数理解析研究所講究録
535巻 1984年 23-56

K3曲面の自己同型群について

名大理学部　向井　茂（Shigeru Mukai）

コンパクト複素2次元多様体 S は次の条件をみたす時（極小）K3曲面と言う。

1）致る所で消えない S 上の正則 2-form ω がある。

2）$B_1 = 0$.

K3曲面に関しては種々の研究が現在も活発に行なわれつつあるが、ここではその有限自己同型群について考察したい。4次曲面はK3曲面の特殊な場合であり、平面6次曲線からもK3曲線を構成することができる。よって、その意味ではK3曲面の自己同型は古くから研究されていたことになるが、統一的な研究は Nikulin [10] によって最初に行なわれた。K3曲面 S の自己同型は S 上の 2-form ω を固定するかしないかによって全く異った性質をもつ2つの type に分れるが、[10] では、2-form ω を固定しながらK3曲面に作用する有限アーベル群を作用のしかたもこめて完全に分類している。

ここでは、K3曲面に作用できる非可換な有限群の分類について述べたい。　また、K3曲面に作用する群とMathieu群との関係，K3格子とLeech格子との関係等についても触れたい。

先ずK3曲面の基本的な例をあげよう。

例1)　$C: F_6(X, Y, Z)=0$ in $\mathbb{P}^2$ を非特異な平面6次曲線とする。　Cで分岐する$\mathbb{P}^2$の2重被覆

$$S: \tau^2 = F_6(X, Y, Z) \qquad S \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^2$$

は（次数2の偏極）K3曲面である。　$x = X/Z$，$y = Y/Z$ を非斉次座標とするとき $\omega = \dfrac{dx \wedge dy}{\tau}$ が致る所で消えないS上の2-formである。

例2)　4次曲面　$S: F_4(X, Y, Z, T)=0$ in $\mathbb{P}^3$ は（次数4の偏極）K3曲面である。　$x = X/T$，$y = Y/T$，$z = Z/T$ を非斉次座標とするとき，$\omega = \mathrm{Res}\dfrac{dx \wedge dy \wedge dz}{F_4(x, y, z, 1)}$ がS上の正則2-formである。

例3)　$\mathbb{P}^4$の中における2次超曲面 $Q=0$ と3次超曲面 $D=0$ の完全交叉　$S: Q = D = 0$ in $\mathbb{P}^4$.

例4)　$\mathbb{P}^5$の中における3つの2次超曲面の完全交叉

$$S: Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0 \quad \text{in } \mathbb{P}^5$$

例5)　Tを複素2次元トーラスとし ι は $t \in T$ を $-t \in T$ に移すTの自己同型とする。　商曲面 T/ι は16個の通常2

重点をもち、その極小非特異化 $\widetilde{T/\iota}$ は K3 曲面になる。

S はコンパクトだから S 上の正則 2-form は全て ω の定数倍である。よって S の任意の自己同型は1次元ベクトル空間 $\mathbb{C}\omega$ を保つ。即ち、g が自己同型ならある定数 $a_g \in \mathbb{C}^\times$ があって $g^*\omega = a_g\,\omega$.

定義 (0.1) ω を固定する (即ち $a_g = 1$ となる) K3曲面の自己同型を N-自己同型と呼ぶ。また、群 G の K3 曲面への作用は ω を固定している時 N-作用であると言う。なお以下"作用"と言う時は常に効果的な作用を指すものとする。

N-自己同型の例: ① Fermat 曲面 $S: X^4+Y^4+Z^4+T^4=0$ in $\mathbb{P}^3$ の射影的な自己同型がいつ N-自己同型であるかをみよう。S の射影的な自己同型には対角的なもの

$$\delta(a,b,c):\quad X'=i^aX,\ Y'=i^bY,\ Z'=i^cZ,\ T'=T$$

と座標 X, Y, Z, T の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ とがあり、射影自己同型は全て $\sigma\circ\delta(a,b,c)$ の形に一意的に書ける。$g=\sigma\circ\delta(a,b,c)$ に対しては $a_g = \mathrm{sgn}(\sigma)\, i^{a+b+c}$ となることが、上の例 2) における ω の description から容易にわかる。よって g は $\mathrm{sgn}(\sigma) = i^{a+b+c}$ の時に N-自己同型になる。

② S はK3曲面で elliptic fibration $\pi : S \longrightarrow \mathbb{P}^1$ をもつとする。更に2つの π の sections C_0, C_1 があるとする。π の general な fibre は楕円曲線だから $C_0 \cap F$ を原点としてアーベル多様体と思える。そこで、F の各点を $C_1 \cap F$ だけずらす(translate)する写像を考える。これを非特異な fibre で一斉に行なうことにより、S の有理自己同型射 g がえられる。S の極小性より、g は本当の自己同型になる。この時、g は S の N-自己同型である。

<u>N-作用可な9個の有限群</u>　K3曲面に N-作用できる有限群では次の9個のものが重要である。先づ、群の記号とその位数とを書く。

(0.2)

記号	$L_2(7)$	$\mathfrak{A}_6$	$\mathfrak{S}_5$	M_{20}	F_{384}	$\mathfrak{A}_{4,4}$	$2^4 \cdot D_{12}$	T_{192}	M_9
	単純				可解				
位数	168	360	120	960	384	288	192	192	72

$L_2(7)$ は有限 Chevalley 群 $PSL(2, \mathbb{F}_7)$ を示す Artin の記号、$SL(3, \mathbb{F}_2)$ とも同型である。$\mathfrak{A}_6$ は6次交代群、$\mathfrak{S}_5$ は5次対称群である。　M_{20} は位数16の初等アーベル群 E_{16} と5次交代群 $\mathfrak{A}_5$ との半直積 $E_{16} \rtimes \mathfrak{A}_5$。但し、$\mathfrak{A}_5$ の E_{16} への作用は(自明ではなく)E_{16} 上のある非退化2次形式を不変にするもの。F_{384} は上の例①でみた Fermat 4次曲面の射影自己同型で N-自己同型なもの全体のなす群。$\mathfrak{A}_{4,4}$ は8次対称群

$\mathfrak{S}_8$ における $\mathfrak{S}_4\times\mathfrak{S}_4$ と $\mathfrak{A}_8$ の共通部分。残りの3位については §1 で説明する。

定理(0.3)　上の9つの有限群は全てある K3 曲面に N-作用することができる。

この定理は2通りに証明される。1つは各々の群に対してそれが N-作用する K3 曲面を具体的な式で与える方法で、これは §1 で詳しく述べる。もう1つは先に周期の方を構成しておいてから、その周期をもつ K3 曲面に群が N-作用することを Torelli 型定理を使って示す方法である。これには Mathieu 群と Leech 格子が重要な役割を果す。

さて、上の9位の群が重要であると書いたのは、定理(0.3)の逆が正しい様に思えるからである。

予想(*)(0.4)　K3 曲面に N-作用できる有限群は全て上の9つの群のいづれかのある部分群と同型である。

(*) この予想は一応"証明"されたが、何度か確認(特に群の位数が $3\cdot2^n$ の時)する作業が残っている。たとえ違っていても非常に小さい修正しか必要ないと思う。

注意(0.5)　上の9つの群のいずれかが代数的K3曲面に$\mathcal{N}$-作用した時，Sは必然的にPicard数が20になる。よって，[12]よりSの自己同型群は無限群になる。そこでの証明と$\mathcal{N}$-自己同型の例②より，Sは無限位数の$\mathcal{N}$-自己同型をもつ。

$\mathcal{N}$-作用可な群とMathieu群　上の9つの群とMathieu群との関係について述べる。24個の点に5重推移的に作用する置換群で位数244823040(=24·23·22·21·20×48)のものがある。これがMathieu群と呼ばれるものでM_{24}でもって表わされる。Mathieu群には他にM_{23}, M_{22}, M_{12}, M_{11}の4つがあり，どれもみな散在する単純群である。さて，(0.2)の9個の群は全てM_{24}の部分群と同型である。例えば，4番目のM_{20}は24点のうち4点を点ごとに止める作用全体のなす部分群になっている。他の群も，24点を適当に5分割してその分割を止める作用の全体のなすM_{24}の部分群と同型になる。

(0.6)　群　群を与える24の分割

$L_2(7)$	1 + 1 + 7 + 7 + 8
$\mathfrak{A}_6$	1 + 1 + 6 + 6 + 10

$\mathfrak{S}_5$	$1+1+2+5+15$
M_{20}	$1+1+1+1+20$
F_{384}	$1+1+2+4+16$
$\mathfrak{A}_{4,4}$	$1+1+3+3+16$
$2^4.D_{12}$	$1+2+2+3+16$
T_{192}	$1+3+4+8+8$
M_9	$1+1+1+9+12$

（Conway [3] を参照。）

どの分割も1を含んでいるので、9個の群は全て M_{24} の1点の固定群 M_{23} に入っている。よって、予想(0.4)は次の事を主張する。

予想(0.7)　K3曲面に N-作用できる有限群は全て、23点が4個以上の軌道に分れるように Mathieu 群 M_{23} に埋め込むことができる。

<u>N-作用可有群と Leech 格子</u>　N-作用可な群と Mathieu 群の間における上の関係は Leech 格子を用いることにより、精密化並びに理由付けができる。ここで、格子とは有限生成な自由アーベル群に整数値双線型形式の付いたものを意味する。Leech格子 L は M_{24} の作用で

不変な Steiner system (Golay code と言っても本質的に同じ) を使って構成される階数24の格子で、その構成法より自然に M_{24} が作用している。双線型形式 $(.) : L \times L \to \mathbb{Z}$ は次の性質をもち、またそれでもって一意的に特徴付けられる。(Conway [2])。

(L.1) 階数 24。

(L.2) 負定値，即ち $x \neq 0$ なら (x, x) は常に負（通常は正定値とするが、K3格子との関係でここでは負定値とする）。

(L.3) 偶格子，即ち (x, x) は常に偶数。

(L.4) unimodular，即ち判別式の絶対値が 1 に等しい。

(L.5) 長さ -2 の元がない。

Mathieu群 M_{24} の部分群 G は Leech 格子 L に自然に作用する。その作用による不変元の全体を L^G で表わす。また，L_G の L における直交補格子を L_G で表わす。即ち，$L_G = \{ x \in L \mid (x, L^G) = 0 \}$。

一方，S を K3 曲面とする時，コホモロジー群 $\Lambda = H^2(S, \mathbb{Z})$ は cup 積 $\Lambda \times \Lambda \longrightarrow H^4(S, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ でもって格子になる。この格子 Λ（以後 K3 格子と呼ぶ）は次の性質をもち，またそれでもって一意的に特徴付けられる。

(K.1) 階数 22。

(K.2) 符号数 (3, 19)。即ち，Λ を実数体 $\mathbb{R}$ の上で

考えると、$\underbrace{x_1^2+x_2^2+x_3^2}_{3}\underbrace{-x_4^2-\cdots-x_{22}^2}_{19}$ と同値になる。

(K.3) 偶格子。

(K.4) unimodular。

群 G の K3曲面 S への作用は、自然に Λ への作用を誘導する。これに関して、Λ^G 及び Λ_G を L^G, L_G と同様に定義する。

定理(0.8) G は(0.2)の9個の群のどれかとする。この時、G の M_{24} への埋入と G のある K3曲面 S への N-作用でもって次の性質をみたすものがある。

(1) G による 24 の軌道分解は(0.6)の通り。

(2) $G \subset M_{24}$ による G の 24次元表現と G の $H^*(S,\mathbb{Z})$ への表現は $\mathbb{Q}$ 上同値である。

(3) L_G と Λ_G は G-作用付の格子として互いに同型である。

(0.2)の9個の群に対して、L_G が K3格子 Λ に primitive embedding することができることを示すのが定理の証明の本質的な部分である。（ここで、Nikulin [9] を使う。）この事実により、L_G を Λ_G としてもつ G-作用付きの K3曲面の存在が示せる。よって、9つの群が K3曲面

にN-作用できることは、具体的な式を書かなくても、この様にLeech格子を使って示すことができる。

§1　9個の群の N-作用について

(0.2) における 9個の群が N-作用する具体的な例を構成する。9個の群のうちの 3個 $L_2(7)$, $\mathfrak{A}_6$, M_{20} は perfect (即ち、交換子群 $[G, G]$ が自分自身 G と一致する) だから任意の作用は N-作用であることに注意しておく。

$\boxed{1}$ $L_2(7)$: これは位数 168 の単純群である。この群は射影平面 $\mathbb{P}^2$ に作用し、Klein の4次曲線

$$C:\quad f(X, Y, Z) = X^3Y + Y^3Z + Z^3X = 0 \quad \text{in } \mathbb{P}^2$$

を不変にするので、別命 Klein の単純群とも呼ばれる。さて、この事より $L_2(7)$ の作用する4次曲面を作ることは易しい。実際、

(a)　$$S:\ f(X, Y, Z) + T^4 = 0 \quad \text{in } \mathbb{P}^3$$

に $L_2(7)$ が作用している。この曲面は Klein 曲線 C で分岐する $\mathbb{P}^2$ の4次巡回被覆に他ならない。これ以外にも $L_2(7)$ の作用する4次曲面がある。

(b)　$$S:\ f(X, Y, Z) + 6XYZT + 2T^4 = 0 \quad \text{in } \mathbb{P}^3$$

詳しいことは [6] を見よ。(a) (b) は共に $SL(2, \mathbb{F}_7)$ の4次表現 V から決まる $L_2(7)$ の $\mathbb{P}^3$ への作用に関する4次の不変式に他ならない。(a) の場合、V は可約であるが、(b) の場合は既約表現である。

さて、Klein 曲線 C は4次であるが、その Hessian

$$C' : H(f) = -54(XY^5 + YZ^5 + ZX^5 - 5X^2Y^2Z^2) = 0$$

は6次曲線である。 f が $SL(2, \mathbb{F}_7)$ で不変だから $H(f)$ もそうである。 よって C' で分岐する $\mathbb{P}^2$ の2重被覆

(c) $\qquad S : \tau^2 = XY^5 + YZ^5 + ZX^5 - 5X^2Y^2Z^2$

は $L_2(7)$ の作用するK3曲面である。

$\boxed{2}$ 交代群 $\mathfrak{A}_6$: 次の平面6次曲線は G. Valentiner によって発見された。

$$v(X, Y, Z) = X^6 + Y^6 + Z^6 + \frac{-15+3\sqrt{-5}}{4}(X^4Y^2 + X^2Y^4 + Y^4Z^2 + Y^2Z^4 + Z^4X^2 + Z^2X^4) + (15 + 3\sqrt{-5})X^2Y^2Z^2 = 0.$$

彼はこの曲線が位数360の射影変換群で不変なことを示した。 後に、その群が $\mathfrak{A}_6$ と同型であることが示された。 よって、この Valentiner の6次曲線で分岐する $\mathbb{P}^2$ の2重被覆

(a) $\qquad S : \tau^2 = v(X, Y, Z)$

は $\mathfrak{A}_6$ の作用するK3曲面である。

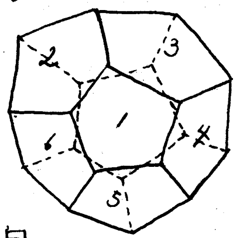
この事を知らなくても $\mathfrak{A}_6$ の作用するK3曲面は容易につくれる。(M. Reid 氏が注意してくれた。)

(b) $\qquad S : \sigma^{(1)} = \sigma^{(2)} = \sigma^{(3)} = 0 \quad$ in $\mathbb{P}^5$

但し、$X_1, \cdots, X_6$ を $\mathbb{P}^5$ の斉次座標とする時、$\sigma^{(\nu)} = \sum_{i=1}^{6} X_i^\nu$。 S は $\sigma^{(1)} = 0$ で定義される超平面 $\cong \mathbb{P}^4$

の中で 2次曲面と3次曲面の完全交叉になっている。
よって K3曲面の例3)より, S は K3曲面である。
一方, 対称群 $\mathfrak{S}_6$ が座標の置換として S に作用する。
そして, 丁度 $\mathfrak{A}_6$ の部分が N-作用になっている。

$\boxed{3}$ 対称群 $\mathfrak{S}_5$: 上の (b) をまねて作るが、$\mathfrak{S}_5$ 全体が N-作用になる様にするには少し工夫が必要である。正12面体を考え, その12個の面に1から6までの番号をつける。但し, その時に2つの相対する面は常に同じ番号をつける。さて, 3つの面 i, j, k が1つの頂点を共有している時は $\varepsilon(i,j,k)=1$ そうでない時は, $\varepsilon(i,j,k)=-1$ として 3次式



$$\tau^{(3)} = \sum_{1\le i<j<k\le 6} \varepsilon(i,j,k)\, X_i X_j X_k$$

を定義する。 $\mathfrak{S}_5$ の6次置換表現 ($\mathfrak{S}_5$ には 5-Sylow 群が6個ある) を使って $\mathfrak{S}_5$ を $\mathbb{P}^5$ に作用させた時,

$$\alpha(\tau^{(3)}) = \mathrm{sgn}(\alpha)\cdot\tau^{(3)} \qquad \alpha\in\mathfrak{S}_5$$

となるようにできる。 $\tau^{(3)}$ は $\mathfrak{S}_5$ の (絶対) 不変式ではないが、そのおかげで K3曲面

$$S:\ \sigma^{(1)} = \sigma^{(2)} = \tau^{(3)} = 0 \qquad \text{in } \mathbb{P}^5$$

への $\mathfrak{S}_5$ の作用は N-作用になる。

$\boxed{4}$ M_{20}:　M_{20} は次の4次曲面に N-作用する。

$$S:\ X^4+Y^4+Z^4+T^4+12XYZT=0 \quad \text{in } \mathbb{P}^3$$

先ず、位数 192 の群が N-作用することがわかる。実際、

$X'=i^aX,\ Y'=i^bY,\ Z'=i^cZ,\ T'=T\ (a+b+c\equiv 0\ (4))$ なる変換の全体は homocyclic 群 $C_4\times C_4$ と同型で S に N-作用する。一方，座標の置換でもって対称群 $\mathfrak{S}_4$ が作用するが このうちの $\mathfrak{A}_4$ の部分が N-作用である。よって、S には半直積 $(C_4\times C_4)\rtimes\mathfrak{A}_4$ が N-作用する。

さて，変換 ρ を

$$\rho\left\{\begin{aligned} X'&=\frac{1}{2i}(X+Y-iZ+iT)\\ Y'&=\frac{1}{2i}(X-Y-iZ-iT)\\ Z'&=\frac{1}{2i}(-X-Y-iZ+iT)\\ T'&=\frac{1}{2i}(-X+Y-iZ-iT)\end{aligned}\right.$$

でもって定義する。ρ は S の N-自己同型で位数 5 であることがわかる。そして，$(C_4\times C_4)\rtimes\mathfrak{A}_4$ と ρ が位数 960 の群 G を生成する。(Maschke [7], Burnside [1] p.371)。$\mathbb{P}^3$ の 4つの involutions

$$(*)\quad \begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&1\end{pmatrix},\ \left(\begin{array}{cc|cc}&1&&\\1&&&\\\hline&&&1\\&&1&\end{array}\right),\ \begin{pmatrix}&&&1\\&&1&\\&1&&\\1&&&\end{pmatrix}$$

は G の中で位数 16 の初等アーベル群 E_{16} を生成する。G は この E_{16} と $\mathfrak{A}_5$ の半直積になり，M_{20} と同型になる。

[5] F_{384}：定義により、Fermat 4次曲面

$$S:\quad X^4+Y^4+Z^4+T^4=0 \qquad \text{in } \mathbb{P}^3$$

の射影的な N-自己同型全体のなす群である。[4] の場合と同様 (*)の4つの involutions が F_{384} の中で E_{16} を生成し F_{384} はこの E_{16} と、$\mathfrak{S}_4$ との半直積 $E_{16} \rtimes \mathfrak{S}_4$ と同型になる。

[6] $\mathfrak{A}_{4,4}$ と $2^4.D_{12}$：[4],[5] でみたように M_{20} も F_{384} も共に初等アーベル群 E_{16} とある群との半直積である。今考える2つの群 $\mathfrak{A}_{4,4}$，$2^4.D_{12}$ もそうである。実際、$\mathfrak{S}_4$ が初等アーベル群 E_4 と $\mathfrak{S}_3$ の半直積であることに注意すれば、$\mathfrak{A}_{4,4}$ が $E_{16} \rtimes \mathfrak{A}_{3,3}$ と同型であることがわかる。また、記号 $2^4.D_{12}$ はこの群が E_{16} と位数12の2面体群 D_{12} との半直積であることを示している。

さて、こういう群の作用するK3曲面はある程度統一的に構成できることを次に示そう。次数8の所で構成する（K3曲面の例4）。$\mathbb{P}^5$ の斉次座標 $X_1, \cdots, X_6$ の符号の変換でもって、$\mathbb{P}^5$ には初等アーベル群 E_{32} が作用する。$\mathbb{P}^5$ の中の3つの2次超曲面の完全交叉 $S: Q^{(1)}=Q^{(2)}=Q^{(3)}=0$ はK3曲面になるが、3つの $Q^{(i)}$ が全て

$$Q^{(i)}=\sum_{j=1}^{6} a_j^{(i)} X_j^2=0$$

の形ならば E_{32} は S に作用する。このうち、N-作用

になるものは偶数個の符号変換に対応するもので，丁度 E_{16} が S に N-作用する。 S をこの E_{16} の作用で割ってできる商曲面を S_0 とする。

$$
\begin{array}{ccccl}
\mathbb{P}^5 & \longrightarrow & \mathbb{P}^5/E_{32} & \cong & \mathbb{P}^5,\ (Y_j)=(X_j^2) \\
\cup & & \cup & & \\
S \longrightarrow S_0 & \xrightarrow[2:1]{} & \mathbb{P}^2 & = & \left\{ \sum_{j=1}^{6} a_j^{(i)} Y_j = 0 \right\} \quad i=1,2,3
\end{array}
$$

S を E_{32} で割ったものは $\mathbb{P}^2$ と同型で S_0 はその $\mathbb{P}^2$ の2重被覆。分岐は $Y_j=0$ $1\le j\le 6$ で与えられる6本の lines l_j の union である。 S は smooth だから $\bigcup_{j=1}^{6} l_j$ は通常2重点しかもたない。 S_0 は丁度16個の nodes をもつ。さて，逆に $\mathbb{P}^2$ の6本の lines $l_j : f_j=0$ $(1\le j\le 6)$ の配置が与えられて上の条件をみたす時，$\sqrt{f_j/f_0}$ を $\mathbb{P}^2$ の関数体に付加してできる Kummer 拡大の極小モデルは K3 曲面になる。よって6本の lines の配置に対称性があれば，それは S の自己同型を与える。例えば，$\mathbb{P}^2$ の中に円を書いてそれに内接する正六角形を書き，その辺に対応する6本の lines の配置より $2^4.D_{12}$ の N-作用する K3 曲面がえられる。また，Hesse 配置（これは12本の lines よりなる）より6本の lines $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=0,\ x+\omega y+\omega^2 z=0,\ x+\omega^2 y+\omega z=0$ をとってくると，$2^4.\mathfrak{A}_{3,3}\cong\mathfrak{A}_{4,4}$ の N-作用する K3 曲面がえられる。この方法でもって，M_{20}, F_{384} の

N-作用するK3曲面の別の例をつくることもできる。

⑦ T_{192}：この群はbinaryな正4面体群 T_{24} と関係している。T_{24} は2次元ベクトル空間 $\mathbb{C}X+\mathbb{C}Y$ に作用し、4次式 $X^4+Y^4-2\sqrt{-3}X^2Y^2$ を半不変式としてもつ。そこで、4次曲面

$$S:\ X^4+Y^4-2\sqrt{-3}\,X^2Y^2+Z^4+T^4-2\sqrt{-3}\,Z^2T^2=0 \quad \text{in } \mathbb{P}^3$$

を考える。X, Y に関して T_{24} が作用し、Z, T に関しても T_{24} が作用する。よって S には $T_{24}\times T_{24}$ が作用するが、T_{24} の中心（位数2の巡回群）は -1 として作用するので、この $T_{24}\times T_{24}$ の作用は効果的でない。σ を T_{24} の位数2の中心元とする時、$T_{24}\times T_{24}$ を $\sigma\times\sigma$ で割った群 $T_{24}*T_{24}$（2つの T_{24} の中心積と言う）が S に効果的に作用している。X と Z, Y と T を同時に交換するinvolution ρ も S に作用している。よって S には位数576の群 $(T_{24}*T_{24})\rtimes\langle\rho\rangle$ が射影的に作用している。そして、その指数3の部分群 T_{192} が S に N-作用する。

⑧ M_9：位数9の初等アーベル群 E_9 のholomorphy, 即ち, $E_9\rtimes \mathrm{Aut}\,E_9$ はHesse群と呼ばれるもので $\mathbb{P}^2$ に作用し、Hesse pencil $X^3+Y^3+Z^3+3\lambda XYZ=0$ を不変

にする。　M_9 は Hesse 群の部分群で，E_9 と $\mathrm{Aut}\,E_9$ の 2-Sylow 群（4元数群 Q_8 と同型）の半直積に同型である。Hesse 群の $\mathbb{P}^2$ への作用でもって次の6次式が半不変式である。（［8］ page 253）.

$$F(X,Y,Z)=X^6+Y^6+Z^6-10(X^3Y^3+Y^3Z^3+Z^3X^3)$$

そして，部分群 M_9 に関しては（絶対）不変式である。6次曲線 $F(X,Y,Z)=0$ で分岐する $\mathbb{P}^2$ の2重被覆に Hesse 群が作用し，そのうちの M_9 が丁度 N-作用の分になっている。

注）M_9 という記号の説明をする。Mathieu 群 M_{24} の作用域をうまく2分割 $24=12+12$ すると，それを保つ群 M_{12} は12個の文字に5重推移的に作用する。M_{12} の位数は $12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8$ で，M_9 は M_{12} の元で3点を点ごとに固定するものの全体のなす M_{12} の部分群であることを示している。

§2 Nikulin の結果

ここでは、K3曲面の有限自己同型群に関して基本的である Nikulin [10] の結果について簡単に紹介する。序において述べたように、群 G が K3曲面 S に作用する時、G は1次元 vector space $\mathbb{C}\omega$ を不変にする。G の元で N-自己同型なもの全体を G_N とすると、商群 G/G_N は $\mathbb{C}^*$ の部分群と同型である。よって、G が有限なら G/G_N は巡回群 C_m と同型である。(但し、m は G/G_N の位数。)

$$(2.1) \qquad 1 \longrightarrow G_N \longrightarrow G \longrightarrow C_m \longrightarrow 1$$

定理(2.2)([ ] Theorem 0.1) (1) S が代数的でなければ $m=1$.

(2) $\rho(S)$ を S の Picard 数とする時、$22-\rho(S)$ は $\varphi(m)$ で割り切れる。但し、$\varphi(m) = m\prod_{p|m}(1-\frac{1}{p})$ は m の Euler 関数。

(3) $m \leq 66$。

以下、G は N-自己同型群(即ち、$G = G_N$)とする。曲線 C の自己同型群 G を調べるのに $C \longrightarrow C/G$ を解析するのが効果的であるように、我々の場合も $S \longrightarrow S/G$ を解析するのが効果的である。G が K3曲面 S に N-作用する時には次が成立する。

(N.1) 商曲面 S/G は高々有理2重点しかもたない。

(N.2) S/G の極小非特異化は K3曲面である。

(N.3) 点 $x \in S$ の固定化群 $\mathrm{Stab}_G(x)$ は binary な多面体群(即ち, $SL(2,\mathbb{C})$ の有限部分群)と同型である。

(N.4) $\mathrm{Stab}_G(x) \neq 1$ なる点 $x \in S$ の全体は S の中で孤立している。

証明(2.3) ω は S 上の零でない正則な 2-form とする。ω は S の各点 x で接空間 T_x 上の歪対称形式 ω_x を与えている。G の元 g は N-自己同型だから $g^*\omega=\omega$。よって, x が g の固定点なら, g は ω_x を固定する。よって自然な準同型写像 $\mathrm{Stab}_G(x) \longrightarrow GL(T_x)$ の像は $SL(2,\mathbb{C})$ に入っている。よって(N.3)を得る。これより, x の近傍で g は $\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$ の形に解析的に標準化できる。よって, x の十分小さい近傍には, x 以外に g は固定点をもたない。よって(N.4)を得る。$\mathbb{C}^2$ を $SL(2,\mathbb{C})$ の有限部分群で割ってでてくるのが有理2重点に他ならない。よって(N.3)(N.4)より, (N.1)を得る。G が ω を固定していることより, S/G の非特異部分 $(S/G)_{reg.}$ には ω が descent する。この descent により得られる 2-form ω は(N.1)により S/G の極小非特異化 $\widetilde{S/G}$ 全体に拡張できる。S の不正則数

が零だから、$\widetilde{S/G}$ のそれも零。よって、$\widetilde{S/G}$ はK3曲面である。

証明終

K3曲面の N-自己同型 φ に関して次は最も基本的である。

定理(2.4)(§6 [10]) $\varphi : S \longrightarrow S$ はK3曲面のN-自己同型で位数が有限とする。この時 φ の位数 n は8以下。また、φ の固定点の個数 $f(n)$ は n のみにより次で与えられる。

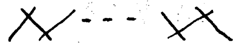
n	2	3	4	5	6	7	8
$f(n)$	8	6	4	4	2	3	2

証明(n が素数 p の時) φ の固定点の個数を f とおく。商曲面 S/φ は丁度 f 個の有理2重点をもち、その有理2重点は $\mathbb{C}^2$ を $\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$, $\zeta = 1^{\frac{1}{p}}$, で割ったものだから A_{p-1} 型である。

$$\begin{array}{ccc} S & \qquad & S/\varphi \\ \cup & & \cup \\ f\text{個の固定点} & & f\text{個の}A_{p-1}\text{型有理2重点} \end{array}$$

ここで、Hurwitz型の論法を使う。即ち、

$\boxed{\mathrm{H}}$ (S −(φの固定点)のEuler数) $= p \cdot$ (($S/\varphi)_{reg}$ のEuler数)。

A_{p-1}型の有理2重点は極小非特異化すると $(p-1)$個の $\mathbb{P}^1$の鎖  でおきかえられる。よって Euler数に与える影響は1個につき p である。K3曲面の Euler数は 24 だから、$\boxed{H}$ より $24-f = p(24-fp)$ を得る。整理すると、$f=\frac{24}{p+1}$。f は整数だから $p=2, 3, 5, 7, 11, 23$。一方、S/φ の極小非特異化 T には f個の A_{p-1}型特異点からくる、$f(p-1)$個の $\mathbb{P}^1$ がのっている。これらの$\mathbb{P}^1$のホモロジー類は $H_2(T, \mathbb{Z})$ 中で階数 $f(p-1)$ の部分加群を生成し、交点形式のそこへの制限は負定値になる。T は K3曲面だから $H_2(T, \mathbb{Z})$ の交点形式の符号数は $(3, 19)$。よって $f(p-1) \leq 19$ でなければいけない。これより、$p=2, 3, 5, 7$ を得る。

証明終。

注意(2.5) φ は K3曲面の自己同型でコホモロジー群 $H^*(S, \mathbb{Z})$ に自明に作用するとする。この時、上の定理より、φ が恒等写像であることがわかる。実際、Hodge 分解により、φ は $H^0(\Omega^2)$ に自明に作用するから ω-自己同型。また、Kähler類を止めるから φ は位数有限 (Lieberman [5])。φ が恒等写像でないとして矛盾をだす。適当な巾で置きかえて、φの位数は素数 p としてよい。上の証明より、固定点の個数は $\frac{24}{p+1}$。一方、$\sum_i (-1)^i \mathrm{tr}(\varphi^*|_{H^i(S, \mathbb{Z})}) = 24$。これ

は Lefshetz の固定点公式に反する。 今示した事実は [11] において示されている。 この証明はそこでのものと本質的に同じである。

注意 (2.6) $f(n)$ は $\dfrac{24}{n\prod_p(1+\frac{1}{p})}$ に等しい。

上の定理を使って，アーベル群 G の N-作用が調べられる.

定理 (2.7) ([10] Theorem 4.5) K3 曲面に N-作用できる有限アーベル群 G は次のどちらかをみたす。

(1) $|G| \leq 8$ 或は

(2) $G \cong C_3 \times C_3$, $C_4 \times C_4$, $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$

但し，C_m は位数 m の巡回群を表わす。

逆に (1) 或は (2) を満たすアーベル群は K3 曲面に N-作用できる。 [10] では更に進んで、アーベル群の N-作用に付随してでてくる格子を精密に調べている。(上の定理の証明でもそれが必要となる。) それを使って、アーベル群 G が N-作用する時、それのコホモロジー群への作用は G のみで一意的に決まることも示している ([10] Theorem 4.7)。

§3 $\mathcal{N}$-自己同型群の分類について

§1では$\mathcal{N}$-自己同型群の例を、§2では$\mathcal{N}$-自己同型の基本的性質をみた。ここでは、群が$\mathcal{N}$-作用可であるための必要条件を求める。K3曲面に（effectiveに）$\mathcal{N}$-作用できる有限群の全体を$\mathcal{M}$とすると$\mathcal{M}$は次の性質をもつ。（[10] Theorem 4.5 a)）。

(1) $\mathcal{M}$に属する群 G の部分群 H はやはり$\mathcal{M}$に属する。

(2) H が G の正規部分群ならば、G/H も$\mathcal{M}$に属する。

(1)は自明の事である。H が正規ならば G/H が商曲面 S/H に作用する。S/H の極小非特異化はK3曲面だから G/H は$\mathcal{M}$に属する。

必要条件 0. G が$\mathcal{N}$-作用可であるにはその全ての部分群が$\mathcal{N}$-作用可であることが必要である。また、全ての商群が$\mathcal{N}$-作用可であることも必要である。

定理(2.4)よりは次の必要条件を得る。

必要条件 1. G が$\mathcal{N}$-作用可ならば G の元の位数は全て8以下。

次の必要条件は即に定理(2.4)の証明において使われている。商曲面 S/G の特異点を極小非特異化した時にでて

くる $\mathbb{P}^1$ の個数 l を S/G の特異点の階数と呼ぼう。S/G の極小非特異化が K3曲面で K3曲面の交点形式の符号数が $(3, 19)$ だから次をえる。

必要条件 2. S/G の特異点の階数 l は 19 以下でないといけない。

このままでは、G のみに関する条件になっているが、下で示すように、l は G の構造だけから簡単に計算できる。それについて述べる前に、G の $H^*(S, \mathbb{Z})$ への作用について考察する。S は K3曲面だから $H^1(S) = H^3(S) = 0$。よって、Lefshetz の固定点公式より

(Lef.) φ の固定点の個数 $= \mathrm{Tr}(\varphi^* \text{ of } H^*(S, \mathbb{Z}))$

を得る。よって、定理(2.4) と注意(2.6) より、φ が N-自己同型で位数が n なら

$$(3.1) \qquad \mathrm{Tr}(\varphi^*) = \frac{24}{n \prod_{p|n} (1+\frac{1}{p})}$$

をえる。これは、$n = 1$ の時も正しい。G が S の自己同型なら、$H^*(S, \mathbb{Z})$ は G の表現になる。上より、G が N-自己同型ならその表現の指標は自動的に決ってしまう。

定義(3.2)　$g \in G$ の位数が n の時 $\chi(g) = \dfrac{24}{n \prod_p (1+\frac{1}{p})}$ で与えられる G 上の中心関数は、もしそれが指標なら Mathieu 指標と言う。Mathieu 指標を指標としてもつ G の表現を Mathieu 型表現と呼ぶ。

(3.1) より、次が得られる。

必要条件 3.　G が N-作用可なら G は $\mathbb{Q}$ 上の Mathieu 型表現をもつ。

注意(3.3)　Mathieu 群 M_{24} の 24 次置換表現より、M_{24} の $\mathbb{Q}$ 上の 24 次表現がえられる。この表現 V を M_{23} に制限したものは M_{23} の $\mathbb{Q}$ 上の Mathieu 型表現である。よって M_{23} の部分群の多くが N-作用可であることは不思議なことではない。予想 (0.7) に言う"4個以上の軌道…"と言うのも下でみるように必要条件である。

必要条件 3 はかなり強力である。例えば、G の勝手な指標 ψ に対して $|G|^{-1}\sum_{g\in G}\psi(g)\chi(g)$ は非負整数でなければいけない。特に ψ として自明表現をとると、$|G|^{-1}\sum_{g\in G}\chi(g)$ が非負整数でないといけないことになるが、

実はもっと強い事が言える。それは，必要条件ともに関係してくる。

命題(3.4)　G は S の有限 N-自己同型群，ℓ は S/G の特異点の階数とする。この時，次が成立する。

$$\ell + |G|^{-1}\sum_{g\in G}\chi(g) = 24$$

但し，χ は G の表現 $H^*(S, \mathbb{Z})$ の指標で Mathieu 指標である。

証明．先ず，$|G|^{-1}\sum\chi(g)$ は $H^*(S, \mathbb{Q})$ の G-不変元全体のなす部分空間の次元に等しい事に注意しておこう。S から $\mathrm{Stab}_G(x) \neq 1$ なる点 x の全部を除いた残りを S_0 とおく。G の S_0 への作用は自由で $\pi : S_0 \longrightarrow S_0/G$ は至る所不分岐である。有限個の点を除いただけだから $H^2(S, \mathbb{Q})$ と $H^2(S_0, \mathbb{Q})$ は同型。$\pi^* H^2(S_0/G, \mathbb{Q})$ が $H^2(S, \mathbb{Q})^G$ に入ることは明らかだが，$H^1(S, \mathbb{Q}) = 0$ であることと Spectral sequence $H^q(G, H^p(S_0, \mathbb{Q})) \Rightarrow H^{p+q}(S_0/G, \mathbb{Q})$ を使って，両者が一致することが言える。一方，S_0/G は S/G の非特異部分，よって S/G の極小非特異化より，ℓ 個の $\mathbb{P}^1$ を除いたものである。よって，$H^2(S_0/G)$

の次元は $22-l$。即ち、$\dim H^2(S,\mathbb{Q})^G = 22-l$ を得る。これより命題が従う。

証明終

必要条件 2, 3 と上の命題より次が得られる。

必要条件 4. G が N-作用可なら $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)$ は5以上の整数である。

この必要条件は必要条件 1 を含む。Mathieu群 M_{23} の部分群で 24 を 5分割以上するものは必要条件 3, 4 を満している。今までの必要条件を全て満すにもかかわらず N-作用不可な群がある。それらは、その群 G 及びその部分群（$SL(2,\mathbb{C})$ の部分群と同型なもののみで充分）の固定点の状況を詳しく解析することにより除外できるが、その事について述べるのは別の機会にゆずる。かわりに、予想(0.4)をどう攻略していくかについて、荒筋を述べる。アーベル群の時は定理(2.7)で分類されているから、先づ G が巾零の時、どうなるかをみよう。

命題 (3.5) N-作用可な有限巾零群はアーベル群か 2-群である。

証明　先づ G が奇数位数の p-群の場合を考えよう。必要条件 1 より、G の非単位元は全て位数 p である。よって、Mathieu指標 χ は G の単位元では 24 それ以外の所では $\frac{24}{p+1}$ である。必要条件 4 より $24+\frac{24}{p+1}(p^n-1)$ は G の位数 p^n で割り切れなければならない。これより、$n\leq 2$ を得る。よって G はアーベル群である。G が一般の巾零群の場合を考えよう。G が 2-群でなければアーベル群であることを示す。G は p-Sylow 群 G_p の直積と同型である。G が 2-群でないとすると、G には位数が奇素数 $(=p)$ の元 g が存在する。必要条件 1 より G には位数 $4p$ の元はない。よって 2-Sylow 部分群 G_2 には位数 4 の元がない。よって、G_2 はアーベル群である。先に示した様に p が奇素数の時も G_p はアーベル群。よって、G はアーベル群である。

証明終

G が 2-群の時、G には中心に入る位数 2 の元が存在する。一般に、位数 2 の中心元 z をもつ群 G に対しては次の考え方（Morrison 氏に負う）が有効である。定理 (2.4) より z は丁度 8 個の固定点をもつ。z が中心元であることより、G はその 8 個の固定点に置換として作用する。z は 8 点を固定しているから $G/\langle z\rangle$ が 8 点に作用している。よって、準同型写像　$\varphi: G/\langle z\rangle \longrightarrow \mathfrak{S}_8$　を得る。

命題（D. Morrison）(3.6)　(1)　φ は単射である。
(2)　φ の像には位数 5, 7, 8 の元がない。
(3)　φ の像は交代群 $\mathfrak{A}_8$ の中に入る。

証明 (1) $\bar{\varphi}: G \longrightarrow G/\langle z\rangle \longrightarrow \mathfrak{S}_8$ の核が z で生成されていることを言えばよい。$\bar{\varphi}$ の核に入っている元 g は少くとも 8 個の点を固定している。よって，定理(2.4)より，g は単位元か位数 2 のどちらかである。これより，Ker $\bar{\varphi}$ は初等 2-群。一方，Ker($\bar{\varphi}$) は P 上の点を止めているから SL(2, $\mathbb{C}$) の部分群と同型。よって，Ker($\bar{\varphi}$) は位数 2 の巡回群である。

(2) G には位数 10, 14 の元がない。よって，$G/\langle z\rangle$ には位数 5, 7 の元はない。定理(2.7)よりアベル群 $C_2 \times C_8$ はK3曲面に N-作用できない。よって，G は $C_2 \times C_8$ を部分群として含まない。よって $G/\langle z\rangle$ には位数 8 の元がない。

(3) 定理(2.4)より，$g \in G$ はその位数のみで，固定点の個数が決まる。また，g と z で生成されるアベル群 $\langle g, z\rangle$ は巡回群でない限り固定点をもたない。これらのことより，$\langle g, z\rangle$ のみで，$\varphi(g)$ の $\mathfrak{S}_8$ における共役類（置換の型）が決まる。詳細は読者にゆづって結果だけを書く。

$\bar{g} \in G/\langle z\rangle$ の位数	2		3	4		6
$\langle g, z\rangle$	$C_2 \times C_2$	C_4	C_6	$C_2 \times C_4$	C_8	$C_2 \times C_6$
$\varphi(\bar{g}) \in \mathfrak{S}_8$ の輪積表示	$(2)^4$	$(2)^2$	$(3)^2$	$(4)^2$	$(2)(4)$	$(2)(6)$

よって，$\varphi(\bar{g})$ は常に偶置換である。 証明終

系(3.7) G は N-作用可な 2-群，z はその中心に入る位数 2 の元とする。この時，$G/\langle z\rangle$ は $\mathfrak{A}_8$ の 2-Sylow 群の部分群と同型である。$\mathfrak{A}_8$ の 2-Sylow 群の位数は 64 だから，G の位数は常に 128 ($=2^7$) 以下である。

次はGが可解な場合を考えよう。Gの正規巾零部分群には常に最大のものが存在する。これをGのFitting部分群と言う。Gが可解な時、そのFitting部分群Fは次をみたす。

(*) Fの全ての元と可換なGの元は常にFに入る。

よって、もしGが巾零でなければ、Fは自明でないGの真部分群である。GがN-作用可ならFもそう。命題(3.5)よりFはアーベルか2-群。FはN-作用可な可解群Gを決定するのに非常に役立つ。

Gが非可解な時、その組成列の成分には非可換単純群が現われる。必要条件0より、GがN-作用可ならその組成列の各成分もN-作用可である。

補題(3.8) GがN-作用可な有限群である時、Gの位数は35では割り切れない。

(証明の方針) もし$|G|$が35で割り切れるならGには位数5と位数7の元がある。Gの中にある位数5,7の元の個数を評価することによって$|G|^{-1}\sum \chi(g) < 5$を示す。よって必要条件4よりGはN-作用不可である。

Gのp-Sylow部分群をG_pとする。系(3.7)より、G_2の位数は2^7以下。命題(3.5)と定理(2.7)より、G_3の位数は3^2以下、G_5, G_7の位数は各々5, 7以下。よって上の補題と合わせることによって次を得る。

5

命題(3.9)　G は N-作用可な有限群とする。この時、G の位数は 2^a3^b5 或は 2^a3^b7 に等しい。但し、a, b は整数で $a \leq 7$, $b \leq 2$。

この評価は最良ではない。もっと良い評価を与えることもできるが、非可換単純群に対してはこれで充分である。上の位数の条件を満すものは310しかない。

系(3.10)　G は N-作用可な非可換有限単純群とする。この時、G は $L_2(7)$, $\mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{A}_6$ のいずれかと同型である。

系(3.11)　G は N-作用可な非可解有限群とする。この時、組成列の成分で非可換なものは1つだけで、それは上の系の3つの群のどれかと同型である。

以上述べた方法により、予想(0.4)はほぼ証明できる。紙数も尽きてきたので、これ以上述べることは別の機会にゆずりたい。命題(3.6)にもかかわらず、N-作用可な2-群の分類並びにその性質をみることが最も難しい所である。しかし、Hall-Senior [X] による膨大な表のおかげで N-作用可な2-群が分類できる(もちろん、それによらない方法を見つけることが望ましいが・・・)。

参 考 文 献

[1] Burnside, W.: Theory of groups of finite order, 2nd edition, 1911, Dover

[2] Conway, J. H.: A characterization of Leech's lattice, Invent. Math. 7, 137–142 (1969)

[3] Conway, J. H.: Three lectures on exceptional groups, Finite simple groups, 215–247 (1971) Academic Press

[4] Hall, M., Senior, J. K.: The groups of order 2^n ($n \leq 6$) The McMillan Company 1964

[5] Lieberman, D.: Compactness of Chow scheme: application to automorphisms and deformations of Kähler manifolds, Sém. Norguet 1976, Lecture Notes 670, Springer Verlag, 1978

[6] Mallows, M., Sloane, N. J. A.: On the invariants of a linear group of order 336, Proc. Camb. Phil. Soc. 74, 435–440 (1973)

[7] Maschke, H.: Über die quaternäre, endlichen, lineare Substitutionsgruppe der Borchardt'schen Moduln, Math. Ann. 30, 496–515 (1887)

[8] Miller, G. A., Blichfeldt, H. F., Dickson, L. E.: Theory and applications of finite groups, John Willey & Son, New York (1916)

[9] Nikulin, V. V.: Integral symmetric bilinear forms and some of their applications, English translation, Math. USSR Izv. 14, 103 - 167 (1980)

[10] Nikulin, V. V.: Finite groups of automorphisms of Kählerian surface of type K3, English translation, Moscow Math. Soc. 71 — 137 (1980)

[11] Pijateckii - Shapiro, I., Schafarevitch, I. R.: A Torelli theorem for algebraic surface of type K3, English translation, Math. USSR Izv. 5, 547 - 587 (1971)

[12] Shioda, T., Inose, H.: On singular K3 surfaces, "Complex Analysis and Algebraic Geometry", Iwanami Shoten and Cambridge University Press, 1977