

3母数ワイブル分布の推定問題

国立水俣病研究センター

柴田義貞 (Yoshisada Shibata)

1. はじめに

ワイブル分布は寿命時間の分布を表わすモデルとしてもよく使われるものの一つである。通常は形状母数と尺度母数をもつ2母数ワイブル分布が用いられるが、癌の場合のように、いわゆる潜伏期間が考えられるような疾病による死を扱う場合、さらに位置母数を導入して、3母数ワイブル分布を用いることがある。本論では、形状、尺度、位置の3母数が未知の3母数ワイブル分布について、その母数と特性値の推定を論じる。

2. 3母数ワイブル分布

確率密度関数

$$f(x) = \frac{\gamma}{\theta} \left(\frac{x-\xi}{\theta} \right)^{\gamma-1} \exp \left[- \left(\frac{x-\xi}{\theta} \right)^{\gamma} \right], \quad x > \xi; \theta > 0, \gamma > 0$$

をもつ分布を3母数ワイブル分布とよび、 $W(\xi; \theta, \gamma)$ と記す。1次、2次のモーメントは

$$\mu_1' = \xi + \theta \Gamma(1 + 1/\gamma)$$

$$\mu_2 = \theta^2 \{ \Gamma(1 + 2/\gamma) - \Gamma^2(1 + 1/\gamma) \}$$

歪度、尖度は

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{\Gamma(1 + 3/\gamma) - 3\Gamma(1 + 2/\gamma)\Gamma(1 + 1/\gamma) + 2\Gamma^3(1 + 1/\gamma)}{\{ \Gamma(1 + 2/\gamma) - \Gamma^2(1 + 1/\gamma) \}^{3/2}}$$

$$\beta_2 = \frac{\Gamma(1 + 4/\gamma) - 4\Gamma(1 + 3/\gamma)\Gamma(1 + 1/\gamma) + 6\Gamma(1 + 2/\gamma)\Gamma^2(1 + 1/\gamma) - 3\Gamma^4(1 + 1/\gamma)}{\{ \Gamma(1 + 2/\gamma) - \Gamma^2(1 + 1/\gamma) \}^2}$$

3. 母数の推定

x_1, \dots, x_n を3母数ワイブル分布 $W(\xi; \theta, \gamma)$ からの大きさ n の標本として、未知母数 ξ, θ, γ の推定を考える。

(1) 最尤推定

位置母数 ξ が未知のため難点が一つ生じる。実際、尤度は

$$\left(\frac{\gamma}{\theta}\right)^n \left\{ \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \xi}{\theta}\right)^{\gamma-1} \right\} \exp\left[-\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \xi}{\theta}\right)^\gamma\right]$$

であるから、形状母数 γ の大きさに関する情報が皆無の場合、 $\gamma (< 1)$ と θ を任意に定め、 $\xi \uparrow x_{(1)} \equiv \min(x_1, \dots, x_n)$ とすると、尤度は無限大に近づき最尤推定値は定まらない。

しかし、 $\gamma > 2$ ということが分かっているれば、未知母数の

最尤推定値 $\hat{\xi}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\gamma}$ は, 尤度方程式

$$-\frac{n\hat{\gamma}}{\hat{\theta}} + \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\theta}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \hat{\xi}}{\hat{\theta}} \right)^{\hat{\gamma}} = 0$$

$$\frac{n}{\hat{\theta}} + \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{x_i - \hat{\xi}}{\hat{\theta}} \right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \hat{\xi}}{\hat{\theta}} \right)^{\hat{\gamma}} \log \left(\frac{x_i - \hat{\xi}}{\hat{\theta}} \right) = 0$$

$$-(\hat{\gamma} - 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i - \hat{\xi}} + \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\theta}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \hat{\xi}}{\hat{\theta}} \right)^{\hat{\gamma}-1} = 0$$

の解として定まり, 正則である. その分散は漸近的に

$$V[\sqrt{n}\hat{\xi}] \simeq \theta^2 \frac{1}{\Delta(\gamma)} \frac{\psi'(1)}{(\gamma-1)^2}$$

$$V[\sqrt{n}\hat{\theta}] \simeq \left(\frac{\theta}{\gamma}\right)^2 \frac{1}{\Delta(\gamma)} \left[\{\psi'(1) + \psi^2(2)\} \Gamma\left(1 - \frac{2}{\gamma}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \{1 + \psi\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\}^2 \right]$$

$$V[\sqrt{n}\hat{\gamma}] \simeq \gamma^2 \frac{1}{\Delta(\gamma)} \left\{ \Gamma\left(1 - \frac{2}{\gamma}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \right\}$$

ただし

$$\Delta(\gamma) = \psi'(1) \Gamma\left(1 - \frac{2}{\gamma}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \left[\psi'(1) + \left\{ \psi(1) - \psi\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \right\}^2 \right]$$

$$\psi(x) = \frac{d \log \Gamma(x)}{dx}$$

いくつかの γ の値に対する漸近分散の値を表 3.1 に示す.

ところで, ξ が既知の場合, θ , γ の最尤推定量の漸近分散は

表 3.1 $W(\xi; \theta, \gamma)$ の最尤推定量の漸近分散

γ	$V[\sqrt{n}\hat{\theta}/\theta]$	$V[\sqrt{n}\hat{\gamma}/\gamma]$	$V[\sqrt{n}\hat{\xi}/\theta]$
2.1	0.329	0.724	0.056
2.5	0.670	1.286	0.396
3.0	1.361	2.204	1.072
4.0	3.535	4.755	3.209
5.0	6.704	8.260	6.348
6.0	10.844	12.229	10.010
7.0	15.946	18.130	15.550

$$V[\sqrt{n}\hat{\theta}] \simeq \left(\frac{\theta}{\gamma}\right)^2 \frac{\psi'(1) + \psi^2(2)}{\psi'(1)}$$

$$\doteq 1.1087 (\theta/\gamma)^2$$

$$V[\sqrt{n}\hat{\gamma}] \simeq \frac{\gamma^2}{\psi'(1)}$$

$$\doteq 0.6079 \gamma^2$$

であるから、 ξ が未知の場合、 γ が大きくなると、既知の場合に比べ推定量の分散が極端に大きくなることが分かる。

また、 $0 < \gamma < 1$ ということが分かれば、 $\hat{\xi} = \alpha_{(1)}$ は ξ の super-efficient な推定量で、その分散は

$$\frac{\theta^2}{n^{2/\gamma}} \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\gamma}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \right\}$$

である。この場合、 θ, γ の最尤推定値を求めるには、 $\alpha_{(1)}$ を $\alpha_{(1)} - \alpha_{(1)}$ で置き換え、2母数ワイブル分布の最尤法を

行えばよい (Johnson & Kotz (1970)).

このように、すべての母数が未知で形状母数に関する先験情報がない場合、最尤推定は不可能となるので、以下では別の推定法をいくつか考える。

(2) いくつかの推定方法

方法 I (モーメント法)

標本から計算した1次, 2次, 3次のモーメントをそれぞれ母集団分布の対応するモーメントと等置して推定値を求める。すなわち, 連立方程式

$$\xi + \theta \Gamma(1 + 1/\delta) = \bar{x} \quad (3.1)$$

$$\theta^2 \{ \Gamma(1 + 2/\delta) - \Gamma^2(1 + 1/\delta) \} = m_2 \quad (3.2)$$

$$\theta^3 \{ \Gamma(1 + 3/\delta) - 3\Gamma(1 + 2/\delta)\Gamma(1 + 1/\delta) + 2\Gamma^3(1 + 1/\delta) \} = m_3 \quad (3.3)$$

を未知母数について解く。ただし

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad m_n = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^n}{n} \quad (n=2,3)$$

(3.2), (3.3) 式より

$$\sqrt{\beta_1} = m_3 / m_2^{3/2} \quad (3.4)$$

左辺は δ の単調減少関数で(2節参照)

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \sqrt{\beta_1} = \frac{6\sqrt{6} \psi''(1)}{\pi^3} \doteq -1.13954$$

したがって, 解の存在しない場合も起こり得るが, 存在すれば一意である。(3.4)式の解を(3.2)式に代入して θ の推

定値を求め、最後に (3.1) 式から ξ の推定値を求める。

図 3.1 は $\sqrt{\beta_1}$ のグラフを描いたもので、この図から明らかのように、モーメント法による推定値は、 γ が大きいとき、かなり悪くなる場合のあり得ることが予想される。

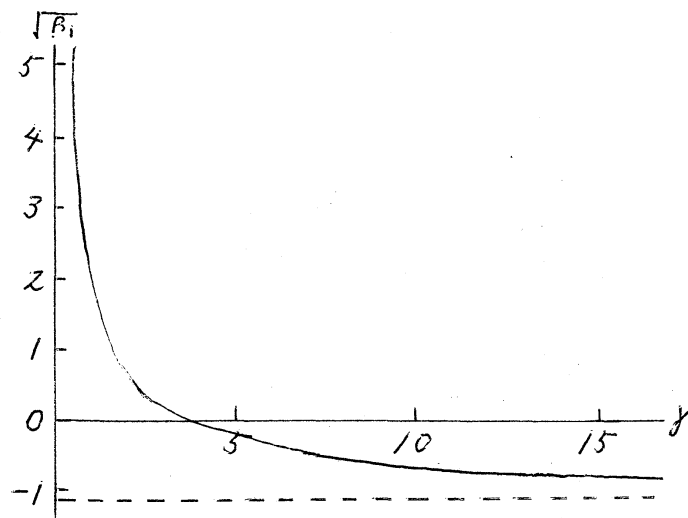


図 3.1 $W(\xi; \theta, \gamma)$ の歪度

方法 II

$\xi < x_{(1)}$ を一つ定めると、尤度を最大にする θ, γ は次の連立方程式の解である。

$$\theta = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \xi)^\gamma}{n} \right\}^{1/\gamma} \quad (3.5)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \xi)^\gamma \log(x_i - \xi)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \xi)^\gamma} - \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(x_i - \xi) = 0 \quad (3.6)$$

方程式 (3.6) は Newton-Raphson 法で簡単に解け、その解 $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(\xi)$ を (3.5) 式に代入して $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\xi)$ を得る。こ

のとき、尤度は ξ の関数で、その対数は

$$\log L(\xi) = n \log[\hat{f}(\xi)/\hat{\theta}(\xi)] + (\hat{f}(\xi)-1) \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{x_i - \xi}{\hat{\theta}(\xi)} \right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \xi}{\hat{\theta}(\xi)} \right)^{\hat{f}(\xi)}$$

となる。したがって、 $L(\xi)$ を最大にする $\xi = \hat{\xi}$ ($< x_{(1)}$)を求めれば、 $\hat{\xi}$, $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\hat{\xi})$, $\hat{f} = \hat{f}(\hat{\xi})$ が“最尤推定値”となる。関数 $\log L(\xi)$ の挙動は一般に複雑であるかもしれないが、経験的には(i)単調増加, (ii)単峰, (iii)単調減少, となる場合が多い。(iii)の場合, “最尤推定値”は存在しないが, (i), (ii)の場合には, 次のようにして“最尤推定値”が得られる。

(i) の場合

δ を十分小さな正数として, $\hat{\xi} = x_{(1)} - \delta$, $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\hat{\xi})$, $\hat{f} = \hat{f}(\hat{\xi})$ とすればよい。

(ii) の場合

$$d \log L(\xi) / d\xi = 0 \quad (3.7)$$

を満足する $\xi = \hat{\xi}$ を求め, $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\hat{\xi})$, $\hat{f} = \hat{f}(\hat{\xi})$ とすればよい。

上記の方法では推定値が得られない場合もあり, また得られる場合でも多数回の繰り返し計算が必要になる。そこで, 精度は劣るかもしれないが, もう少し簡単な方法を考える。

方法 III

まず, $\xi < x_{(1)}$ と

$$E[x_{(1)}] = \xi + \frac{\theta}{n^{1/\delta}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \quad (3.8)$$

に注意しておく. $\hat{\xi} = x_{(1)} - \delta$ (δ は十分小さな正数) と
して, (3.5), (3.6) 式から $\theta = \hat{\theta}$, $\delta = \hat{\delta}$ を求める. 次
に (3.8) 式を用いて

$$\hat{\xi} = x_{(1)} - \frac{\hat{\theta}}{n^{1/\hat{\delta}}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\hat{\delta}}\right)$$

とし, この $\hat{\xi}$ を用いて再び (3.5), (3.6) 式から $\theta = \hat{\theta}$, $\delta = \hat{\delta}$
を求め, $\hat{\xi}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\delta}$ を推定値とする.

ところで

$$E[\bar{x}] = \xi + \theta \Gamma(1 + 1/\delta)$$

だから, (3.8) 式を

$$E[x_{(1)}] = (1 - 1/n^{1/\delta})\xi + E(\bar{x})/n^{1/\delta} \quad (3.9)$$

と書き直すことができ, (3.9) 式を用いて, 方法 III と同様の
方法で推定することができる. これを方法 IV とよぶ.

4. 数値例

例 1 次の数値は $W(0; 1, 0.5)$ からの大きさ 20 の標本を
乱数を用いて生成したものである.

0.26012	0.69448	2.67341	0.34840	0.03677
0.02068	2.29601	0.00044	0.06755	0.03355
0.00054	0.08296	0.16449	0.86991	0.15345
0.10450	0.08573	0.00550	2.89745	1.06020

まず、モーメント法による推定を考える。

$$\bar{x} = 0.59281, \quad m_2 = 0.82105, \quad m_3 = 1.22107$$

を (3.1), (3.2), (3.3) 式の右辺に代入して、推定値

$$\tilde{\xi} = -0.44, \quad \tilde{\theta} = 1.08, \quad \tilde{\delta} = 1.14$$

を得る。

$\delta = 10^{-6}$ として、 $\xi \leq x_{(i)} - \delta$ に対して $\log L(\xi)$ のグラフを描くと、 $\log L(\xi)$ が単調増加であることが分かる。したがって、“最大推定値”は

$$\hat{\xi} = 0.00044, \quad \hat{\theta} = 0.30, \quad \hat{\delta} = 0.45$$

また、 $\delta = 10^{-6}$ として方法 III, IV を用いて推定すると、推定値は、それぞれ

$$\xi^* = -0.0018, \quad \theta^* = 0.34, \quad \delta^* = 0.53$$

$$\xi^{**} = 0.0000043, \quad \theta^{**} = 0.33, \quad \delta^{**} = 0.52$$

例 2 次の数値は $W(0; 1, 5)$ からの大きさ 20 の標本を乱数を用いて生成したものである。

0.87401	0.96420	1.10333	0.89993	0.71870
0.67849	1.08667	0.46183	0.76377	0.71214
0.47125	0.77963	0.83486	0.98616	0.82908
0.79783	0.78219	0.59435	1.11225	1.00586

モーメント法による推定値は

$$\hat{\xi} = 0.036, \quad \hat{\theta} = 0.86, \quad \hat{\delta} = 4.88$$

例1と同様に $\log L(\xi)$ のグラフを描くと, $\log L(\xi)$ が上に凸な単峰関数であることが分かる. そこで, 方程式(3.7)を解くと $\hat{\xi} = 0.091$ を得, $\hat{\theta} = 0.80, \hat{\delta} = 4.60$ を得る.

方法Ⅲ, Ⅳによる推定値は, それぞれ

$$\xi^* = 0.38, \quad \theta^* = 0.42, \quad \delta^* = 1.96$$

$$\xi^{**} = 0.010, \quad \theta^{**} = 0.92, \quad \delta^{**} = 5.34$$

次の例は $\log L(\xi)$ が単調減少となり, “最尤推定値” が得られない例である.

例3 次の数値は $W(0; 1, 5)$ からの大きさ20の標本を乱数を用いて生成したものである.

0.77158	1.03761	0.29598	0.93392	0.91060
1.15402	0.67037	0.91060	1.10131	1.22143
0.94540	1.15736	1.09954	0.74890	0.86887
0.57645	0.64560	1.09655	1.27289	0.99468

モーメント法による推定値は

$$\hat{\xi} = -1.96, \quad \hat{\theta} = 2.99, \quad \hat{\delta} = 14.79$$

方法Ⅲ, Ⅳによる推定値は, それぞれ

$$\xi^* = 0.039, \quad \theta^* = 0.75, \quad \delta^* = 3.11$$

$$\xi^{**} = 0.24, \quad \theta^{**} = 1.03, \quad \delta^{**} = 4.86$$

5. 信頼度, パーセント点の推定

分布の未知母数の推定は重要ではあるが, 実際問題では信頼度やパーセント点の推定がより重要となる場合が少なくない。

1) .

3母数ワイブル分布 $W(\xi; \theta, \delta)$ の時点 t における信頼度は

$$R_t = \begin{cases} \exp\left[-\left(\frac{t-\xi}{\theta}\right)^\delta\right] & (t > \xi) \\ 1 & (t \leq \xi) \end{cases}$$

であり, 下側 α 点は

$$\zeta_\alpha = \xi + \theta \{-\log(1-\alpha)\}^{1/\delta}$$

3節に述べた母数の推定方法 i ($i = \text{I, II, III, IV}$) による推定値を $\hat{\xi}^{(i)}$, $\hat{\theta}^{(i)}$, $\hat{\delta}^{(i)}$ とすると, R_t , ζ_α は

$$\hat{R}_t^{(i)} = \begin{cases} \exp\left[-\left(\frac{t-\hat{\xi}^{(i)}}{\hat{\theta}^{(i)}}\right)^{\hat{\delta}^{(i)}}\right] & (t > \hat{\xi}^{(i)}) \\ 1 & (t \leq \hat{\xi}^{(i)}) \end{cases}$$

$$\hat{\zeta}_\alpha^{(i)} = \hat{\xi}^{(i)} + \hat{\theta}^{(i)} \{-\log(1-\alpha)\}^{1/\hat{\delta}^{(i)}}$$

で推定することができる。

6. 推定量の比較

4節の数値例は、方法Ⅰ（モーメント法）がもっとも劣り、方法Ⅳが他の方法に勝るとも劣らないことを示している。しかし、これは特定の例に基づくもので、方法の優劣を論じるには、推定量の偏り、分散などの比較が必要になる。

ところで、小標本の場合にこれらの推定量のモーメントを正確に計算することは事実上不可能である。漸近展開による方法も考えられるが、ここでは簡単のため、モンテカルロ・シミュレーションを行って比較した。方法Ⅱは多数回の繰り返し計算を要するので、シミュレーション回数は2000とした。他の方法については10000回のシミュレーションを行った。

表6.1から表6.3は母数推定の場合の結果を示す。信頼度とパーセント点の推定については、それぞれ表6.4、6.5に結果を示す。

方法Ⅱでは、既に述べたように、推定値が得られない場合が生じるが、今回行った2000回のシミュレーションでは、解の得られなかった回数は次のとおりであった。730 ($\delta = 0.5$)、727 ($\delta = 1$)、703 ($\delta = 1.5$)、648 ($\delta = 2$)、499 ($\delta = 3$)。したがって、実際のシミュレーション回数は1300～1500回で、得られた結果をそのまま比較して結論を下すのは危険か

表 6.1 ξ の推定量の比較; $\xi = 0, \theta = 1; n = 20$

γ		方法Ⅰ	方法Ⅱ	方法Ⅲ	方法Ⅳ
0.5	bias	-1.2473	0.0052	-0.0082	-0.0086
	variance	0.7735	0.0001	0.0003	0.0003
	m.s.e.	2.3292	0.0001	0.0003	0.0004
1.0	bias	-0.3089	0.0494	-0.0246	-0.0286
	variance	0.0664	0.0038	0.0050	0.0057
	m.s.e.	0.1619	0.0062	0.0056	0.0065
1.5	bias	-0.2080	0.1066	-0.0167	-0.0355
	variance	0.0925	0.0182	0.0165	0.0219
	m.s.e.	0.1357	0.0295	0.0167	0.0231
2.0	bias	-3.1687	0.1163	0.0145	-0.0278
	variance	8.8×10^4	0.0910	0.0297	0.0463
	m.s.e.	8.8×10^4	0.1045	0.0299	0.0471
3.0	bias	-61.693	0.0737	0.1060	0.0146
	variance	2.1×10^6	0.3345	0.0484	0.1013
	m.s.e.	2.1×10^6	0.3400	0.0596	0.1015

表 6.2 θ の推定量の比較; $\xi = 0, \theta = 1; n = 20$

γ		方法Ⅰ	方法Ⅱ	方法Ⅲ	方法Ⅳ
0.5	bias	2.0356	-0.0503	0.1502	0.1537
	variance	2.6687	0.2122	0.3030	0.3040
	m.s.e.	6.8122	0.2148	0.3256	0.3276
1.0	bias	0.4070	-0.1844	0.0337	0.0422
	variance	0.2052	0.0432	0.0675	0.0697
	m.s.e.	0.3709	0.0771	0.0687	0.0715
1.5	bias	0.2320	-0.2372	-0.0223	0.0004
	variance	0.1540	0.0409	0.0410	0.0465
	m.s.e.	0.2078	0.0971	0.0415	0.0465
2.0	bias	3.1745	-0.2177	-0.0812	-0.0422
	variance	8.8×10^4	0.1315	0.0375	0.0483
	m.s.e.	8.8×10^4	0.1788	0.0441	0.0500
3.0	bias	61.690	-0.1303	-0.1967	-0.1312
	variance	2.1×10^6	0.3858	0.0392	0.0621
	m.s.e.	2.1×10^6	0.4028	0.0779	0.0794

表 6.3 λ の推定量の比較; $\xi=0, \theta=1; n=20$

γ					
0.5	bias	0.4805	-0.0330	0.0852	0.0867
	variance	0.0644	0.0047	0.0143	0.0144
	m.s.e.	0.2953	0.0058	0.0216	0.0219
1.0	bias	0.4693	-0.2729	0.1315	0.1437
	variance	0.2382	0.0408	0.0617	0.0689
	m.s.e.	0.4585	0.1153	0.0790	0.0896
1.5	bias	0.5174	-0.5364	0.0975	0.1466
	variance	0.7282	0.2982	0.1447	0.1875
	m.s.e.	0.9959	0.5859	0.1542	0.2089
2.0	bias	16.266	-0.5692	-0.0263	0.0829
	variance	2.4×10^6	1.6613	0.2586	0.3855
	m.s.e.	2.4×10^6	1.9854	0.2593	0.3924
3.0	bias	317.56	-0.3477	-0.4808	-0.2185
	variance	5.8×10^7	6.9879	0.5366	1.0064
	m.s.e.	5.8×10^7	7.1088	0.7677	1.0541

表 6.4 R_t の推定量の比較; $t = \chi_{0.05}^2; \xi=0, \theta=1; n=20$

γ					
0.5	bias	-0.2773	0.0065	-0.0119	-0.0125
	variance	0.0083	0.0019	0.0008	0.0008
	m.s.e.	0.0852	0.0020	0.0009	0.0010
1.0	bias	-0.0717	-0.0086	-0.0044	-0.0046
	variance	0.0039	0.0035	0.0011	0.0011
	m.s.e.	0.0091	0.0036	0.0011	0.0011
1.5	bias	-0.0216	-0.0180	-0.0053	-0.0070
	variance	0.0020	0.0051	0.0014	0.0014
	m.s.e.	0.0025	0.0055	0.0014	0.0014
2.0	bias	-0.0091	-0.0158	-0.0081	-0.0139
	variance	0.0016	0.0058	0.0018	0.0021
	m.s.e.	0.0016	0.0061	0.0018	0.0023
3.0	bias	-0.0022	-0.0035	-0.0153	-0.0396
	variance	0.0013	0.0046	0.0028	0.0084
	m.s.e.	0.0014	0.0046	0.0030	0.0100

表 6.5 $\chi_{0.05}$ の推定量の比較; $\xi = 0$, $\theta = 1$; $n = 20$

γ					
0.5	bias	-1.0885	0.0048	-0.0006	-0.0008
	variance	0.6901	0.0001	0.0001	0.0001
	m.s.e.	1.8750	0.0002	0.0001	0.0001
1.0	bias	-0.1536	0.0142	0.0051	0.0044
	variance	0.0188	0.0027	0.0026	0.0026
	m.s.e.	0.0424	0.0029	0.0026	0.0026
1.5	bias	-0.0445	0.0163	0.0034	-0.0020
	variance	0.0126	0.0069	0.0065	0.0068
	m.s.e.	0.0146	0.0072	0.0066	0.0068
2.0	bias	-0.0119	0.0241	-0.0021	-0.0168
	variance	0.0116	0.0096	0.0096	0.0112
	m.s.e.	0.0117	0.0102	0.0096	0.0115
3.0	bias	-0.0072	0.0343	-0.0122	-0.0501
	variance	0.0102	0.0099	0.0122	0.0210
	m.s.e.	0.0103	0.0111	0.0124	0.0235

もしもなにか、実用上は方法Ⅲ, IVを使えばよい, と言ってもよいであろう。

形状母数 γ が大きいとき, 方法Ⅰは母数の推定に関し極端に悪くなるが, 信頼度, パーセント点の推定に関しては他の方法にそれほど劣らない。この点は注目し値するであろう。

参考文献

Johnson, N. L. & Kotz, S. (1970). *Continuous Univariate Distributions-1*.
New York: Wiley.