数理解析研究所講究録
537巻 1984年 48-68



# An Application of the Geometry of Numbers to Numerical Integrations for a Certain Class of Analytic Functions

筑波大,電子・情報 (Univ. of Tsukuba, Institute of Information Science and Electronics)

杉原正顯 (Masaaki Sugihara)

## 1. はじめに

本研究においては, $s$ 次元単位超立方体上の積分:

$$\int_{[0,1]^s} f(x)dx$$

に対する数値積分公式を考察の対象とする. さらに, 被積分関数としては, 実用上よく現われる $(0,1)^s$ 上の解析関数を考えることにする. この種の解析関数の積分に関しては, 一次元の場合, 近年, 変数変換を用いた数値積分公式が多数提案され, その有効性が広く認められている. しかし, 多次元の場合においては, 変数変換を用いた数値積分公式の研究は, 多項式変数変換とgood lattice points法とを用いる方法についてのものが主流であり, 一次元の場合のような超越関数による変数変換を用いた公式の研究は, ほとんど行われていない. (このように, 一次元と多次元で研究に大きな差異が

あるのは，一次元の場合，主に，数値解析の研究者が，多次元の場合は，数論研究者が，それぞれ独立に研究を行っている故と思われるが……。）そこで，本研究においては，一次元で有効である変数変換の手法のうちの1つ二重指数関数型変数変換を用いた多次元数値積分公式について考察し，有効な数値積分公式を具体的に決定する．この有効な数値積分公式の具体的導出過程において，“数の幾何学”でよく知られた結果を援用する．

以下，本文の構成を述べる．まず，初めに，一次元の場合の二重指数関数型変数変換公式（通常，Double exponential formula を略して，DE公式といわれる），および，good lattice points法について概観し，研究の動機をより明確にする。そして，次に，DE変換（二重指数関数型変数変換の略）を用いた多次元数値積分公式について考察する．主なる問題は，DE変換を施した被積分関数にどのような公式を適用すれば良いかということである。すべての積分公式を考察対象とすることは，困難であるので，多項式変数変換と組み合せて有効であった lattice points 法に限って良い公式を求めることを考える．最後に，数値実験を通して，得られた公式の評価を行なう．

## 2. DE公式とgood lattice points法について

### 2.1. DE公式（Double exponential formula）

DE公式は，近年，数多く提案された変数変換を用いた数値積分公式（この種の数値積分公式については，survey paper [1]を参照）の中の1つであって，1974年，高橋・森によって提案されたものであり，次のようにして得られる[2]。

(1) [0, 1]上の被積分関数 $f(x)$ を，変数変換（DE変換）

$$x=\varphi(u)\equiv\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{\pi}{2}\sinh(u)\right)+\frac{1}{2}$$

を用いて，$(-\infty,\infty)$上の関数 $f(\varphi(u))\,\varphi'(u)$ に変換する。

(2) 変換された関数 $f(\varphi(u))\,\varphi'(u)$ に，無限区間 $(-\infty,\infty)$ での台形則を適用する。つまり，次のような量

$$I_h=h\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(\varphi(n\cdot h))\cdot\varphi'(nh) \tag{2.1}$$

$$\left(=h\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{\pi}{2}\sinh(nh)\right)+\frac{1}{2}\right)\frac{\frac{\pi}{4}\cosh(nh)}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2}\sinh(nh)\right)}\right)$$

を考え，$I_h$ を積分値 $\int_0^1 f(x)\,dx$ の近似値とする。式(2.1)を，"DE公式"という。

ただし，実際の(2.1)の計算は，$|f(\varphi(nh))\cdot\varphi'(nh)|\fallingdotseq$|数値積分誤差|$\left(=\left|\int_0^1 f(x)dx-I_h\right|\right)$ となる $n=-N_1$, $n=N_2$ まで行なう。つまり，

$$h\sum_{n=-N_1}^{N_2}f(\varphi(n\cdot h))\cdot\varphi'(nh)$$

をもって，積分の近似値とする。

現在，このDE公式は，積分区間の端点に代数的特異性があるような解析関数の数値積分法の中で，最も有効な公式の1つと認められている。なお，プログラムは，文献[3]，[4]に，また，DE公式使用にあたっての諸注意は，文献[5]，[6]に与えられている．

## 2.2 good lattice points法 (method of good lattice points)

good lattice points法は，Hlawka や Korobov によって導入された s 次元単位超立方体上の関数の積分に対する近似公式で，次式で定義される．

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{g_1}{N}k\right\}, \left\{\frac{g_2}{N}k\right\}, \cdots, \left\{\frac{g_s}{N}k\right\}\right) \qquad (2.2)$$

ここで，$g_i$ ($i=1,2,\cdots,s$)，N は自然数，$\{x\}$ は $x$ の小数部分．

Hlawka と Korobov は，この公式を次の条件を満足する関数族 $\mathcal{E}^k(C)$

$f(x) \in \mathcal{E}^k(C)$

$\Leftrightarrow$ $f(x)$ は，絶対収束する s 次元 Fourier 級数に展開可能であり，

$$f(x) = \sum_{h} c_h e^{2\pi i \langle h, x \rangle},$$

さらに，$c_h$ (Fourier係数) が次の不等式を満足する．

$$|c_h| \leqq C \cdot (r(h))^{-k},$$

ここで，$r(h) \equiv \prod_{j=1}^{s} \mathrm{Max}(1, |h_j|)$．

に適用した時に，数値積分誤差が小さくなるようなNと$g_i(N)$ $(i=1, 2, \cdots, s)$の研究に専心した。その研究は，Niederreiter, Zaremba，華羅庚と王元等に受け継がれ，多くの精密な結果が得られている（詳細については，文献[7], [8]参照）．しかし，大雑把な言い方をすれば，その結果は，

"あるNと$g_i(N)$ $(i=1, 2, \cdots, s)$の系列が存在して，$f \in \mathcal{E}^k(C)$に対して，

$$|\text{数値積分誤差}|=\left|\int_{[0,1]^s} f(x)dx-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{g_1}{N}k\right\}, \cdots, \left\{\frac{g_s}{N}k\right\}\right)\right|$$

$$=O\left(\frac{1}{N^{k-\varepsilon}}\right), \quad (\varepsilon\text{は正で任意}),$$

となる．ただし，$O(\cdot)$の定数は，$C, k, s, \varepsilon$による．"

とまとめることが出来る。従って，この結果からわかるように，本質的に誤差のオーダーが，次元数$(s)$によらない数値積分公式が存在する．ただし，この結果の証明は，本質的に存在のみを示す証明法（部屋割り論法）によっており，どのようにN，$g_i(N)$ $(i=1, 2, \cdots s)$を構成したらよいのかについては，一般には，よくわかってはいない。ただ，$s=2$，2次元の場合には，$N=F_n$，$g_1=1$，$g_2=F_{n-1}$，ここで，$F_n$はFibonacci数（$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$, $F_1=1$, $F_2=2$），とおけば，よいことがわかっている。又，$s \geq 3$については，しらみつぶし計算によって，良いと思われるNと$g_i(N)$の系列が求められており，[8]の巻末に表になっている（数値実験では，この表の値を用いる）。

以上の good lattice points 法に関する結果を，単位超立方体上の関数，例えば $\prod_{j=1}^{s} \exp(x_j)$ など，に適用しようとすると，被積分関数が，$\mathcal{E}^k(C)$ に，一般には，入らないことが問題となる。しかし，被積分関数 $f(x)$ が $[0,1]^s$ 上で高階導関数

$$\frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \cdots \frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}} f(x_1, \cdots, x_s) \qquad 0 \leqq j_1 \leqq k, \ \cdots, \ 0 \leqq j_s \leqq k,$$

をもち，それが連続であるならば，多項式による変数変換

$$x = \varphi_k(y), \qquad \varphi_k(y) \equiv \int_0^y \frac{(2k+1)!}{k!\,k!} (t(1-t))^k dt$$

を用いることによって，変数変換後の被積分関数

$$f(\varphi_k(y_1), \cdots, \varphi_k(y_s)) \cdot \frac{d}{dy_1}\varphi_k(y_1) \cdots \frac{d}{dy_s}\varphi_k(y_s)$$

を $\mathcal{E}^k(C)$ に入れることが出来ることが容易にわかる。また，この多項式による変数変換を行なうと，積分領域の端点に代数的特異性をもつような解析関数も，$\mathcal{E}^{k'}(C')$，$k', C' > 0$ に入れることが出来る。従って，多項式変数変換と good lattice points 法を組み合せることによって，実用上極めて有効な数値積分公式が得られることになる。ただし，変換に用いる多項式の次数 k は，一見，大きければ，大きいほどよいように見えるが，変換後の関数に関する $\mathcal{E}^k(C)$ の $C$ が，k が大きくなるにつれて非常に大きくなる，および，変換に用いる多項式の係数が非常に大きくなる等の理由から，実際には，あまり

大きなk，つまり，あまり大きな次数の多項式変数変換を用いない方がよい。以下では，k=5を用いることにする。

## 2.3 数値例

2.1，2.2で述べて来たDE公式，good lattice points法について，数値例を通して，その性質を見る。

まず，一次元の場合に，端点特異性のない関数 $\exp(x)$，および，端点特異性を持つ関数 $\exp(x)/\sqrt{x}$ に，DE公式，および，一次元の場合のgood lattice points法である台形則を適用する。ただし，k=5の場合の多項式変数変換を用いる。数値実験の結果を図1，図2に示す。

次に，$s=2, 3, 4$ の場合に，関数 $\prod_{j=1}^{s}\exp(x_j)$，および，特異性をもつ関数 $\prod_{j=1}^{s}\exp(x_j)/\sqrt{x_j}$ に，k=5の場合の多項式変数変換を施して，good lattice points法を適用する。結果を図3，図4に示す。なお，

$$\int_0^1 \exp(x)/\sqrt{x}\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{n!}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\times\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$$

$$= 2.92530\ 34918\ 14363\ 21760\ 80972\cdots.$$

図1～4から次のことが見てとれる。

(i) DE公式は，被積分関数の端点特異性の影響をほとんどうけない。また，その収束は，非常にはやい。

(ii) good lattice points法は，誤差のオーダーに関して次元の影響をあまりうけない（図3，4において，誤差の曲線

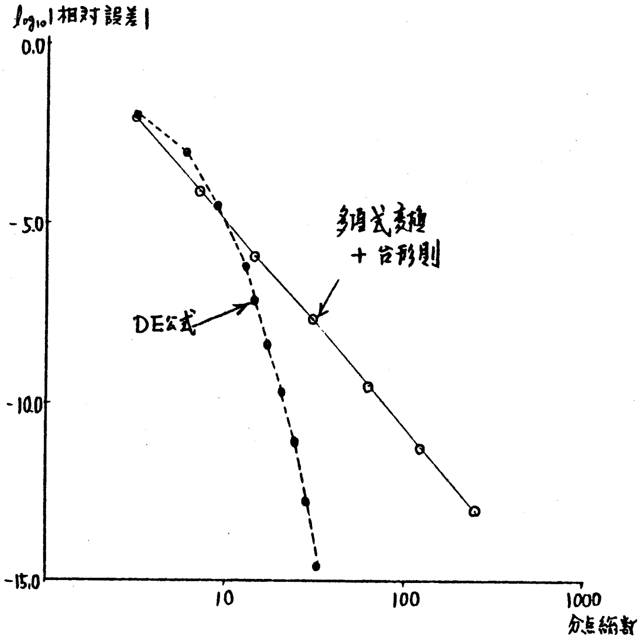


図1. 積分問題 $\int_0^1 \exp(x)dx$ に DE公式と多項式変換＋台形則を適用した時の相対誤差.

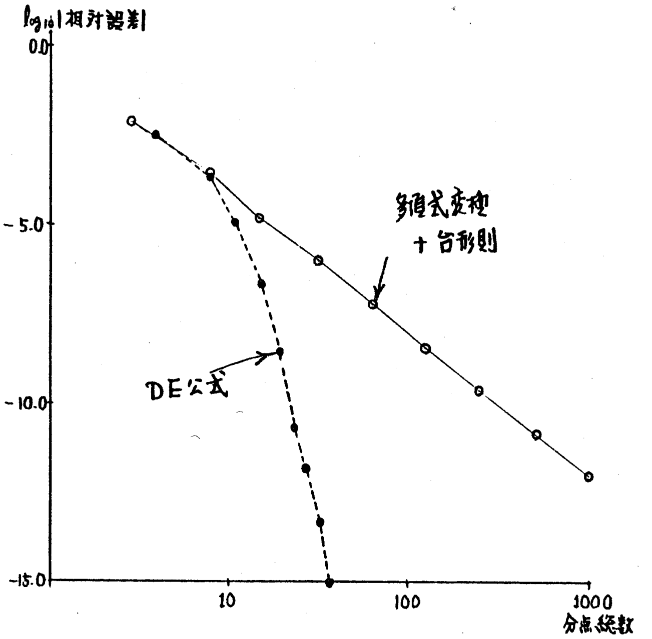


図2 積分問題 $\int_0^1 \exp(x)/\sqrt{x}\,dx$ に DE公式と多項式変換＋台形則を適用した時の相対誤差.

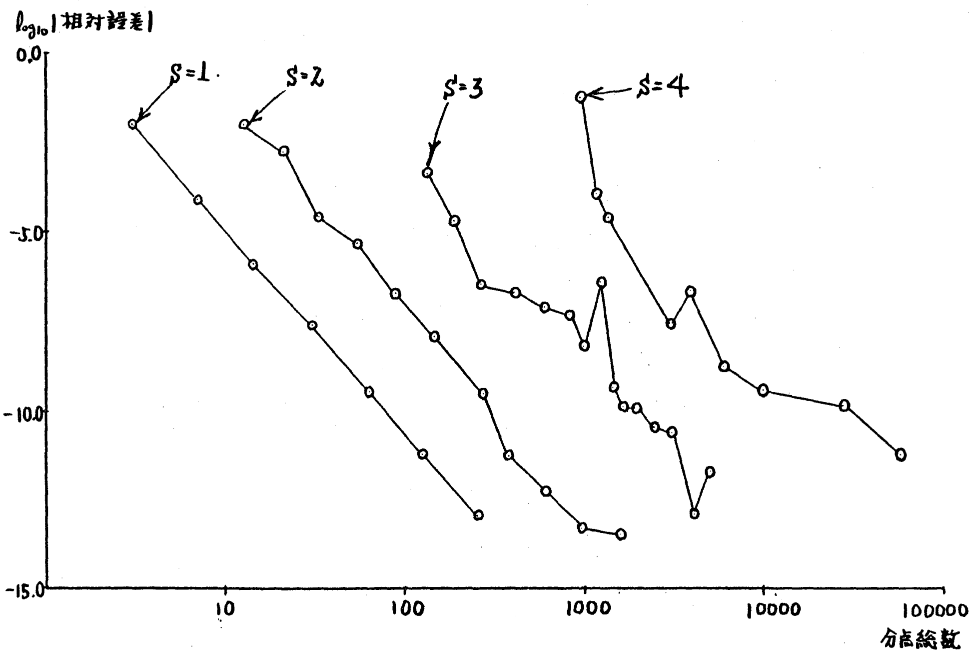


図3. 積分問題 $\int_{[0,1]^s}\prod_{j=1}^{s}\exp(x_j)\,dx$ に 多項式変換$(k=5)$+ good lattice points 法を適用した時の相対誤差.

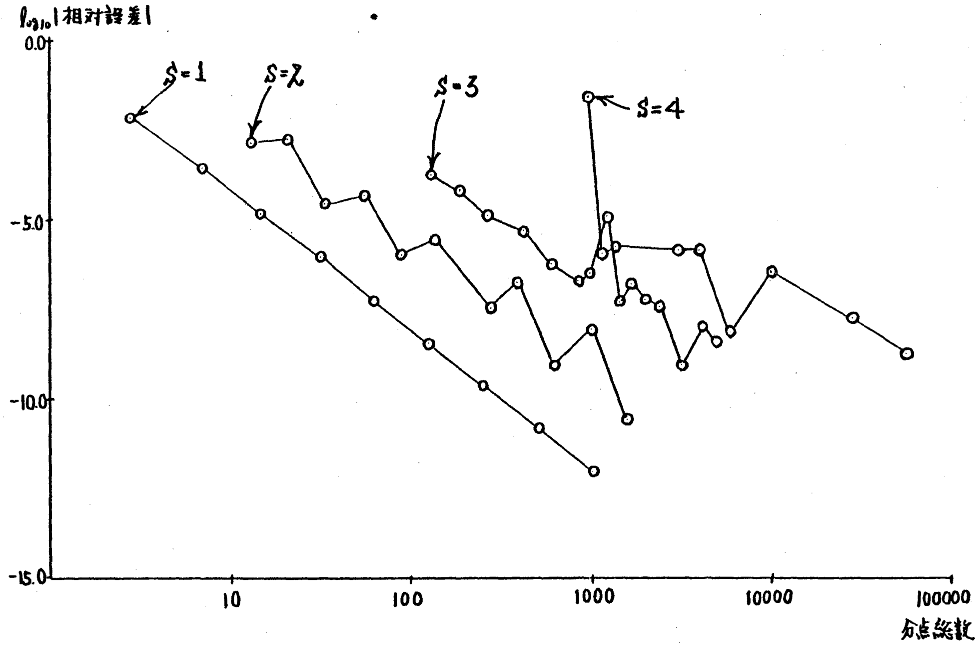


図4. 積分問題 $\int_{[0,1]^s}\prod_{j=1}^{s}\exp(x_j)/\sqrt{x_j}\,dx$ に 多項式変換$(k=5)$+ good lattice points 法を適用した時の相対誤差.

（誤差を結ぶ線）の傾きが，次元の影響をうけない）．しかし，被積分関数の端点特異性の影響を，DE公式に比べて，大きくうける．

2.4 問題提起

2.3で見たように DE公式＝DE変換＋台形則 は，被積分関数の端点特異性に強く，また，多項式変換＋ good lattice points法 は，次元の影響を大きくはうけなかった．そこで，good lattice points 法が，$s=1$ の場合，台形則であることに鑑みて，DE変換＋ lattice points 法を考えることによって，被積分関数の端点特異性に強く，かつ，多項式変換＋ good lattice points 法と同じ程度の誤差を，端点特異性をもたない被積分関数に適用した時に，出すような数値積分公式が得られるのではないかと期待できる．以下，3. において，実際に，そのような性質を持つ公式（多次元DE公式）が得られることを示す．

3. DE変換された被積分関数に対して有効な公式の決定

3.1 問題設定

lattice points 法

DE変換された被積分関数 $g(u)=f(\varphi(u))\cdot\varphi'(u)$ （$\varphi(u)$はDE変換）は $\mathbb{R}^s$ 上の関数となるので，$[0,1]^s$ 上の関数に対

してのみ適用を考えるgood lattice points法をどのように拡張したらよいかは，自明ではない。しかし，名前の通りにlattice points法を解釈すれば，自然に，本来のgood lattice points法の拡張である次のlattice points法を得る。

$$h^s \cdot |\det A| \cdot \sum_{n \in Z^s} g(h \cdot An), \tag{3.1}$$

ここで，$h$は，正で，$h \to 0$とする，

$A$は，$(s,s)$型正則行列，で固定とする，

$g(u) = f(\varphi(u))\varphi'(u)$.

<u>数値積分の対象となる関数族</u>

上記のlattice points法は，行列Aで特徴づけられるが，どのようなAを用いることが良いのかを見るために，数値積分公式(3.1)を適用した時の誤差解析を行う必要がある。そのためには，lattice points法を適用する関数族を明確にしなければならない。DE公式に関する論文[2]の中では，その公式の適用関数族を明示的には示していないが，本質的には次のような関数族に対してDE公式を用いることを前提としている。

$$\mathcal{F}^d(C) = \{ f(x) \mid |\widehat{(f(\varphi(\cdot))\varphi'(\cdot))}(y)| \leq C \exp(-d|y|),\ \forall y \in \mathbb{R} \},$$

ここで $\hat{g}(y)$は，$g$のFourier変換を表わす。

つまり，変換後の関数のFourier変換がexponentialオーダー

減衰しているような関数族を考えている（good lattice points法の場合，多項式変換後の関数のFourier係数が多項式オーダーで減衰しているような関数族を，その適用範囲としていることに注意せよ）．そこで，ここでは，$\mathcal{F}^d(C)$を多次元に一般化した関数族：

$$\mathcal{F}_s^d(C) = \{ f(x) \mid |\widehat{(f(\varphi(\cdot))\varphi'(\cdot))}(y)| \leqq C \exp(-d\sum_{i=1}^{s}|y_i|),$$
$$\forall y = (y_1, \cdots, y_s) \in \mathbb{R}^s \}$$

を，lattice points法を適用する関数族に設定する．従って，主なる問題は，$f \in \mathcal{F}_s^d(C)$にlattice points法を適用した時の誤差を評価し，$\mathcal{F}_s^d(C)$に対して誤差が小さくなるような正則行列Aを求めることとなる。

## 3.2 誤差評価とlattice points法を特徴づける行列Aの決定

$f \in \mathcal{F}_s^d(C)$にlattice points法を適用した時の数値積分誤差は，次のように評価される．

$$|誤差| = \left| \int_{[0,1]^s} f(x)dx - h^s|\det A| \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}^s} f(\varphi(h \cdot An)) \cdot \varphi'(h \cdot An) \right|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^s} g(u)du - h^s \cdot |\det A| \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}^s} g(h \cdot An) \right|$$

$$( g(u) \overset{\mathrm{def}}{=} f(\varphi(u))\varphi'(u) )$$

$$= \left| \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^s \\ m \neq 0}} \hat{g}\left(\frac{2\pi}{h} {}^t(A^{-1})\, m\right) \right| \qquad (\because \text{Poissonの総和公式})$$

$$\leqq C \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^s \\ m \neq 0}} \exp\left(-\frac{2\pi}{h} d\, |{}^t(A^{-1})m|\right) \quad (\because f \in \mathcal{F}_s^d(C))$$

ここで，次のような量を導入する．

$$\rho(A) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \operatorname*{Min}_{\substack{m \in \mathbb{Z}^s \\ m \neq 0}} |{}^t(A^{-1})m| .$$

すると，上記の誤差は，次のように評価される．

$$|\text{数値積分誤差}| \leqq C' \exp\left(-\rho(A)\cdot\frac{2\pi}{h}d\right),$$

ここで $C'$ は，$h$ とは無関係な定数．

従って，$1/(h^s|\det A|)$ が，単位体積あたりの格子点（関数評価を行う点）の数であることに注意すれば，数値積分誤差の小さい公式を得るという問題は，$|\det A| =$ 一定の時に $\rho(A)$ が最大となるような $A$ を求めるという問題に帰着される．この最後の問題は，数の幾何学でよく知られた問題（critical lattice の問題）であって，$s=2,3$ の場合については，解決を見ている．結果は，次のようである．ただし，$|\det A|$の値は，いくつであっても，問題は本質的に同じであるので簡単のため 1 ($|\det A|=1$) としておく([9],[10])．

$s=2$ (2次元の場合)，$\displaystyle\operatorname*{Max}_{|\det A|=1} \rho(A)=\sqrt{2}$，Maxを達成する行列 $=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\sqrt{2}$，

$s=3$ (3次元の場合)，$\displaystyle\operatorname*{Max}_{|\det A|=1} \rho(A)=6/\sqrt[3]{38}$ $(\fallingdotseq 1.7847)$，Maxを達成する行列 $=\begin{pmatrix} 1/38 & 0 & 0 \\ 7/38 & 1 & 0 \\ 11/38 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\sqrt[3]{38}$，

$s \geqq 4$ に関しては, $\underset{|\det A|=1}{\mathrm{Max}}\ \rho(A)$ を達成するようなAは求まってはいない。そこで, $\rho(A)$の計算(表示)が簡単になるような行列

$$A(N, g_2, g_3, \cdots, g_s) = \begin{pmatrix} 1/N & & & 0 \\ g_2/N & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ g_s/N & 0 & & 1 \end{pmatrix} \cdot \sqrt[s]{N},$$

$g_2, g_3, \cdots, g_s, N$ は自然数,

の場合(この時 $\rho(A) = \underset{m \in \mathbb{Z}^s, m \neq 0}{\mathrm{Min}} \{|Nm_1 - g_2 m_2 \cdots - g_s m_s| + |m_2| + \cdots + |m_s|\}/\sqrt[s]{N}$)に, Nが小さい時の

$$\underset{g_2, \cdots, g_s \in \mathbb{Z}}{\mathrm{Max}}\ \rho(A(N, g_2, g_3, \cdots, g_s))$$

の値を計算した(本質的にしらみつぶし計算を行なった)。結果は, $s=4$の場合, 図5に, $s=5$の場合, 図6に示した。図5, 図6の中で$\rho(A(N, g_2, g_3, \cdots, g_s))$が大きくなり得るのは, $N=16$, $N=20$の場合であって, それぞれの場合に$\rho(A)$が最大となるAは, 以下のようになった。

$s=4$の時, $A(16,3,5,7) = \begin{pmatrix} 1/16 & & & 0 \\ 3/16 & 1 & & \\ 5/16 & & 1 & \\ 7/16 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \cdot \sqrt[4]{16}$ で $\rho(A) = 4/\sqrt[4]{16} = 2.0$,

$= \underset{g_2, g_3, g_4 \in \mathbb{Z}}{\mathrm{Max}}\ \rho(A(16, g_2, g_3, g_4))$

$s=5$の時, $A(20,3,5,7,9) = \begin{pmatrix} 1/20 & & & & 0 \\ 3/20 & 1 & & & \\ 5/20 & & 1 & & \\ 7/20 & & & 1 & \\ 9/20 & 0 & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \sqrt[5]{20}$ で $\rho(A) = 4/\sqrt[5]{20} \fallingdotseq 2.1971$,

$= \underset{g_2, g_3, g_4, g_5 \in \mathbb{Z}}{\mathrm{Max}}\ \rho(A(20, g_2, g_3, g_4, g_5))$

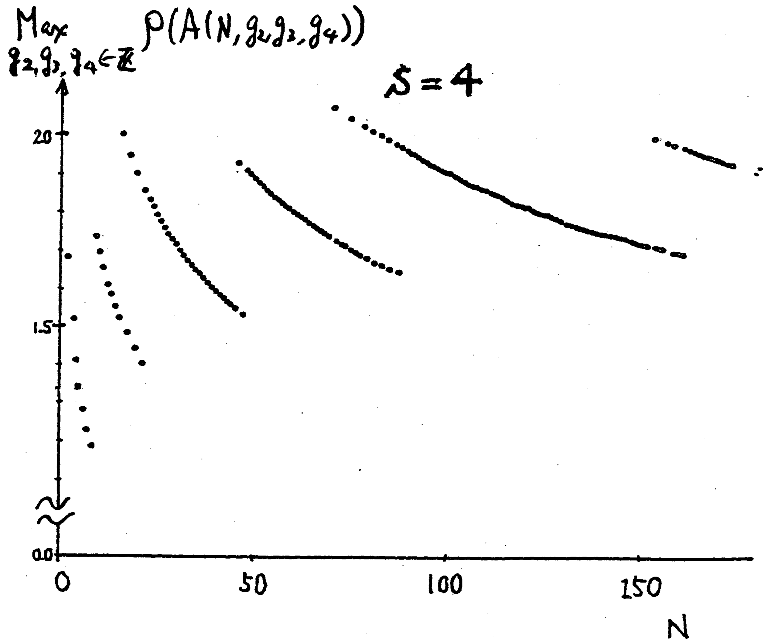


図5. 小さなNに対する $\max_{g_2,g_3,g_4\in\mathbb{Z}} \rho(A(N,g_2,g_3,g_4))$ の値.

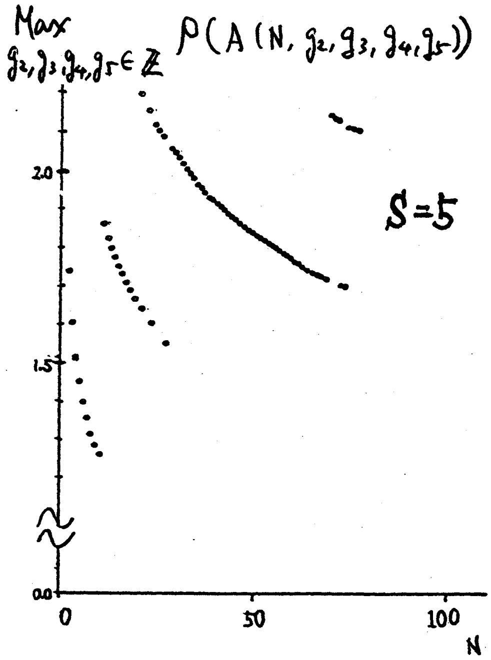


図6. 小さなNに対する $\max_{g_2,g_3,g_4,g_5\in\mathbb{Z}} \rho(A(N,g_2,g_3,g_4,g_5))$ の値.

## 3.3 まとめ

以上で得られた行列Aを用いて，具体的に lattice points 法を書き下すと，次のようになる。ただし，表式が簡単になるように，$|\det A|$ の値を選んだ。

公式2（2次元）　$\displaystyle \frac{h^2}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}^2} g\left(\frac{h}{2}n_1,\ \frac{h}{2}n_1 + hn_2\right)$

公式3（3次元）　$\displaystyle \frac{h^3}{38}\sum_{n\in\mathbb{Z}^3} g\left(\frac{h}{38}n_1,\ \frac{7h}{38}n_1 + hn_2,\ \frac{11h}{38}n_1 + hn_3\right)$

公式4（4次元）　$\displaystyle \frac{h^4}{16}\sum_{n\in\mathbb{Z}^4} g\left(\frac{h}{16}n_1,\ \frac{3h}{16}n_1 + hn_2,\ \frac{5h}{16}n_1 + hn_3,\ \frac{7h}{16}n_1 + hn_4\right)$

公式5（5次元）　$\displaystyle \frac{h^5}{20}\sum_{n\in\mathbb{Z}^5} g\left(\frac{h}{20}n_1,\ \frac{3h}{20}n_1 + hn_2,\ \frac{5h}{20}n_1 + hn_3,\ \frac{7h}{20}n_1 + hn_4,\ \frac{9h}{20}n_1 + hn_5\right)$

ここで，$g$ は DE 変換された被積分関数である。

## 3.4 数値実験

積分 $\int_{[0,1]^s}\prod_{j=1}^{s}\exp(x_j)\,dx$，$\int_{[0,1]^s}\prod_{j=1}^{s}\exp(x_j)/\sqrt{x_j}\,dx$ に 3.3で与えた公式2～4を適用した時の数値積分誤差を，図7，8に示す（$s=5$の場合は，計算時間との関係で，実験は行わなかった）ただし，図における分点数は，$f(\varphi(u))\varphi'(u) >$ 数値積分誤差$/10$ を満足する格子点の数を示す。また，比較のために，多項式変数変換を用いて good lattice points 法を適用した時の結果も記した。

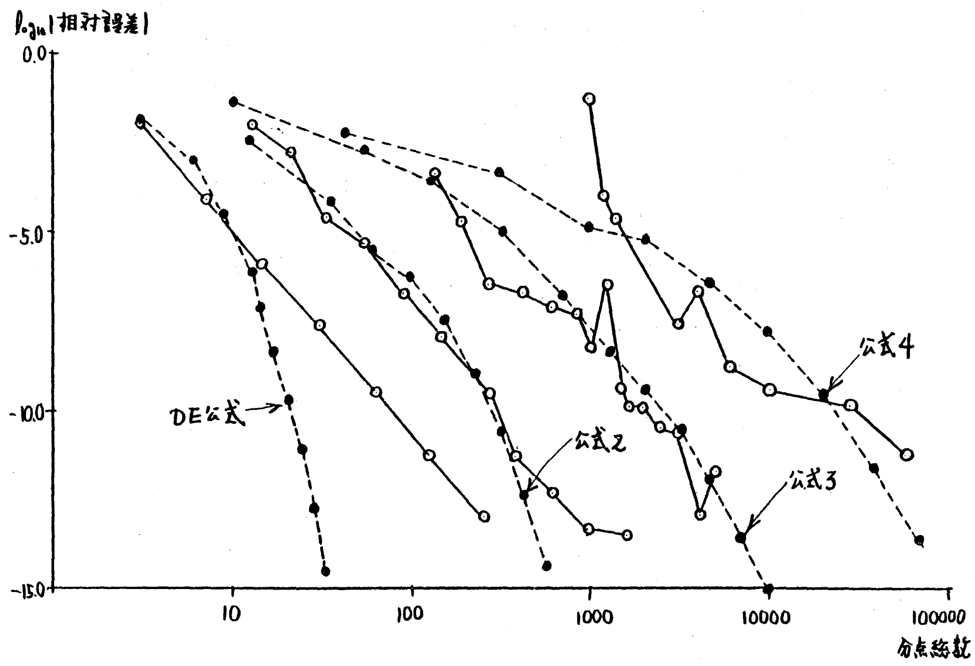


図7. 積分問題 $\int_{[0,1]^s} \prod_{j=1}^{s} \exp(x_j)\,dx$ に DE公式, 公式2〜4を適用した時の相対誤差. (○は good lattice points 法の結果)

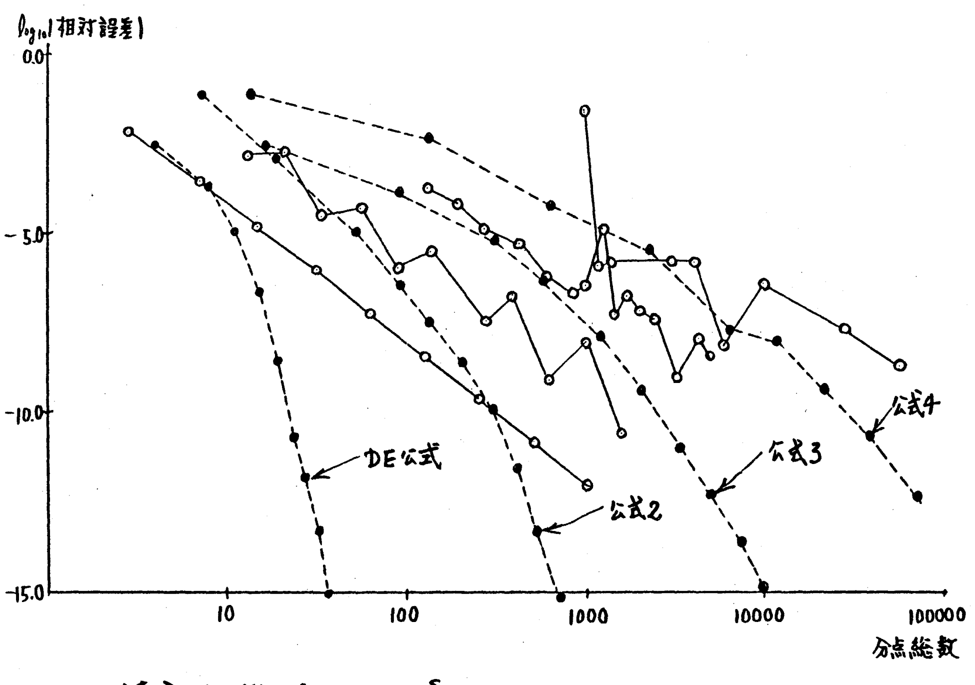


図8. 積分問題 $\int_{[0,1]^s} \prod_{j=1}^{s} \exp(x_j)/\sqrt{x_j}\,dx$ に DE公式, 公式2〜4を適用した時の相対誤差 (○は, good lattice points 法の結果)

この結果から，公式2～4は，被積分関数の端点特異性に強く，かつ，端点特異性をもたないような被積分関数に対しては，多項式変換＋good lattice points法と同じ程度の誤差しか生じないことがわかる。

## 4. おわりに

3.3で与えたように，多次元DE公式というべきものが得られたが，一次元のDE公式と同様，その使用に際しては，多くの注意を必要とする。殊に，多次元においては，関数の多様性は，一次元のそれとは，比較にはならない。従って，多種多様な関数（積分問題）に，これらの公式を適用して，より精密な多次元DE公式の適用可能性に関する研究を行っていくことが，今後の大きな課題である。

References

1. M. Mori: Quadrature formula obtained by variable transformation and the DE-rule. to appear.
2. H. Takahasi and M. Mori: Double exponential formulas for numerical integration. Publ. RIMS, Kyoto Univ., Vol.9, pp.721-741 (1974).
3. 森正武訳：数値積分法，日本コンピュータ協会，1980.
   ( P. J. Davis and P. Rabinowitz: Methods of Numerical Integrations. Academic Press,1975. の日本語訳)

4. 戸田英雄, 小野令美: 入門数値計算. オーム社, 1983.

5. 戸田英雄, 小野令美: Double exponential 変数変換数値積分公式の有効性を発揮させるための注意. 京都大学数理解析研究所講究録, No.339 (1978), pp.74-109.

6. H. Toda and H. Ono: Notes on effective usage of double exponential formulas for numerical integration. 京都大学数理解析研究所講究録, No.401 (1980), pp. 21-47.

7. H. Niederreiter: Quasi-Monte Carlo methods and pseudo-random numbers. Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 84, pp.957-1041 (1978).

8. L.-K. Hua and Y. Wang: Applications of Number Theory to Numerical Analysis. Springer-Verlag, Beijing, 1981.

9. J. W. S. Cassels: An Introduction to the Geometry of Numbers. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1959.

10. C. G. Lekkerkerker: Geometry of Numbers. North-Holland, Amsterdam, 1969.

Abstract

In 1974, H. Takahasi and M. Mori proposed a new quadrature formula for the integration of a certain calss of analytic functions over unit interval [0, 1]. This formula is obtained by the two successive operations : first, to transform the original integrand f(x) over [0, 1] into g(u) over $(-\infty, +\infty)$ by the change of variable: $x=\frac{1}{2}\tanh(\frac{\pi}{2}\sinh(u))+\frac{1}{2}$ (this transformation is called the double exponential transformation, abbreviated to DE-transformation); and then, to apply the trapezoidal rule to the transformed integrand g(u) over $(-\infty, +\infty)$. Nowadays this formula is well known as the DE-formula, abbreviation of the Double Exponential formula, and is recognized to be one of the most efficient formulas for numerical integrations of analytic functions, especially, ones with singularities at the end points of the integration interval.

On the other hand, polynomial transformation have turned out to be powerful in evaluating multiple integration over unit hypercube $[0, 1]^s$ (s: dimension), and there are a great deal of works that discuss which quadrature formula is most efficient for the integrands obtained by polynomial transformations. Many quadrature formulas with high efficiency have been proposed. The most promising among them seems to be the so-called number theoretic methods, combined with appropriate polynomial transformations. Here it is natural to ask if there is an efficient quadrature formula for multiple integrations of the DE-transformed analytic functions. There have been, however, few works dealing with the problem of determining an efficient quadrature

formula for the integrand transformed by DE-transformation. The results of the numerical experiments about the application of the multi-dimenstional trapezoidal rule to the DE-transformed integrand have only been reported. Thus we consider the above problem, i.e., the determination of an efficient formula for DE-transformed integrands. Since it is difficult to take into account all kinds of quadratures, we seek an efficient method of numerical integration among the methods of lattice points, which are regarded as extensions of the multi-dimensional trapezoidal rule. It is the thoery of the geometry of numbers that is a useful tool in this search. As a consequence of the search, the following quadrature formulas are obtained, which are good from practical and theoretical points of view.

$$s=2,\quad \frac{h^2}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}^2} g\left(\frac{h}{2}n_1,\ \frac{h}{2}n_1+hn_2\right),$$

$$s=3,\quad \frac{h^3}{38}\sum_{n\in\mathbb{Z}^3} g\left(\frac{h}{38}n_1,\ \frac{7h}{38}n_1+hn_2,\ \frac{11h}{38}n_1+hn_3\right),$$

$$s=4,\quad \frac{h^4}{16}\sum_{n\in\mathbb{Z}^4} g\left(\frac{h}{16}n_1,\ \frac{3h}{16}n_1+hn_2,\ \frac{5h}{16}n_1+hn_3,\ \frac{7h}{16}n_1+hn_4\right),$$

$$s=5,\quad \frac{h^5}{20}\sum_{n\in\mathbb{Z}^5} g\left(\frac{h}{20}n_1,\ \frac{3h}{20}n_1+hn_2,\ \frac{5h}{20}n_1+hn_3,\ \frac{7h}{20}n_1+hn_4,\ \frac{9h}{20}n_1+hn_5\right),$$

where $g(u)$ is the integrand transformed by DE- transformation.