

## 同心円筒間の微小球のおそい運動

東大理 福本康秀 (Yasuhide Fukumoto)

### さの序

工学や応用科学の様々な分野で、管内に満たされた粘性流体中をゆくり運動する粒子に働く力やトルクの知識が必要とされる。今回、同心二重円筒間の粘性流体中における微小な剛体球のおそい運動について述べる。この問題は、極限の場合として境界が1平板<sup>1)</sup>、2枚の平行な平板<sup>2)</sup>の場合や、円筒内部<sup>3)</sup>及び円筒外部<sup>4)</sup>の球の運動の問題を含んでいるので、壁の曲率が球に及ぼす影響を理解するのに格好の材料を与えてくれる。レイノルズ数( $Re$ )が小さいとき、出発点としてストークス近似を用いても悪くない。しかしながら、軸に平行に運動する球には揚力が働いて球は横方向に移動(lateral migration)することがよく知られており、これを求めるには流体の慣性を考慮する必要がある。静止流体中を落下するとき、球は壁から外向きの力を受ける<sup>5)</sup>。従って、円筒内を落下

するときには軸上に平衡の位置がある。<sup>6)7)</sup>ここでは、同心円筒間を軸に平行にゆっくり落下する球に生ずる半径方向の運動も、 $O(Re)$ の運動と合わせて議論する。

### §1 基礎方程式

無限長の同心二重円筒が鉛直に立ち、その二円筒間に満たされた非圧縮性の粘性流体中を、微小な剛体球が角速度 $\Omega'$ で回転しながら一定速度 $V_0'$ でゆっくり軸方向に沈降する問題を考える。内円筒と外円筒の半径を各々 $r_1, r_2$ 、球の半径を $a$ 、流体の密度と粘性率を各々 $\rho, \mu$ とし、十分遠方では流体は静止しているものとする。図1-1のように球と共に動く直交座標系 $(x_1', x_2', x_3')$ を導入しよう。円筒の軸を $x_3'$ 軸とし、球の中心が $r_0' = (r_0', 0, 0)$ となるようにとる。

ここで、 $Re = aV_0'/\nu$ 、及び、代表的な長さ $a$ 、速度を $V_0'$ として無次元化した量

$$r = r'/a, \quad v = v'/V_0', \quad \Omega = a\Omega'/V_0', \quad p = aP'/\mu V_0' \quad (1.1)$$

を導入する。 $v', p'$ は次元のある流体の速度と圧力である。すると一様流 $U_0 = -V_0 e_3$ を差し引いた速度と圧力

$$v^* = v - U_0, \quad (1.2)$$

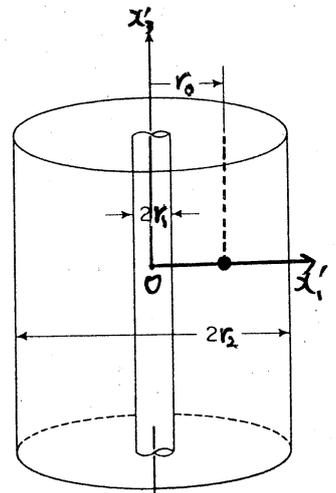


図1-1

$$p^* = p - P_0, \quad (1.3)$$

の従う方程式と境界条件は

$$\Delta v^* - \nabla p^* = \text{Re}(\omega_0 \cdot \nabla v^* + v^* \cdot \nabla v^*), \quad (1.4)$$

$$\nabla \cdot v^* = 0, \quad (1.5)$$

$$\text{球の上で } v^* = V_\infty e_3 + \Omega \times (r - r_0), \quad (1.6)$$

$$\text{壁の上で } v^* = 0, \quad (1.7)$$

$$x_3 \rightarrow \pm\infty \text{ で } v^* \rightarrow 0, \quad (1.8)$$

で与えられる。さらにもう一つ無次元パラメータ  $k = a/r_2$  を導入する。Cox & Brenner<sup>2)</sup> は、次の条件

$$\text{Re} \ll k \ll 1 \quad (1.9)$$

が満たされる場合に、上の方程式を  $\text{Re}$  と  $k$  で展開することによって、 $O(\text{Re})$  の横方向の速度を与える公式を導出した。§2 と §3 で、同心円筒の場合について、この理論を  $O(\text{Re}^2)$  の力も含む形で簡単に述べる。

## §2 $\text{Re}$ による展開

まず  $k$  を固定して  $\text{Re}$  によって展開する。(1.9) を仮定するとき、すなわち壁が内部領域に入ってくるときは、外部展開は不要である。内部展開を次のように定義する。

$$v^* = v_0^* + \text{Re} v_1^* + o(\text{Re}), \quad (2.1)$$

$$p^* = p_0^* + \text{Re} p_1^* + o(\text{Re}). \quad (2.2)$$

(2.1), (2.2) を (1.4)~(1.8) に代入して  $O(Re^0)$  の項を取り出すと,

$$\Delta v_0^* - \nabla p_0^* = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot v_0^* = 0, \quad (2.4)$$

$$\text{球の上で } v_0^* = V_0 e_3 + \Omega \times (r - r_0), \quad (2.5)$$

$$\text{壁の上で } v_0^* = 0, \quad (2.6)$$

$$x_3 \rightarrow \pm\infty \text{ で } v_0^* \rightarrow 0 \quad (2.7)$$

を得る。また  $O(Re)$  の項は

$$\Delta v_1^* - \nabla p_1^* = -g, \quad g = -(\mathcal{U}_0 \cdot \nabla v_0^* + v_0^* \cdot \nabla \mathcal{U}_0), \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot v_1^* = 0, \quad (2.9)$$

$$\text{球の上で } v_1^* = 0, \quad (2.10)$$

$$\text{壁の上で } v_1^* = 0, \quad (2.11)$$

$$x_3 \rightarrow \pm\infty \text{ で } v_1^* \rightarrow 0 \quad (2.12)$$

である。 $(v_0^*, p_0^*)$ ,  $(v_1^*, p_1^*)$  によって生ずる球に働く力を各々  $F_0^*$ ,  $F_1^*$  とすると, 球に働く力  $F$  は

$$F = F_0^* + Re F_1^* + o(Re) \quad (2.13)$$

で与えられる。Stokes 方程式に基づく力  $F_0^*$  は, 管軸に平行な運動に対しては抵抗だけを与え, 半径方向の力は  $Re F_1^*$  で始めて現われる。壁による補正の支配的な項を議論するときには, 抵抗に関しては,  $F_0^*$  を  $k$  で展開したときの  $O(k)$  の項, 半径方向の力に関しては,  $Re(F_1^*)$  を  $k$  で展開したときの初項を考えれば十分である。なお,  $O(Re^0)$  に関しては任意の方向に運動

している場合についても論ずる。

ここで、次のような速度テンソル  $(\bar{u}_{ij}, \bar{p}_i)$  を導入する。

$$\bar{u}_{j\ell, k\ell} - \bar{p}_{\ell, j} = 0, \quad (2.14)$$

$$\bar{u}_{j\ell, j} = 0, \quad (2.15)$$

$$\text{球の上で } \bar{u}_{j\ell} = \delta_{j\ell}, \quad (2.16)$$

$$\text{壁の上で } \bar{u}_{j\ell} = 0, \quad (2.17)$$

$$\lambda_3 \rightarrow \infty \text{ で } \bar{u}_{j\ell} \rightarrow 0. \quad (2.18)$$

但し、下つき記号  $\ell$  は微分を意味し、1つの項の中に2度くり返して現われる添字についてはすべて和をとるものと約束する。これを用いると、半径方向の力は全流体の体積分

$$\text{Re}(F_1^*) = \text{Re} \int_{\Gamma} \bar{u}_{i\ell} g_{i\ell} dV, \quad \Gamma; \text{全流体の体積} \quad (2.19)$$

に帰着することが示される。次節では  $h$  展開におけるきりつなぎ法を用いて Stokes 方程式を解く。

### 3.3 $h$ による展開

まず領域を球の近傍、すなわち  $\|r-r_0\| \sim O(h)$  の内部領域と、壁の付近、すなわち  $\|r-r_0\| \sim O(1/h)$  の外部領域に分ける。従って内部変数としては  $r$  を使い、外部変数としては  $\bar{r} = hr (= r/r_0)$  を導入する。3.1, 3.2 とは別に、球は任意の方向に速度  $\Omega$ 、角速度  $\omega$  で運動しているとし、そのときの Stokes 方程式に従う

速度を  $u_i$  とする。(2.3)~(2.7)より,  $v_i^*$  は  $\Omega = v_i \mathbf{e}_3$  とすれば得られ, (2.14)~(2.18)より,  $\bar{u}_{ij}$  は  $\Omega = \mathbf{e}_j$ ,  $\Omega = 0$  としたときの速度の  $i$  成分である。内部展開と外部展開を次の形で導入する。

$$u_i = u_{i0} + k u_{i1} + o(k), \quad (\text{内部展開}) \quad (3.1)$$

$$u_i = k \hat{u}_i + o(k). \quad (\text{外部展開}) \quad (3.2)$$

条件

$$a/(r_1' - r_1) \ll 1, \quad a/(r_2 - r_0) \ll 1 \quad (3.3)$$

を仮定すると, 壁は外部領域にあるとして展開できる。matching により, 足りない境界条件を補いながら解を決定すると次のように求まる。

$$u_{i0} = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{b_j}{R} + \frac{(b_j \cdot \mathbf{R}) \mathbf{R}}{R^3} \right) + \frac{\Omega \times \mathbf{R}}{R^3} - \frac{1}{8\pi} \left( \frac{(b_j \cdot \mathbf{R}) \mathbf{R}}{R^5} - \frac{b_j}{3R^3} \right), \quad (3.4)$$

$$(\hat{u}_i)_j = 6\pi V_{ij} U_j \quad (3.5)$$

但し,  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ ,  $R = |\mathbf{R}|$ ,  $b_j = 6\pi \Omega$  である。また  $(V_{ij}, P_j)$  は Stokes 方程式の Green 関数でその定義は

$$V_{ij, \alpha\alpha} - P_{j, i} + \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \quad (3.6)$$

$$V_{ij, i} = 0, \quad (3.7)$$

$$\text{壁の上で } V_{ij} = 0, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{r}_j \rightarrow \pm\infty \text{ で } V_{ij} \rightarrow 0, \quad (3.9)$$

である。 $\hat{u}_i$  の正則部の球の中心での値を  $(\hat{u}_i^R)_p$  とおくと, 1 次の内部解を求めることは, 一様流  $(\hat{u}_i^R)_p$  をもつ無限流体中に球

が置かれた問題と同等で、球に働く力は次元のある量で

$$f_i' = -6\pi\eta a U_j' \{ \delta_{ij} - 6\pi\eta (V_{ij}^R)_p \} + o(\eta) \quad (3.10)$$

と定まる。

さて、今度は沈降の問題にもどって(2.19)の表式を $\eta$ で展開してみよう。全流体の体積積分を内部領域 $\Gamma_{inner}$ と外部領域 $\Gamma_{outer}$ に分けて評価する。 $v_i^*$ ,  $u_{ij}$ の内部解及び外部解を(2.19)に代入すると、内部領域からの寄与は高次である。また $\Gamma_{outer}$ を全流体の体積 $V$ で置き換えても、新たに加わった部分からの寄与は高次である。結局、軸方向に落下する球には速度

$$v_e = 6\pi(\eta v_0^2/\nu)h(\hat{r}_0), \quad h(r_0) = \int_{\hat{r}} V_{2,3} V_{2,1} dV \quad (3.11)$$

が半径方向に生じる。

#### §4 Green関数

座標系としては、次のように定義される円筒座標を用いるのが便利である。

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad x_3 = z \quad (4.1)$$

変数は後の節では外部変数しか用いないので、以下 $\hat{r}$ を $r$ と書く。よって、 $r$ と書けば $r/2$ のことであり、 $1/2$ は1である。解くべき方程式と境界条件は(3.6)~(3.9)で与えられている。 $V_{ij}$ は力の方向 $\hat{e}_j$ に依存するが、今は $\hat{e}_j$ は固定してしだいに着

目してこれをベクトルとみなし,  $V=(V_{rj}, V_{\theta j}, V_{zj})$ と表わそう。Stokes 方程式に対する Imai の一般解<sup>9)</sup>を用いると,  $(V, P)$  は 4 つの調和関数を用いて

$$V = 2\Phi - \text{grad}(\mathbf{r} \cdot \Phi - \Phi_0), \quad (4.2)$$

$$P = -2\nabla \cdot \Phi, \quad (4.3)$$

$$\Delta \Phi_j = 0, \quad (j=0, 1, 2, 3) \quad (4.4)$$

と表わすことができる。Hasimoto<sup>3)</sup> は円筒の場合を解いたときに断面の形状が任意のときの解法も示している。この方法によると, まず

$$\text{壁の上で } \Phi_3 = 0, \quad \mathbf{r} \cdot \Phi = \Phi_0, \quad \mathbf{e}_\theta \cdot \Phi = 0, \quad (4.5)$$

を要請して, 壁の上で,  $V_{rj} = V_{\theta j} = 0$  になるようにする。次に

$$\text{壁の上で } V_{zj} = 0 \quad (4.6)$$

としてやる。(4.5), (4.6) をあからさまに書くと

$$r=r_1 \text{ で } \Phi_1 = \Phi_0 \cos \theta / r_1, \quad \Phi_2 = \Phi_0 \sin \theta / r_1, \quad \Phi_3 = 0, \quad (4.7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) \Phi_0 = \frac{\partial}{\partial r} (r_1 \Phi_1 \cos \theta + r_1 \Phi_2 \sin \theta + z \Phi_3), \quad (4.8)$$

$$r=r_2 \text{ で } \Phi_1 = \Phi_0 \cos \theta / r_2, \quad \Phi_2 = \Phi_0 \sin \theta / r_2, \quad \Phi_3 = 0, \quad (4.9)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) \Phi_0 = \frac{\partial}{\partial r} (r_2 \Phi_1 \cos \theta + r_2 \Phi_2 \sin \theta + z \Phi_3), \quad (4.10)$$

となる。1点  $r_0$  に集中力  $\mathbf{e}_j$  が働くときの解は次の形に整理できる。

$$\Phi = \frac{1}{8\pi} \mathbf{e}_j (\Phi_G + \Phi_G) + \hat{\Phi} \quad (4.11)$$

$$\Phi_0 = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{r}) (\Phi_G + \Phi_G) + \hat{\Phi}_0, \quad (4.12)$$

ここで

$$\phi_G = 1 / 4\pi |r - r_0| \quad (4.13)$$

$$r = r_1, r_2 \text{ で } \phi_G + \hat{\phi}_G = 0 \quad (4.14)$$

である。\$\phi\_G\$ によって構成される部分は Stokeslet である。\$\hat{\phi}\_G\$ と \$\tilde{\phi}\_G\$ は正則な調和関数で境界条件から決定される。特に (4.14) から、\$\phi\_G + \hat{\phi}\_G\$ は境界が同心円筒であるときの Laplace 方程式の Green 関数であることがわかる。円筒座標では (4.13) は

$$\phi_G = \frac{1}{2\pi^2} \sum \begin{cases} k_n(\omega r_0) I_n(\omega r) \cos n\theta \cos \lambda z, & r < r_0, \\ I_n(\omega r_0) k_n(\omega r) \cos n\theta \cos \lambda z, & r > r_0, \end{cases} \quad (4.15)$$

と表わされる。但し、\$\Sigma\$ は \$\sum\_{n=0}^{\infty} \int\_0^{\infty} d\lambda\$ の省略記号を意味し、\$I\_n, k\_n\$ は各 \$n\$ 次の変形された第 1 種、第 2 種の Bessel 関数である。再び \$\phi\_i, \hat{\phi}\_i\$ が \$\phi\_j\$ に依存していることを明示して、これを \$\phi\_{ij}, \hat{\phi}\_{ij}\$ と書こう。Fourier-Bessel 変換を用いると \$\hat{\phi}\_G, \hat{\phi}\_{ij}\$ に対する境界条件を満足させることができる。\$\hat{\phi}\_G\$ は (4.14), (4.15) から直ちに求まり、その後 (4.7)~(4.10) から \$\hat{\phi}\_{ij}\$ が決定できる。結果は次の形に表わすことができる。

$$\hat{\phi}_G = \frac{1}{2\pi^2} \Sigma \{ r_2 Q_n(r_0) k_n(\omega r_2) I_n(\omega r) - r_1 P_n(r_0) I_n(\omega r_1) k_n(\omega r) \} \times \cos n\theta \cos \lambda z, \quad (4.16)$$

$$\hat{\phi}_{ij} = \frac{1}{2\pi^2} \Sigma \{ A_n^{ij}(\omega, r_0) I_n(\omega r) + D_n^{ij} k_n(\omega r) \} \Theta^{ij}(n, \theta) Z^{ij}(\lambda z), \quad (i \neq j), \quad (4.17)$$

$$\tilde{\phi}_{3j} = 0, \quad (4.18)$$

ここで

$$\textcircled{4} \quad \begin{cases} \cos n\theta & , (i, j) = (0, 1), (0, 3), (1, 1), (1, 3), (2, 2), \\ \sin n\theta & , \text{その他}, \end{cases} \quad (4.19)$$

$$Z^{ij}(\lambda z) = \begin{cases} \cos \lambda z & , j=1, 2, \\ \sin \lambda z & , j=3, \end{cases} \quad (4.20)$$

$$A_n^{0j} = (W_n^1 H_n^j - W_n^2 O_n^j) / V_n, \quad (4.21)$$

$$D_n^{0j} = (X_n^1 H_n^j - X_n^2 O_n^j) / V_n, \quad (4.22)$$

$$A_n^{1j} = \frac{1}{2R_n} \left\{ \frac{K_n(\omega_2)}{r_1} B_n^j - \frac{K_n(\omega_1)}{r_2} C_n^j \right\}, \quad (4.23)$$

$$D_n^{1j} = -\frac{1}{2R_n} \left\{ \frac{I_n(\omega_2)}{r_1} B_n^j - \frac{I_n(\omega_1)}{r_2} C_n^j \right\}, \quad (4.24)$$

$$A_n^{2j} = \frac{(-1)^{j+1}}{2R_n} \left\{ \frac{K_n(\omega_2)}{r_1} E_n^j - \frac{K_n(\omega_1)}{r_2} F_n^j \right\}, \quad (4.25)$$

$$D_n^{2j} = -\frac{(-1)^{j+1}}{2R_n} \left\{ \frac{I_n(\omega_2)}{r_1} E_n^j - \frac{I_n(\omega_1)}{r_2} F_n^j \right\}, \quad (4.26)$$

である。但し

$$B_n^j = A_{n-1}^{0j} I_{n-1}(\omega_1) + A_{n+1}^{0j} I_{n+1}(\omega_1) + D_{n-1}^{0j} K_{n-1}(\omega_1) + D_{n+1}^{0j} K_{n+1}(\omega_1), \quad (4.27)$$

$$C_n^j = A_{n-1}^{0j} I_{n-1}(\omega_2) + A_{n+1}^{0j} I_{n+1}(\omega_2) + D_{n-1}^{0j} K_{n-1}(\omega_2) + D_{n+1}^{0j} K_{n+1}(\omega_2), \quad (4.28)$$

$$E_n^j = A_{n-1}^{0j} I_{n-1}(\omega_1) - A_{n+1}^{0j} I_{n+1}(\omega_1) + D_{n-1}^{0j} K_{n-1}(\omega_1) - D_{n+1}^{0j} K_{n+1}(\omega_1), \quad (4.29)$$

$$F_n^j = A_{n-1}^{0j} I_{n-1}(\omega_2) - A_{n+1}^{0j} I_{n+1}(\omega_2) + D_{n-1}^{0j} K_{n-1}(\omega_2) - D_{n+1}^{0j} K_{n+1}(\omega_2), \quad (4.30)$$

であり、他の量は以下のように定義した。まず

$$R_n = I_n(\omega r_1) K_n(\omega r_2) - I_n(\omega r_2) K_n(\omega r_1), \quad (4.31)$$

$$P_n(r) = \{K_n(\omega r_2) I_n(\omega r) - I_n(\omega r_2) K_n(\omega r)\} / r_1 R_n, \quad (4.32)$$

$$Q_n(r) = \{K_n(\omega r_1) I_n(\omega r) - I_n(\omega r_1) K_n(\omega r)\} / r_2 R_n, \quad (4.33)$$

$$S_n = \lambda \{I_n'(\omega r_1) K_n(\omega r_2) - I_n(\omega r_2) K_n'(\omega r_1)\}, \quad (4.34)$$

$$T_n = \lambda \{I_n(\omega r_1) K_n'(\omega r_2) - I_n'(\omega r_2) K_n(\omega r_1)\}, \quad (4.35)$$

$$U_n = \lambda^2 \{I_n'(\omega r_1) K_n'(\omega r_2) - I_n'(\omega r_2) K_n'(\omega r_1)\}, \quad (4.36)$$

とおく。' は  $I_n'(\omega r) = \frac{dI_n(\omega r)}{d(\omega r)}$  を示す。これらを組み合わせると、

$$\begin{aligned} V_n = & U_n - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right) \left( \frac{1}{R_{n-1}} + \frac{1}{R_{n+1}} \right) + \frac{1}{4r_1 r_2} \left( \frac{1}{R_{n-1}} + \frac{1}{R_{n+1}} \right)^2 R_n + \frac{S_n}{r_2} + \frac{T_n}{r_1} \\ & - \frac{1}{2} \left\{ T_n \left( \frac{S_{n-1}}{R_{n-1}} + \frac{S_{n+1}}{R_{n+1}} \right) + S_n \left( \frac{T_{n-1}}{R_{n-1}} + \frac{T_{n+1}}{R_{n+1}} \right) \right\} + \left\{ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{2} \left( \frac{S_{n-1}}{R_{n-1}} + \frac{S_{n+1}}{R_{n+1}} \right) \right\} \\ & \times \left\{ \frac{1}{r_2} - \frac{1}{2} \left( \frac{T_{n-1}}{R_{n-1}} + \frac{T_{n+1}}{R_{n+1}} \right) \right\} R_n, \quad (4.37) \end{aligned}$$

$$W_n^1 = \lambda K_n'(\omega r_2) + \left\{ \frac{1}{r_2} - \frac{1}{2} \left( \frac{T_{n-1}}{R_{n-1}} + \frac{T_{n+1}}{R_{n+1}} \right) \right\} K_n(\omega r_2) - \frac{1}{2r_1} \left( \frac{1}{R_{n-1}} + \frac{1}{R_{n+1}} \right) K_n(\omega r_1), \quad (4.38)$$

$$W_n^2 = \lambda K_n'(\omega r_1) + \left\{ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{2} \left( \frac{S_{n-1}}{R_{n-1}} + \frac{S_{n+1}}{R_{n+1}} \right) \right\} K_n(\omega r_1) + \frac{1}{2r_2} \left( \frac{1}{R_{n-1}} + \frac{1}{R_{n+1}} \right) K_n(\omega r_2), \quad (4.39)$$

$$X_n^1 = \lambda I_n'(\omega r_2) + \left\{ \frac{1}{r_2} - \frac{1}{2} \left( \frac{T_{n-1}}{R_{n-1}} + \frac{T_{n+1}}{R_{n+1}} \right) \right\} I_n(\omega r_2) - \frac{1}{2r_1} \left( \frac{1}{R_{n-1}} + \frac{1}{R_{n+1}} \right) I_n(\omega r_1), \quad (4.40)$$

$$X_n^2 = \lambda I_n'(\omega r_1) + \left\{ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{2} \left( \frac{S_{n-1}}{R_{n-1}} + \frac{S_{n+1}}{R_{n+1}} \right) \right\} I_n(\omega r_1) + \frac{1}{2r_2} \left( \frac{1}{R_{n-1}} + \frac{1}{R_{n+1}} \right) I_n(\omega r_2), \quad (4.41)$$

$$H_n^1 = [-2r_0 P_n(r_0) + r_1 \{P_{n-1}(r_0) + P_{n+1}(r_0)\}] / 4, \quad (4.42)$$

$$Q_n^1 = [-2r_0 Q_n(r_0) + r_2 \{Q_{n-1}(r_0) + Q_{n+1}(r_0)\}] / 4, \quad (4.43)$$

$$H_n^2 = r_1 \{P_{n-1}(r_0) - P_{n+1}(r_0)\} / 4, \quad (4.44)$$

$$Q_n^2 = r_2 \{Q_{n-1}(r_0) - Q_{n+1}(r_0)\} / 4, \quad (4.45)$$

$$H_n^3 = -\frac{1}{2} \frac{\partial P_n}{\partial \lambda}, \quad (4.46)$$

$$Q_n^3 = \frac{1}{2} \frac{\partial Q_n}{\partial \lambda} \quad (4.47)$$

と定める。(4.15)~(4.18) を (4.11), (4.12) に代入し、±5 の

それらを(4.2)に代入すると,  $V_{ij}$ は

$$V_{r1} = \frac{1}{2\pi^2} \sum U_{r1}^{(n,\lambda)}(r) \cos n\theta \cos \lambda z, \quad (4.48)$$

$$V_{\theta 1} = \frac{1}{2\pi^2} \sum U_{\theta 1}^{(n,\lambda)}(r) \sin n\theta \cos \lambda z, \quad (4.49)$$

$$V_{z1} = \frac{1}{2\pi^2} \sum U_{z1}^{(n,\lambda)}(r) \cos n\theta \sin \lambda z, \quad (4.50)$$

$$V_{r2} = \frac{1}{2\pi^2} \sum U_{r2}^{(n,\lambda)}(r) \sin n\theta \cos \lambda z, \quad (4.51)$$

$$V_{\theta 2} = \frac{1}{2\pi^2} \sum U_{\theta 2}^{(n,\lambda)}(r) \cos n\theta \cos \lambda z, \quad (4.52)$$

$$V_{z2} = \frac{1}{2\pi^2} \sum U_{z2}^{(n,\lambda)}(r) \sin n\theta \sin \lambda z, \quad (4.53)$$

$$V_{r3} = \frac{1}{2\pi^2} \sum U_{r3}^{(n,\lambda)}(r) \cos n\theta \sin \lambda z, \quad (4.54)$$

$$V_{\theta 3} = \frac{1}{2\pi^2} \sum U_{\theta 3}^{(n,\lambda)}(r) \sin n\theta \sin \lambda z, \quad (4.55)$$

$$V_{z3} = \frac{1}{2\pi^2} \sum U_{z3}^{(n,\lambda)}(r) \cos n\theta \cos \lambda z \quad (4.56)$$

のように表示できる。以下  $U_{ij}^{(n,\lambda)}$  のうち必要なものだけ書き下す。 $U_{r2}^{(n,\lambda)}$ ,  $U_{z2}^{(n,\lambda)}$  は後の計算には必要ない。

$$U_{r1}^{(n,\lambda)} = \frac{1}{4}(1-r\frac{\partial}{\partial r})(g_{n-1}+g_{n+1}) + \frac{r}{2}\frac{\partial g_n}{\partial r} + Y_{r1}^{(n,\lambda)}, \quad (4.57)$$

$$U_{\theta 1}^{(n,\lambda)} = \frac{1}{4}\{(n-2)g_{n-1} + (n+2)g_{n+1}\} - \frac{nr}{2r} + Y_{\theta 1}^{(n,\lambda)}, \quad (4.58)$$

$$U_{z1}^{(n,\lambda)} = \frac{r\lambda}{4}(g_{n-1}+g_{n+1}) - \frac{\lambda r}{2}g_n + Y_{z1}^{(n,\lambda)}, \quad (4.59)$$

$$U_{\theta 2}^{(n,\lambda)} = \frac{1}{4}\{- (n-2)g_{n-1} + (n+2)g_{n+1}\} - Y_{\theta 2}^{(n,\lambda)}, \quad (4.60)$$

$$U_{r3}^{(n,\lambda)} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_n}{\partial r\partial \lambda} + Y_{r3}^{(n,\lambda)}, \quad (4.61)$$

$$U_{\theta 3}^{(n,\lambda)} = -\frac{n}{2r}\frac{\partial g_n}{\partial \lambda} + Y_{\theta 3}^{(n,\lambda)}, \quad (4.62)$$

$$U_{z3}^{(n,\lambda)} = g_n + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial g_n}{\partial \lambda} - Y_{z3}^{(n,\lambda)}, \quad (4.63)$$

そこで

$$g_n(r) = \begin{cases} I_n(\omega r)K_n(\omega r_0), & (r < r_0) \\ K_n(\omega r)L_n(\omega r_0), & (r > r_0) \end{cases} + r_2 Q_n(r_0)K_n(\omega r_2)L_n(\omega r) - r_1 P_n(r_0)L_n(\omega r)K_n(\omega r), \quad (4.64)$$

$$Y_{rj}^{(n,\lambda)}(r) = \frac{1}{2}(1 - \frac{2}{r}) [ \{ P_{n-1}(r) + P_{n+1}(r) \} \{ A_n^{0j} I_n(\omega r) + D_n^{0j} K_n(\omega r) \} - \{ Q_{n-1}(r) + Q_{n+1}(r) \} \{ A_n^{0j} I_n(\omega r_2) + D_n^{0j} K_n(\omega r_2) \} + \lambda \{ A_n^{0j} I_n'(\omega r) + D_n^{0j} K_n'(\omega r) \} ], \quad (4.65)$$

$$Y_{\theta j}^{(n,\lambda)}(r) = \frac{1}{2} [ \{ (n-2)P_{n-1}(r) + (n+2)P_{n+1}(r) \} \{ A_n^{0j} I_n(\omega r) + D_n^{0j} K_n(\omega r) \} - (n-2)Q_{n-1}(r) + (n+2)Q_{n+1}(r) \} \{ A_n^{0j} I_n(\omega r_2) + D_n^{0j} K_n(\omega r_2) \} ] - \frac{\lambda}{r} \{ A_n^{0j} I_n(\omega r) + D_n^{0j} K_n(\omega r) \}, \quad (4.66)$$

$$Y_{zj}^{(n,\lambda)}(r) = \frac{r_2}{2} [ \{ P_{n-1}(r) + P_{n+1}(r) \} \{ A_n^{0j} I_n(\omega r) + D_n^{0j} K_n(\omega r) \} - \{ Q_{n-1}(r) + Q_{n+1}(r) \} \times \{ A_n^{0j} I_n(\omega r_2) + D_n^{0j} K_n(\omega r_2) \} ] - \lambda \{ A_n^{0j} I_n(\omega r) + D_n^{0j} K_n(\omega r) \}, \quad (4.67)$$

である。もちろん上の表式は、 $r_1 \rightarrow 0$  で円筒内部の場合の表式<sup>3)</sup>と、 $r_1 \rightarrow 1$ ,  $r_2 \rightarrow \infty$  では円筒外部の場合の表式<sup>4)</sup>と一致する。

## §5 $O(R_0^0)$ の球に働く力

任意の速度 $U$ と角速度 $\Omega$ で運動している球に働く $O(R_0^0)$ の力に対する壁の補正を、(3.10)に基づいて計算する。(4.48)~(4.56)に $r=r_0$ ,  $\theta=z=0$ を代入して残るのは、対角の3成分 $(V_r^R)_p, (V_\theta^R)_p, (V_z^R)_p$ だけである。すなわち $(r, \theta, z)$ が並進の主軸である。従って(3.10)は次のようにまとめることができる。

$$f_i' = -6\pi\mu a U_i' (1 + k k_i) + o(k), \quad (i=r, \theta, z, \text{ についての和はとらない。}), \quad (5.1)$$

$$k_r = -\frac{3}{\pi} \sum \left\{ \frac{1}{2} g_n^R(r_0) + Y_{r1}^{(n,\lambda)}(r_0) \right\}, \quad (5.2)$$

$$k_\theta = -\frac{3}{\pi} \sum \left\{ \frac{1}{2} g_n^R(r_0) - Y_{\theta 2}^{(n,\lambda)}(r_0) \right\}, \quad (5.3)$$

$$k_z = -\frac{3}{\pi} \sum \left\{ \frac{1}{2} g_n^R(r_0) - Y_{z 3}^{(n,\lambda)}(r_0) \right\}, \quad (5.4)$$

ここで

$$g_n^R(r) = r_2 Q_n(r_0) K_n(kr_2) I_n(kr) - r_1 P_n(kr_0) I_n(kr_1) K_n(kr), \quad (5.5)$$

である。

$r_1 = 0.01, 0.1, 0.5$  の典型的な3つの場合について各々図5-1 ~ 図5-3 に実線で図示する。その極限の場合として、図5-1 には円筒内部の場合<sup>3)</sup>、図5-2 には円筒外部の場合<sup>4)</sup>、図5-3 には平行2平板間の場合<sup>2)</sup> を破線で図示した。各  $k_i$  は壁の上で発散し、壁から離れるにつれて減少して、2円筒間の中央より内側の位置で最小値をとる。 $k_r$  は  $k_0$ ,  $k_e$  より常に大きく、壁の曲率の効果で、内側では  $k_e$  の方が  $k_0$  より、外側では  $k_0$  の方が  $k_e$  より大きい。  $r_1$  を十分小さくとると、  $k_i$  は内円筒の近傍では円筒外部を運動するときの値に、外円筒の近傍では円筒内部を運動するときの値に漸近する。また、  $r_1 \rightarrow 1$  の極限では、平行2平板間を運動するときの値に漸近する。

### 3.6 球の半径方向の速度

軸方向に  $V_0$  で落下する球に生ずる半径方向の速度を(3.11) に基づいて計算する。  $V_{ij}$  のうち特異性をもつ部分を  $V_{ij}^S$  とすると、これは Stokeslet の流れ場で  $V_{ij}^S = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{J_{ij}}{R} + \frac{R_i R_j}{R^3} \right)$  であるが、  $V_{ij}^S$  だけを含む積分は解析的に行なうことができて、

$$h^S(r_0) = \frac{r_2}{64\pi r_0} \left\{ E\left(\frac{r_0}{r_2}\right) - k\left(\frac{r_0}{r_2}\right) \right\} - \frac{1}{64} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(n-1)! 2^n} \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{2n}, \quad (6.1)$$

の形に書ける。ここで

$$K(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \phi}}, \quad E(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-x^2 \sin^2 \phi} d\phi,$$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad (2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1, \quad (6.2)$$

の定義を使った。残りの積分は数値的に行なった。

$r_1 = 0.01, 0.1, 0.5$  の典型的なる3つの場合について、その結果を各々図6-1～図6-3に実線で示す。破線は、図6-1は円筒内を落下するとき<sup>6)</sup>、図6-2は上が円筒外部の場合<sup>7)</sup>、下が円筒内部の場合、図6-3は平行2平板間の場合<sup>1)</sup>である。任意の位置で球を落下させると、球は半径方向に移動して安定な平衡の位置に落ち着くことがわかる。曲率の影響を受けて平衡の位置は2円筒間の中央より内側にある。その移動速度の大きさは、壁の近傍を除けば平衡の位置に近づくにつれて単調に減少するが、外円筒の近傍に極大を持つ可能性がある。

今度は、曲率の効果を比較するために、各  $k_i$  が最小値をとる位置  $r_{\min}^i$  と、半径方向の平衡位置  $r_{eq}$  の  $r$  に対する依存性を調べた。結果を図6-4に示す。実線が  $r_{eq}$ 、破線が  $r_{\min}^i$  で、2円筒間の中で規格化し直してある。 $r=0$  のときは  $r_{eq} = r_{\min}^r = r_{\min}^0 = 0$  であるから、内円筒が現われると急に立ち上がり、 $r \rightarrow 1$  で0.5をとる。曲率の効果は  $k_0$  と  $v_0$  に対して著しく、それらは同じ程度である

(参考文献)

D.H.A. Lorentz: Zittingsverl. Akad. van Wet. 5 (1896) 168.

- 2) B. P. Ho & L. G. Leal : J. Fluid Mech. 65 (1974) 365.
- 3) H. Hasimoto : J. Phys. Soc. Jpn. 41 (1976) 2143 : 42 (1977) 1047
- 4) M. S. Alam, K. Ishii & H. Hasimoto : J. Phys. Soc. Jpn. 49 (1980) 405 : 52 (1983) 3691.
- 5) R. G. Cox & S. K. Hsu : Int. J. Multiphase Flow 3 (1977) 201.
- 6) M. Shinohara & H. Hasimoto : J. Phys. Soc. Jpn. 46 (1979) 320.
- 7) K. Ishii & H. Hasimoto : J. Phys. Soc. Jpn. 48 (1980) 2144.
- 8) R. G. Cox & H. Brenner : Chem. Eng. Sci. 23 (1968) 147.
- 9) I. Imai : "流体力学(前編)" (裳華房, 1973) P. 313
- 10) M. Shinohara & H. Hasimoto : J. Phys. Soc. Jpn. 49 (1980) 1162.
- 11) P. Vasseur & R. G. Cox : J. Fluid Mech. 78 (1976) 385.

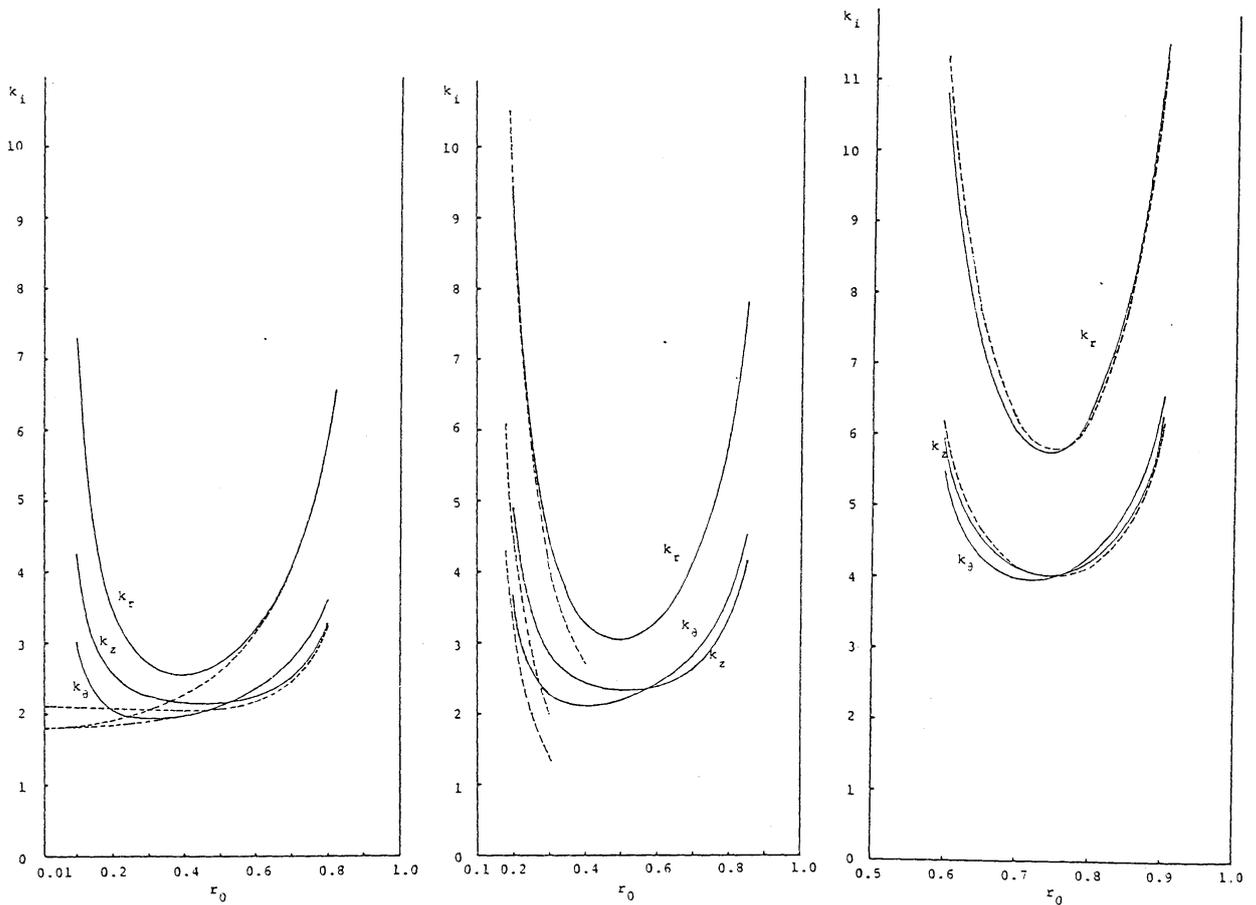


図 5-1

$r_1 = 0.01$  のとき

図 5-2

$r_1 = 0.1$  のとき

図 5-3

$r_1 = 0.5$  のとき

球に僅か  $O(R_0)$  の  $r_1$  に対する壁の第 1 次補正

静止流体中を落下する球の半径方向の移動速度

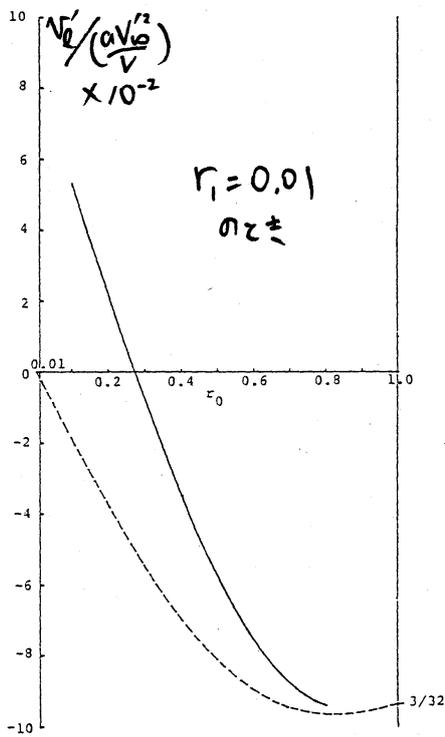


図 6-1

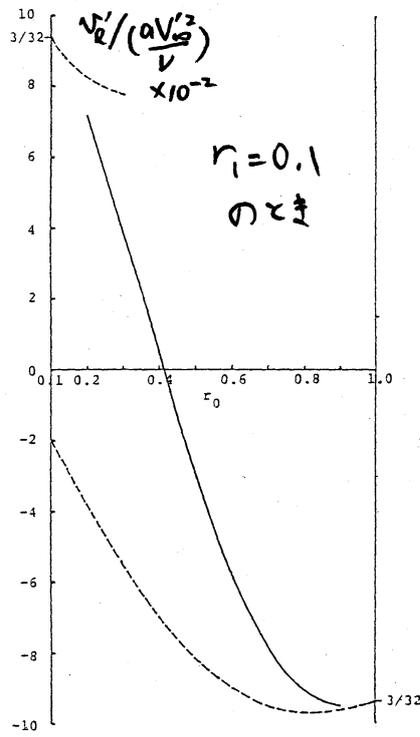


図 6-2

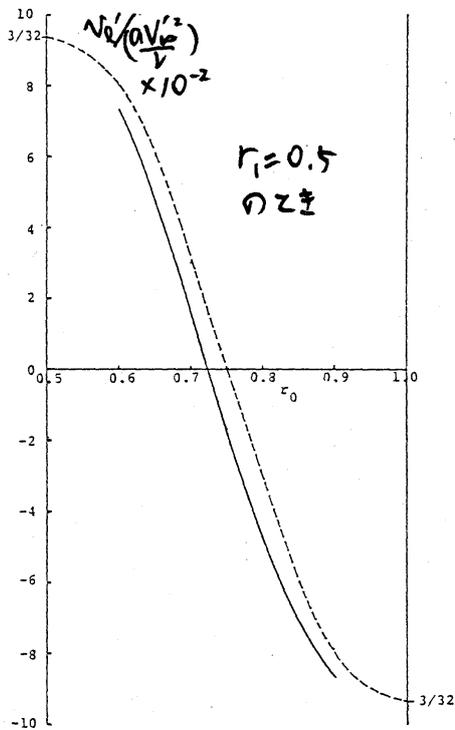


図 6-3

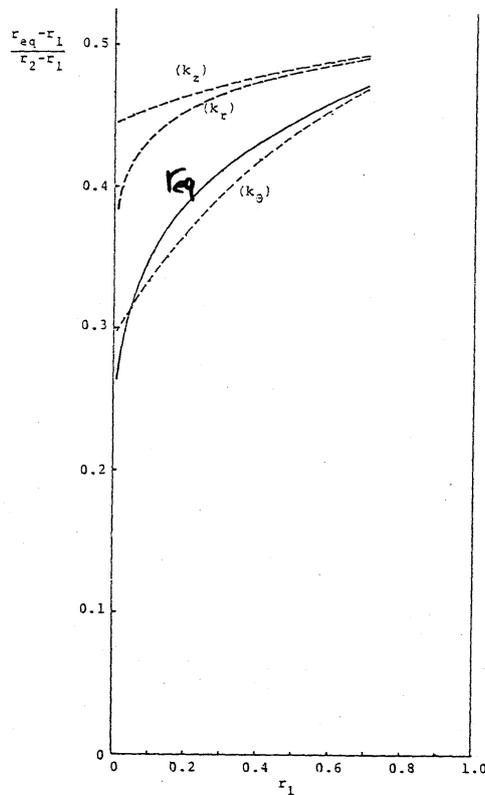


図 6-4 曲率の効果