP}_2$ 上の rank 3 の微分方程式

九大 理　吉田正章(Masaaki YOSHIDA)

§1

$X = \mathbb{CP}^2$ 上定義された 線型，Fuchs 型，解空間の次元(rank)有限なる 偏微分方程式系 を考える。

定義 "よい"方程式とは，上記の様な方程式でかつ

(1) Orbifold-uniformizing differential equation (OUDE) で，

(2) Accessory parameter free で，

(3) irreducible であるものを言う。

ここで，上で使った言葉を簡単に説明する。

Obifold とは 多様体 X と分岐曲線 C_i と 分岐指数 b_i の組のことである。これを (X, b) と書くことにする。

OUDE：方程式(E)が orbifold (X, b) の OUDE であるとは，M を (X, b) の universal uniformization (i.e. C_i と b_i 次の分岐をする最大の分岐 covering) としたとき projection $: M \to X$ の逆写像が (E)の解の組になっていること。

Acc. par. free：方程式が特異点のまわりの local behavior で定ってしまうこと。

Irred.：対応する vector bdle が階数の低いものの直和に分解しないこと。Reducible のことをここでは"自明"と呼ぼう.

§2 前節をよりよく理解する為に $X=\mathbb{CP}_1$ のときを復習しよう。

分岐点の数	(X, b)	OUDE	M	判定
1ヶ	un-uniformizable	なし	なし	"だめ"
2ヶ	$b_0=b_1(=b)$ のとき だけ uniformizable	$w''+\frac{1-1/b^2}{x^2}w=0$ 解はベキ函数	$\mathbb{CP}_1$	"自明"
3ヶ	b_0, b_1, b_∞ 任意.	GaußHGDE $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$		
	$1/b_0+1/b_1+1/b_\infty>1$	$b_0=1/\lvert 1-\gamma\rvert$	$\mathbb{CP}_1$	"よい"
	〃 $=1$	$b_1=1/\lvert\gamma-\alpha-\beta\rvert$	$\mathbb{C}$	
	〃 <1	$b_\infty=1/\lvert\alpha-\beta\rvert$	D	
$\geqq 4$	b_j 任意	Acc. par. あり	D	"むず"

むずかしいの略

要するに 一次元のときは, GaußHGDE (hypergeometric differential equation) だけが"よい"方程式で, あとは,"自明"か"むず"となる。

§3 二次元のときは, 分岐点でなく曲線になるので, だめ, 自明, よい, むず の区別が, 点の数という訳にはゆかない。

だめな例： 非特異 r 次曲線と b (イト) 等.

自明な例： $xyz=0$ 等々.

問題 "よい"方程式をみつけて 研究せよ.

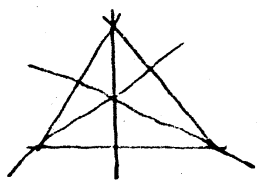
現在までに知られている"よい"方程式と 対応する orbifold を報告する. Rank = 3 でなくてはならない。方程式の形は

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_1^2 P_{ij}^k(x)\frac{\partial w}{\partial x_k} + P_{ij}^0(x)\, w \qquad i,j=1,2$$

となる. 係数は有理式. $P_{ij}^0(x)$ は $P_{ij}^k(x)$ で定る. P_{ij}^k の分子の次数は分母の次数より少くとも1つ小さい。$P_{ij}^k(x)$, $i,j,k=1,2$ の共通分母を $F(x)$ とおく.

[1] 完全四辺形 $F(x) = xy(x-1)(y-1)(x-y)$.

OUDE は Appell の2変数超幾何微分方程式 F_1 といわれているものになる. これは, Picard, 寺田俊明, 志賀弘典, 佐々木武, Deligne, Mostow 等により研究され, ほぼ完成した. 今や有名だろうと思う.



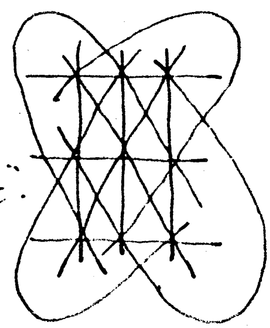
[2] Hessian configuration

$$F(x) = xy \prod_{\nu,\mu=0}^{2} (\omega^\nu x + \omega^\mu y + 1) \qquad \omega = 1^{1/3}$$

$$= xy\left((x^3+y^3+1)^3 - 27x^3y^3\right)$$

Hessian group G_{216} 不変.

OUDE は発見されたが, くわしい研究まだ.



[3] Kleinian configuration.

$F(x)$: klein の単純群 G_{168} ($\cong PSL(2, F_7)$) の 21次の反不変式.

OUDE は研究集会の講演の時は計算途中であったが、10日後に、みつかった。

注意. [2]と[3]は、HIRZEBRUCH の計算と、Yau-宮岡の定理により、§1 の条件(1) をみたす OUDE の存在は理論的に分っていた。方程式をみつける(access.par free でなかったらみつからないはず)のに手間取った訳である.

今後 よい方程式 をもっとみつけて、くわしく調べたい。最後に、"むず" な方程式は、存在は予想されているものの(候補あり)、未だ explicit に書き下すに至ってない。

終

告白：九大理 数学教室の 宇加治靖子氏に 深く感謝する。彼女の助力なくして計算は完成しなかったであろう.