

平面 Poiseuille 流における攪乱の増幅・減衰過程
の数値計算

京都工繊大・機械

徳 永 宏

(Hiroshi TOKUNAGA)

宮 川 浩

(Hiroshi MIYAGAWA)

§ 1. 緒言

平行二平板間の乱流の Large Eddy Simulation は, Deardorff¹⁾ の先駆的研究を受けついで, Moim & Kim²⁾ により大規模な数値計算が遂行され, 大きな成果を挙げている。日本においても Horiuti & Kuwahara³⁾ 及び Kawamura et al.⁴⁾ により, 乱流の Large Eddy Simulation が実行されている。しかし, 精度の高い数値計算は, 未だ報告されていない。本研究は, 正確な乱流の数値計算の前段階として, 平行二平板間の Poiseuille 流に加えられた, 攪乱の増幅・減衰過程を直接数値計算で研究し, 数値計算手法の有効性を検討する目的でなされた。

平行二平板間の Poiseuille 流の攪乱に対する安定性の研究

は、対象を固有値問題に帰着して解く方法が Shen⁵⁾ 及び Thomas⁶⁾ により実行され、直接数値計算により研究する方法が George & Hellmus⁷⁾、Orszag & Kells⁸⁾ により行なわれている。また、Nishioka et al⁹⁾ の実験、Itoh¹⁰⁾ による理論研究もある。

本研究では、流れ方向にはスペクトル法、スパン方向には修正微分求積法 (MDQ 法) を用い、時間積分には四次精度の Runge-Kutta-Gill 法を採用し¹¹⁾、Poisson 方程式は、直接解法で解き、高精度の平面 Poiseuille 流の線型及び非線型安定性の直接数値計算を行った。

§2. 数値計算方法

2D の無次元化した Navier-Stokes 方程式において、流速及び圧力分布を

$$\left. \begin{aligned} \underline{v}(x, y, t) &= U(y) \underline{i} + \sum_{n=-N}^N \hat{v}_n(y, t) \exp[in\alpha x], \\ p(x, y, t) &= P(x) + \sum_{n=-N}^N \hat{p}_n(y, t) \exp[in\alpha x], \\ U(y) &= 1 - y^2, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

とし、線型安定性の計算には、第1及び第2式の第2項で、

$N = \pm 1$ のみをとる。非線型の安定性の場合には、(2.1) をそのまま用いる。境界条件は

$$\hat{v}_n^{(\pm 1)} = 0, \quad (2.2)$$

であり、圧力に対する Poisson 方程式の境界条件は、Navier-Stokes 方程式から決定される。なお、壁付近 ($y = \pm 1$) に格子を集中させるために、座標変換

$$y = \tanh[n \tanh^{-1} a], \quad (2.3)$$

を行なった。格子の分布は、格子数 32 の場合が図 1 に示されている。

y 方向の離散化には、MDQ 法を採用した。ただし、MDQ 法の次数は 5 であり、精度は 4 次である。また、時間積分には、RK4 法を用いた¹¹⁾。圧力に対する Poisson 方程式の解法は、2 次精度で行なったが、現在は 4 次精度のものを使っている。

§3. 線型安定性の直接計算

数値計算手法の有効性を検討するために、先ず線型安定性の直接数値計算を行なった。攪乱が減衰する場合の例として、Reynolds 数 Re が 2,000 で攪乱の波数 α が 0.84 の場

合を選んだ。なお、座標変換(2.3)のため、計算パラメータ Re 及び α は、実際の値より大きく取られている。

図2は、横軸に x 、縦軸に y をとり、加えられた攪乱の x 軸方向の流速分布を、時刻 $t=0$ 、10 及び 30 で示している。初期に与えられた攪乱が、遷移状態を経て、減衰振動の分布に発達する様子が良く示されている。

図3は、 $t=0$ で攪乱の x 軸方向の速度が最大の値となる y の位置での、 $x=0$ における流速の値を時間的に追跡した結果を示す。遷移状態を通過して、完全な減衰振動に発達する様子が正確に示されている。

次に、攪乱が増幅する場合の例として、*Reynolds* 数が 10,000 で、攪乱の波数が 1 の場合の計算を行った。図4及び図5は、その結果を示す。図2及び図3の時と同様に座標変換(2.3)を考慮して、 Re 及び α の値が決められている。

図4は、時刻 $t=10$ 及び 80 での、 x 軸方向の攪乱の流速分布を示しているが、 $t=10$ に示される遷移状態を通過して、 $t=80$ に見られる、完全な増幅振動の速度分布が実現される。

図5は、図3と同じく、攪乱の $x=0$ での振幅を横軸に時間をとって、その変化を描いている。攪乱が、増幅振動

の形に発達する様子が正確に示されている。

図6は、Thomas⁶⁾の数值計算の結果を、著者が独自に図に示したものであるが、図4の $t=80$ での分布と、位相差を除いて、正確な一致を示す。

表1は、本研究と他の研究を比較したものである。振動数は、非常に精度よく一致するが、増幅率及び減衰率については、未だ誤差が見られるようである。

§4. 非線型安定性の直接数值計算

非線型安定性の数值計算は、現在迄の所、 $N=2$ のときの計算が遂行された。攪乱が減衰する場合の例として、Reynolds 数が2,000で攪乱の波数が1、振幅が0.1の場合の計算を行った。結果が、図7及び図8に示されている。図7は、攪乱の $x=0$ での振幅を描いたものであるが、減衰振動の様子が見られる。比較的初期の段階は、攪乱が非線型であることを反映して、減衰がゆるやかになっているようである。図8には、攪乱の最大振幅の時間変化を、波数1のPrimary Modeと、2倍の波数のHarmonic Modeに分けて、描いた。Harmonic Modeは、 $t=50$ 付近で減衰してなくなり、以後、攪乱は線型の振る舞いを示すことになる。

次に, Orszag と Kells⁶⁾ と同一の計算を実行した。即ち, Reynolds 数は, 2935 で, 攪乱の波数は, 1.3231 とし, 攪乱の振幅は, 0.108 に取り, 非線型安定性の直接数値計算を行った。図9及び図10が, 計算結果である。図9から, わずかに攪乱が増幅しながら振動する様子が見られるが, 未だ決定的な結果ではない。図10は, Primary Mode と Harmonic Mode の時間変化を描いたものである。ただし, 各 Mode の最大振幅をその対象とした。前者はゆるやかな増幅傾向を示し, 後者は, 少し波うちながら, 一定の値を維持している。

§5. 結論

平面 Poiseuille 流に加えられた攪乱の安定性の新しい, 高精度の直接数値計算方法を提案し, 線型及び非線型の安定性の問題にこの方法を適用したところ, 線型の場合には, その有効性が確認され, 非線型の場合にも, 有効性が認められた。この方法を拡張して, 乱流の Large Eddy Simulation を実行する研究が, 現在進行中である。

謝辞

本研究の遂行にあたり、ご援助いただいた、京工繊大・機械の星深信行教授に感謝の意を表します。また、貴重な助言とご援助をいただいた、京大・理の巽友正教授、京大・数理解析研究所の後藤金英助教授にも感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Deardorff, J.W., J. Fluid Mech. 41(1970), 453.
- 2) Moin, P. & Kim, J., J. Fluid Mech. 118(1982), 341.
- 3) Horiuti, K. & Kuwahara, K., Proc. 8-th Int. Conf. Num. Meth. Fluid Dyn.(1982).
- 4) Kawamura, T., Takami, H. & Kuwahara, K., Proc. 9-th Int. Conf. Num. Meth. Fluid Dyn.(1984).
- 5) Shen, S.F., J. Aero. Sci. 21(1954), 62.
- 6) Thomas, L.H., Phys. Rev. 91(1953), 780.
- 7) George, W.D. & Hellumus, J.D., J. Fluid Mech. 51(1972), 687.
- 8) Orszag, S.A. & Kells, L.C., J. Fluid Mech. 96(1980), 159.
- 9) Nishioka, M., Iida, S. & Ichikawa, Y., J. Fluid Mech. 72 (1975), 731.
- 10) Itoh, N., J. Fluid Mech. 82(1977), 455.
- 11) Satofuka, N., Proc. Int. Symp. Appl. Math. Inf. Sci., Kyoto Univ., (1982).

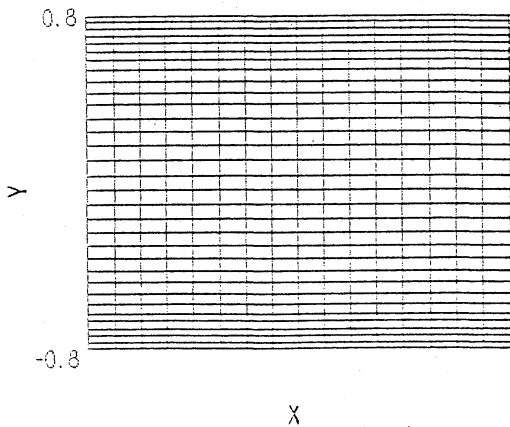
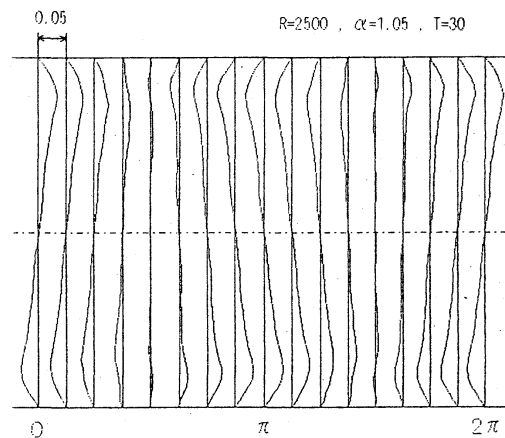
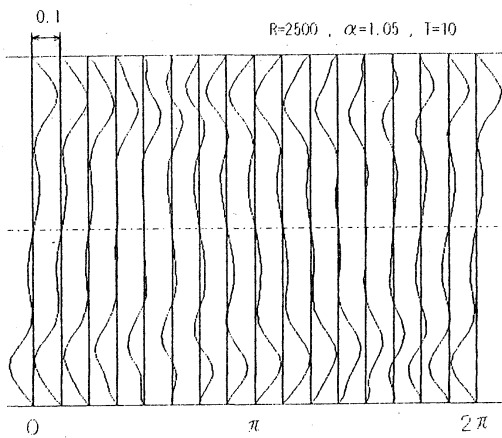
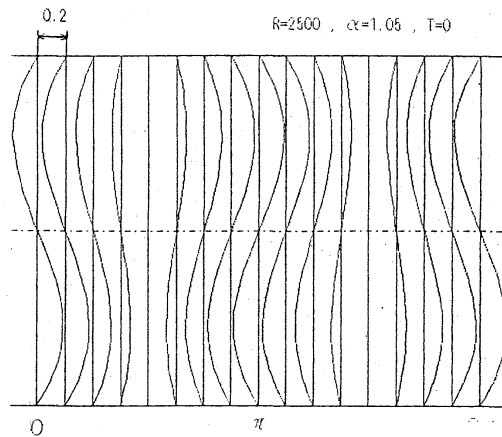


図1. 座標格子



PHASE (αX)

PHASE (αX)

図2. 減衰攪乱の流速分布

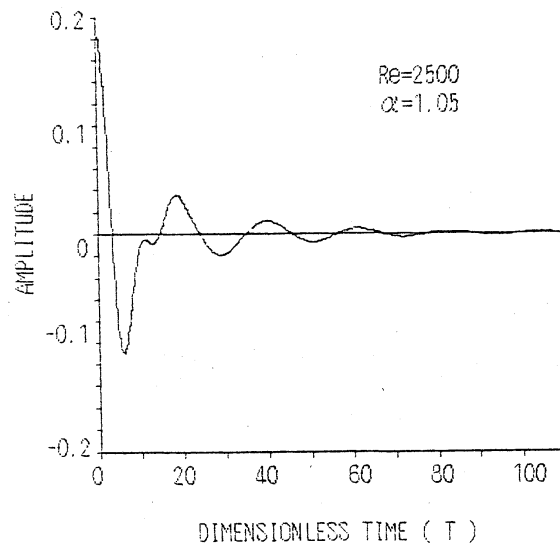


図3. 減衰攪乱の振幅の時間変化

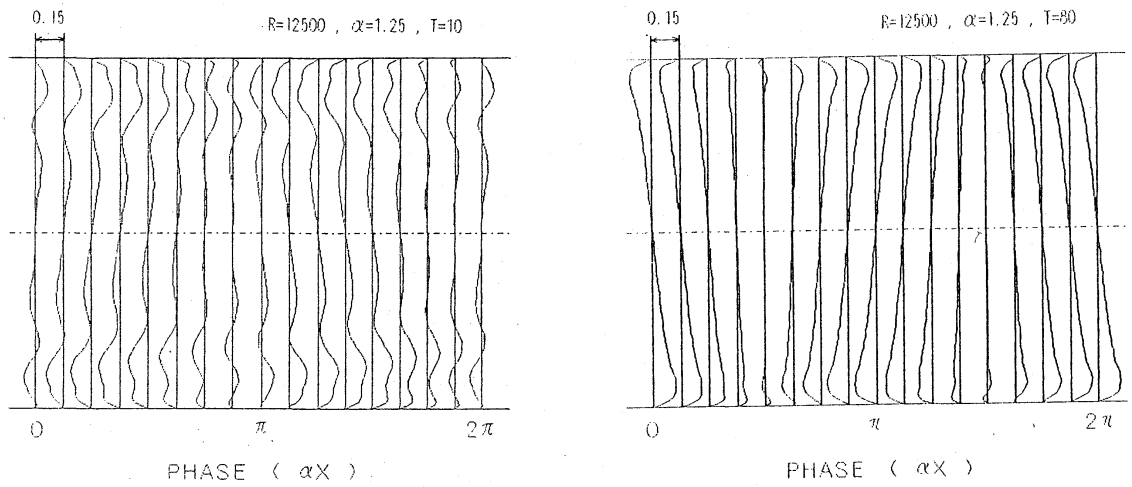


図4. 増幅攪乱の流速分布

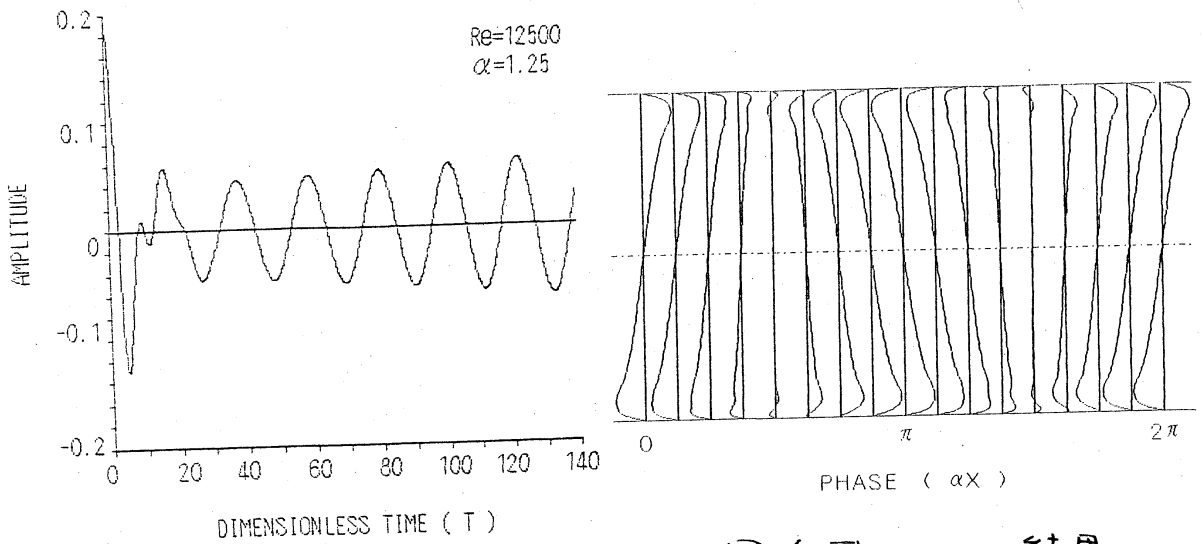


図5. 増幅攪乱の振幅の時間変化

図6. Thomas の結果

	R	α	c_i	c_r
本研究	2000	0.84	-0.036	0.2345
THOMAS	2500	0.9	-0.0212	0.2857

	c_i	c_r
本研究	0.00289	0.23738
THOMAS	0.0037	0.2375
GEORGE, HELLUMS	0.003758	0.2374

表1. 本研究と他の研究の比較

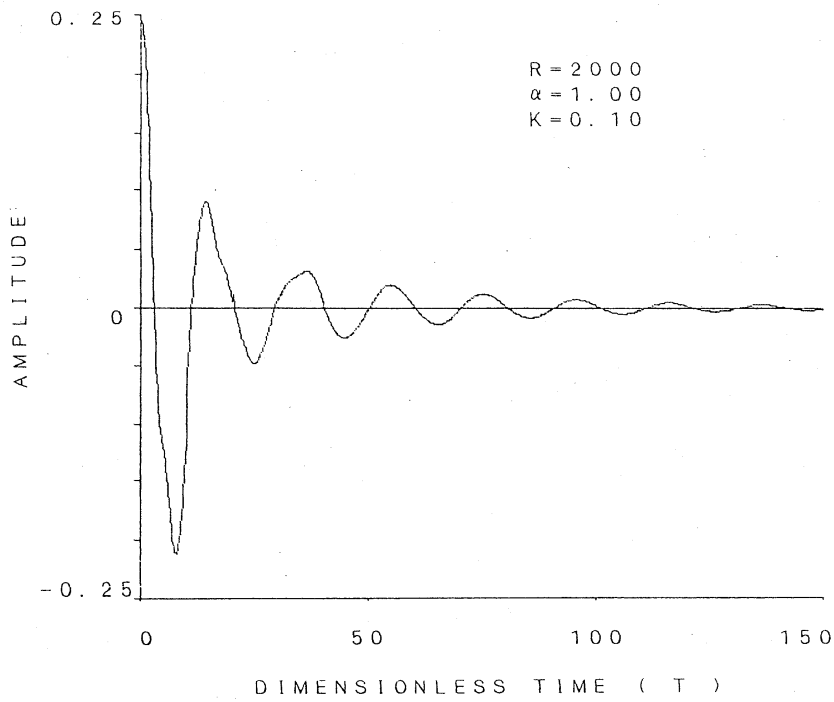


図7. 非線型減衰攪乱の振幅の時間変化

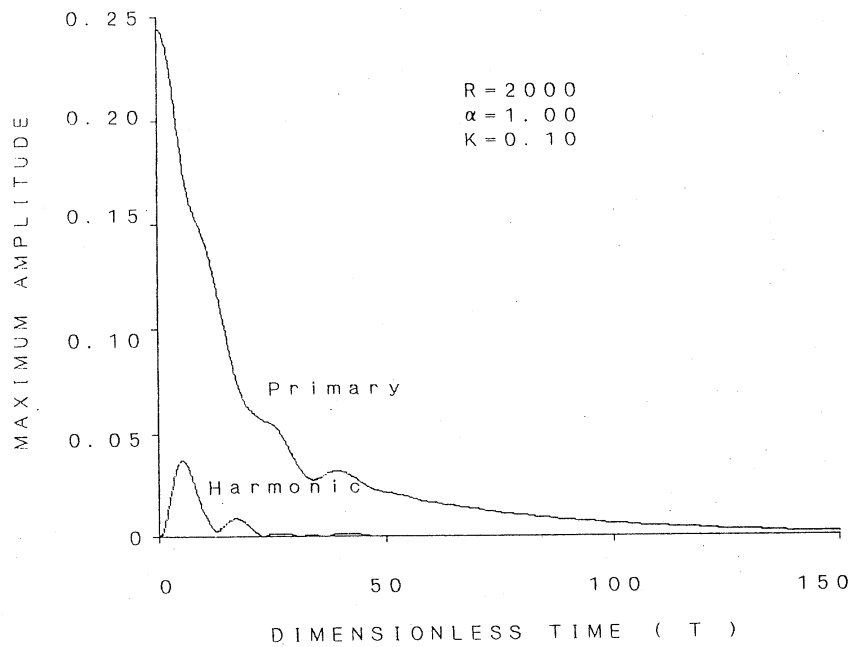


図8. 非線型減衰攪乱の最大振幅の時間変化

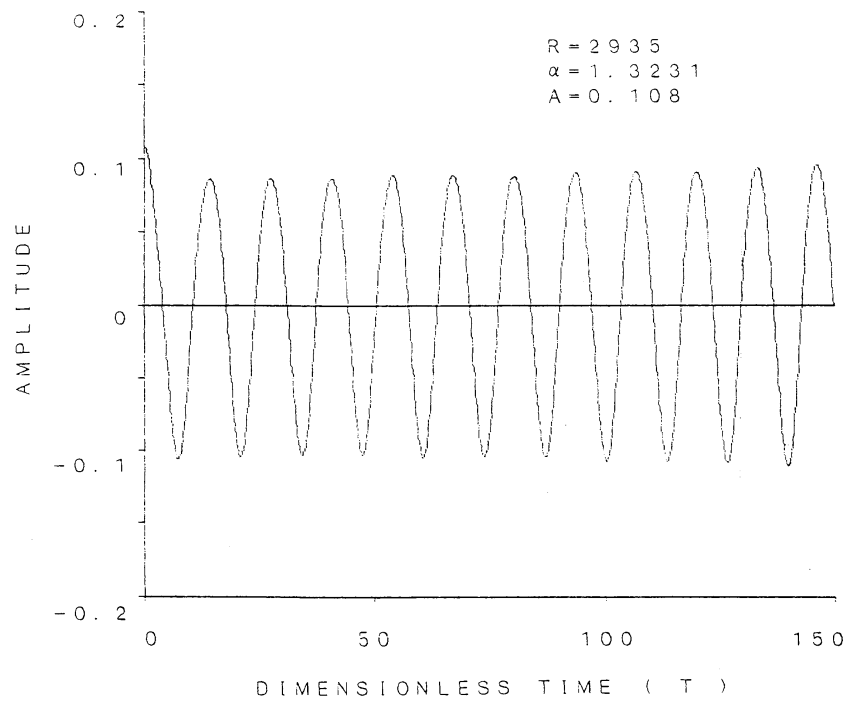


図9. 非線型攪乱の振幅の時間変化

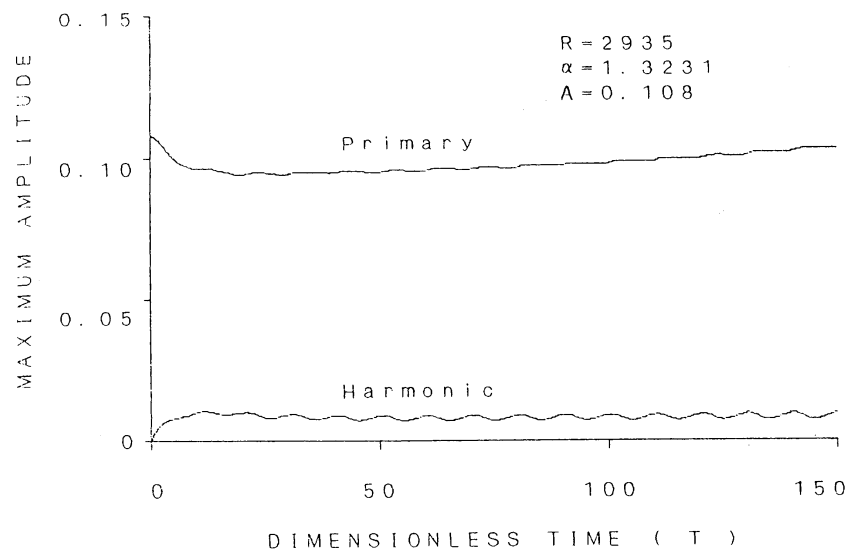


図10. 非線型攪乱の最大振幅の時間変化