数理解析研究所講究録
539巻 1984年 37-56

力学系としての渦糸群

東大・理　木村芳文 (Yoshifumi Kimura)
東大・理　橋本英典 (Hidenori Hasimoto)

§1 はじめに

渦とは渦度の集中した領域を表わし、渦糸とはその集中の度合がδ関数的なものであるとする。

２次元の縮まない完全流体中のＮコの渦糸の運動方程式は無限の領域においては次式で与えられる[1]。

$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{m=1}^{N}{}' \frac{\Gamma_m}{\bar{z}_i - \bar{z}_m} \tag{1,1}$$

ここで z_j $(= x_j + i y_j)$ は j 番目の渦糸の複素 z 平面における位置であり，Γ_j はその渦糸の強さを表わす。変数の上の ‾ は複素共役をとることを、また Σ の肩の $'$ は singular な項 $i=m$ を除くことを意味している。

方程式(1,1)は直交座標系 (x, y) を用いて表わした方が扱いやすいときもあるので以下にその形を掲げておく。

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_j}{dt} = \dfrac{-1}{2\pi} \displaystyle\sum_{m=1}^{N}{}' \dfrac{\Gamma_m (y_j - y_m)}{r_{jm}^2} & (1,2) \\[2ex]
\dfrac{dy_j}{dt} = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_{m=1}^{N}{}' \dfrac{\Gamma_m (x_j - x_m)}{r_{jm}^2} & (1,3)
\end{cases}
$$

$$
r_{jm}^2 = (x_j - x_m)^2 + (y_j - y_m)^2
$$

方程式(1, 1)(および(1, 2), (1, 3))は流体力学における渦運動のみならず、統計力学におけるスピン流体の渦解を記述するということも知られている。[2)]

方程式(1, 2)(1, 3)は、以下のように書き変えることによりハミルトン系として見なせるということに注目しよう。

$$
\begin{cases}
\Gamma_j \dot{x}_j = \dfrac{\partial H}{\partial y_j} & (1,4) \\[2ex]
\Gamma_j \dot{y}_j = -\dfrac{\partial H}{\partial x_j} & (1,5)
\end{cases}
$$

$$
H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{(i \neq j)} \sum \Gamma_i \Gamma_j \log r_{ij} \qquad (1,6)
$$

§2 運動方程式の可積分性

2−1 境界および外部流の存在

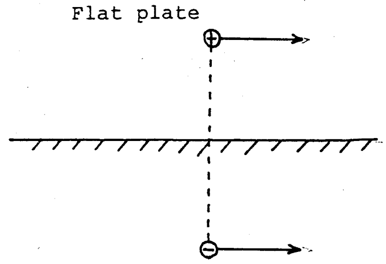
方程式(1.1)〜(1.6)はいずれも渦系が無限のかつ流れの無い領域に置かれた場合のものである。もし、境界や流れが存在する時には境界条件や流れの影響を考慮するために(1.1)に付加

的な項を組み込むことが必要である。

○境界の場合

例1　無限平板境界

無限平板境界が存在する場合、渦糸は境界に関して対称な位置に大きさが等しく向きが逆の仮想的な渦糸を誘起する．この仮想的な渦糸は後で述べる円の場合にも同様だが、鏡像とよばれ電磁気学における電荷に対するものと同じ概念である。よって運動方程式には鏡像からの寄与も含まねばならない。

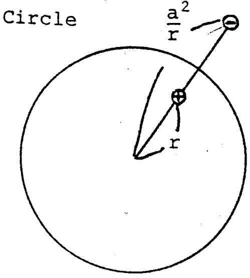


$$\frac{dz_j}{dt} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{m=1}^{N}{}' \frac{\Gamma_m}{\bar{z}_j - \bar{z}_m} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{m=1}^{N} \frac{-\Gamma_m}{\bar{z}_j - z_m} \qquad (2,1)$$

右辺第2項が鏡像による項であるが．今度の場合は和に自分自身の鏡像による項も含まれていることに注意して頂きたい。

例2　円境界

境界が円の場合は鏡像の位置が平板の場合と違うのみである。位置z強さΓの渦糸を(z, Γ)と表わすと(z, Γ)の鏡像は$(a^2/\bar{z}, -\Gamma)$で与えられる。ここでaは円の半径である。よって運



動方程式は、

$$\frac{dz_j}{dt} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{m=1}^{N}{}' \frac{\Gamma_m}{\bar{z}_j - \bar{z}_m} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{m=1}^{N} \frac{-\Gamma_m}{\bar{z}_j - \left(\frac{a^2}{z_m}\right)} \tag{2.2}$$

上記2例は、境界として最も基本的なものであり、より一般的な形状の境界については等角写像を使って平板あるいは円に変換することにより、考えることが可能である。

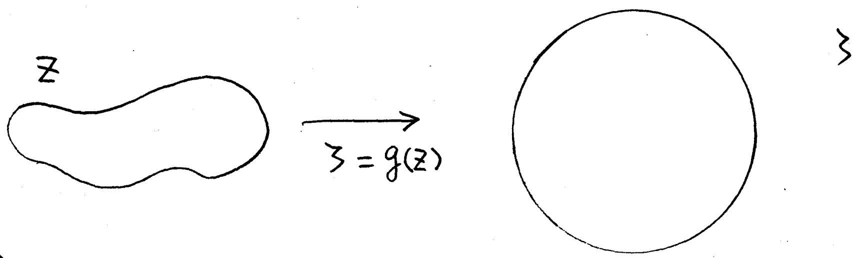
○単連結領域[3-4]

運動方程式は次のハミルトニアンより与えられる。

$$H = -\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j^2 \log\frac{|g'(z_j)|}{1-g_j\bar{g}_j} - \frac{1}{4\pi}\sum_{j}\sum_{\neq k}\Gamma_j\Gamma_k \log\frac{|g_j-g_k|}{1-g_j g_k}$$

$$\Gamma_j \dot{\bar{z}}_j = 2i\frac{\partial H}{\partial z_j}$$

ここで $\zeta = g(z)$ は与えられた境界を ζ 平面上の円に写す解析写像であり $g_j = g(z_j)$ である。

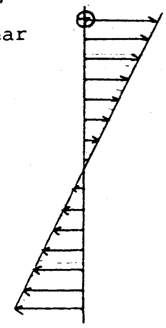


○流れの場合

例1：*simple shear*

今渦系の他に図に示すような *shear* が存在していたとしよう。渦系は y 方向には新たな速度を感じないが、x 方向に

は外部の流れの速度をうける。よって運動方程式は.

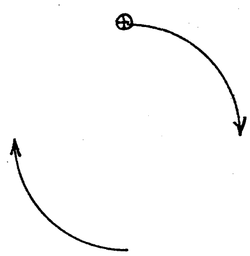


$$\frac{dZ_j}{dt} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{m=1}^{N}\frac{\Gamma_m}{\bar{Z}_j - \bar{Z}_m} + \alpha\, I_m Z_j \quad (2.4)$$

と表わせる。ここで $I_m Z_j = y_j$ で、α は

shear rate である（後述）

例2：circular rotation



渦系が図の様な回転流中に置かれている場合には、渦系は渦系どうしの相互作用に剛体回転を足し合わせたものを速度として感じる。よって運動方程式は.

$$\frac{dZ_j}{dt} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{m=1}^{N}{}' \frac{\Gamma_m}{\bar{Z}_j - \bar{Z}_m} + i\beta Z_j \quad (2.5)$$

となるであろう。ここで、i は複素単位、β は回転速度である。

上記の２つの例はハミルトニアンに流れの関数を取り込むことにより、以下のようにより統一的に述べることができる。

流れの関数 $\psi(x, y)$ であらわされる縮まない流れの中におかれた渦系群の２次元運動方程式は

$$\Gamma_j \dot{x}_j = \frac{\partial}{\partial y_j} H_v + \Gamma_j \frac{\partial}{\partial y_j} \psi_j \tag{2.6}$$

$$\Gamma_j \dot{y}_j = -\frac{\partial}{\partial x_j} H_v - \Gamma_j \frac{\partial}{\partial x_j} \psi_j \tag{2.7}$$

で与えられる。ここで $\psi_j = \psi(x_j, y_j)$，また

$$H_v = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i \neq j} \sum \Gamma_i \Gamma_j \log r_{ij} \tag{2.8}$$

$$r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$$

である。いま

$$H_\psi = \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j \psi_j \tag{2.9}$$

と置くと、上の正準方程式は

$$\Gamma_j \dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial y_j} \tag{2.10}$$

$$\Gamma_j \dot{y}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \tag{2.11}$$

ただし

$$H = H_v + H_\psi$$

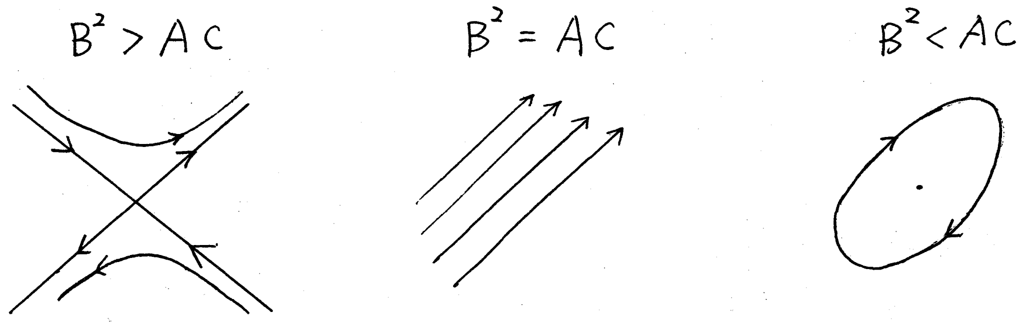
と書くことができ、再びハミルトン系として表わされることがわかる。

さて $\psi(x, y)$ として次の形を仮定する。

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) \tag{2.12}$$

これは一様な流れと *pure shear* が共存する流れで $B^2 > AC$，$B^2 = AC$，

$B^2 < AC$ に応じて　　　　　流線はそれぞれ双曲線、平行直線、楕円になっていることがわかる。(後述)



2-2　運動の保存量[1]

流れのない無限領域における渦系の運動方程式(1)は、次の4つの量が保存量として存在することが知られている。(重心は2つと考える。)

① エネルギー

$$E = -\frac{1}{4\pi}\sum_{(i \neq j)}^{N}\sum^{N}\Gamma_i\Gamma_j \log r_{ij} \qquad (2.13)$$

$$r_{ij} = |z_i - z_j|$$

これはハミルトン系ではハミルトニアンに対応するものであり、当然保存量となるべきものである。

② 慣性モーメント(2次モーメント)

$$I = \sum_{i=1}^{N}\Gamma_i |z_i|^2 \qquad (2.14)$$

これは系(あるいはハミルトニアン)の回転対称性に起因

するものである。

③ 重心

$$G = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i z_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \tag{2.15}$$

系の並進対称性により重心に対応する上記の量が保存する。これはまた、実数で表わすと次のようになる。

$$G_x = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i$$
$$G_y = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i y_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \tag{2.16}$$

以上4つの保存量は系が充分に対称な場合であるが、境界や流れによって対称性が失われるとそれに従い保存量の数も減っていく。

表1はいくつかの条件についての可積分性を表わしたものである。例えば、無限領域内の3つの渦系の場合、方程式の数は3×2＝6であり、保存量は先の4つがあり、6－4＝2が実質的な未知数の個数といえる。未知数の数が2以下のautonomousな系は可積分である。これは簡単には次のような理由であると考えられる。2つの未知数をx, yとすると、それらは次の方程式をみたすであろう。

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \qquad \frac{dy}{dt} = g(x, y) \tag{2.17}$$

表 1

Integrability of the equations of motion for several cases.

	conditions	numbers of equations	conservatives	integrability
1	Two vortices (without boundaries and external flow)	4	E, I, G_x, G_y	○
2	Three vortices (without boundaries and external flow)	6	E, I, G_x, G_y	○
3	Two vortices (in a circle)	4	E, I	○
4	Three vortices (in a circle)	6	E, I	× (△)
5	Two vortices (in a domain without rotational symmetry) ex. Two vortices in a semi circle.	4	E	× (△)
6	Two vortices (in a steady flow with translational symmetry in a certain direction)	4	E, G_x, (or G_y)	○

可積分性のところで ×(△) というのは一般には可積分でないが、対称性の良い場合は解が得られることを意味している。

上式の辺々を割り算すると

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \tag{2.18}$$

また、エネルギーの式より

$$y = h(x) \tag{2.19}$$

が得られたとすると

$$y = \int^{x} \frac{g(x, h(x))}{f(x, h(x))} dx \tag{2.20}$$

と形式的に解が積分形で表現可能になるのである。表のうち円の中の2つの渦糸や半円の中の2つの渦糸については先の報文で紹介したので、次の節では無限領域における3つの渦糸の運動の特異的な場合と、定常な流れの中における渦糸の運動を紹介することにする。

§3　無限領域における3つの渦糸の相似解

表にもあるように無限領域内の3つの渦糸の系は可積分系であるが[7] いくつかの興味ある運動が相似解として得られる。[8] 相似解を得るためにまず

$$Z_j = k_j f(t)$$

と置いて、これを方程式(1.1)に代入し、空間成分と時間成

分を分離する。ここで k_j が空間成分，$f(t)$ が時間成分を表わす。$f(t)$ に添字 j が無いのは系全体が一様に運動することを表わしている。得られた k_j，$f(t)$ についての２つの方程式は以下の通りである。

$$\begin{cases} \dot{f}\bar{f} = A + iB = C \quad (const) & (3.1) \\ C k_m = -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\sum_{j=1}^{N}{}' \dfrac{\Gamma_j}{\bar{k}_m - \bar{k}_j} & (3.2) \end{cases}$$

まず最初に時間成分について考えよう。f は一般に複素数なので，$f = re^{i\phi}$ と置いて方程式に代入すると，

$$\dot{f}\bar{f} = r\dot{r} + ir^2\dot{\phi} = A + iB \qquad (3.3)$$

となり，r と ϕ について２つの方程式が得られる。

$$\begin{cases} r\dot{r} = A & (3.4) \\ r^2\dot{\phi} = B & (3.5) \end{cases}$$

これらはすぐ積分できて，

$$r = \sqrt{2At + \alpha} \qquad (3.6)$$

$$\phi = \frac{B}{2A}\log(2At + \alpha) + \beta \qquad (3.7)$$

が得られる。よってfは

$$f = \sqrt{2At+\alpha}\ \exp\left[i\left\{\frac{B}{2A}\log(2At+\alpha)+\beta\right\}\right] \quad (3.8)$$

となる。Aの正，負，0に応じてfは

$A > 0$ ……… 時間とともに増大

$A = 0$ ……… 剛体回転

$A < 0$ ……… 時間とともに減少

を表わしている。次に空間部分であるが、今は例としてN＝3，すなわち，3体問題を考えることとする。解くべき方程式を陽に書くと次のようになる。

$$C k_1 = -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\Gamma_2}{\bar{k}_1-\bar{k}_2}+\frac{\Gamma_3}{\bar{k}_1-\bar{k}_3}\right) \quad (3.9)$$

$$C k_2 = -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\Gamma_1}{\bar{k}_2-\bar{k}_1}+\frac{\Gamma_3}{\bar{k}_2-\bar{k}_3}\right) \quad (3.10)$$

$$C k_3 = -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\Gamma_1}{\bar{k}_3-\bar{k}_1}+\frac{\Gamma_2}{\bar{k}_3-\bar{k}_2}\right) \quad (3.11)$$

＋複素共役

上の方程式を以下の手続きにより解析する。

①複素共役 $\bar{k}_1$，$\bar{k}_2$，$\bar{k}_3$ を消去する。

② $k_1-k_2=x$，$k_2-k_3=y$ と置いて x, y で方程式

を表わす。

③分母をはらって多項式をつくり，それを因数分解する．その結果として次の式が得られる。

$$(\Gamma_1\Gamma_2+\Gamma_2\Gamma_3+\Gamma_3\Gamma_1)(X^2+X+1)$$
$$\times\left\{(\Gamma_1+\Gamma_2)X^3+(2\Gamma_1+\Gamma_2)X^2-(\Gamma_2+2\Gamma_3)X-(\Gamma_2+\Gamma_3)\right\}=0 \quad (3.12)$$
$$X\equiv y/x$$

上式の各項はそれぞれ次のような意味を持っている。

$\underline{\Gamma_1\Gamma_2+\Gamma_2\Gamma_3+\Gamma_3\Gamma_1=0}$

相似解の条件を求めるためにエネルギーの式（2.13）に $z_j=k_j f(t)$ を代入すると

$$E=-\frac{1}{8\pi}\sum_{(i\neq j)}\sum\Gamma_i\Gamma_j\left\{\log|k_i-k_j|+\log|f|\right\} \quad (3.13)$$

が得られる。f が時間的に変化する，すなわち $A\neq 0$ であるならば，エネルギー保存のために

$$\sum_{(i\neq j)}\sum\Gamma_i\Gamma_j=0$$

でないといけない．また逆に $\sum_{i\neq j}\sum\Gamma_i\Gamma_j=0$ であるならば，系が expand したり contract したりする場合がありうることになる。

$\underline{X^2+X+1=0}$

これは常に $X=\omega,\ \omega^2$ を解にもつ．（ω は1の立方根）ω,ω^2 はどちらも正三角形解に対応していることがわかる．すなわ

ち、3つの渦系の強さは何であっても正三角形に配置された渦系は常に形をかえずに回転するのである。

$$\underline{(\Gamma_1+\Gamma_2)X^3+(2\Gamma_1+\Gamma_2)X^2-(\Gamma_2+2\Gamma_3)X-(\Gamma_2+\Gamma_3)=0}$$

この方程式は3次方程式なので一般にカルダノの方法等を使って解析的に解くことが可能である。解の詳細についてはまだ調べられていないが、実数解は一直線解(すなわち、一直線上に並べられた渦系が間隔をかえないで回転するような解)を与えることがわかっている。

以上の結果は、天体力学におけるラグランジェによって得られた特解と類似性があるといえる。(図1、2、3)

§4　流れがある場合の渦系の運動

前述のように流れの関数 $\psi(x,y)$ が次のような形の場合を考えよう。

$$\psi(x,y)=\frac{1}{2}(Ax^2+2Bxy+Cy^2) \tag{4.1}$$

ここで

$$\sum\Gamma_j x_j = X \quad , \quad \sum\Gamma_j y_j = Y \tag{4.2}$$

と置く。運動方程式の両辺の和をとることにより X、Y についての方程式をつくると

$$\psi=0: \quad \dot{X}=0 \quad \dot{Y}=0 \tag{4.3}$$

でこれは重心の保存を表わしている。

a regular triangle shape.
$(\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3) = (2.\ 2, -1)$

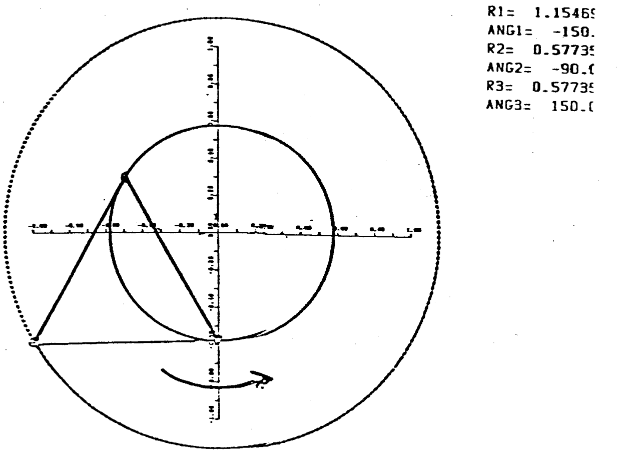


図1　正三角形解

初期の正三角形を保ったまま3つが回転する

expansion $(\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3) = (2, 2, -1)$

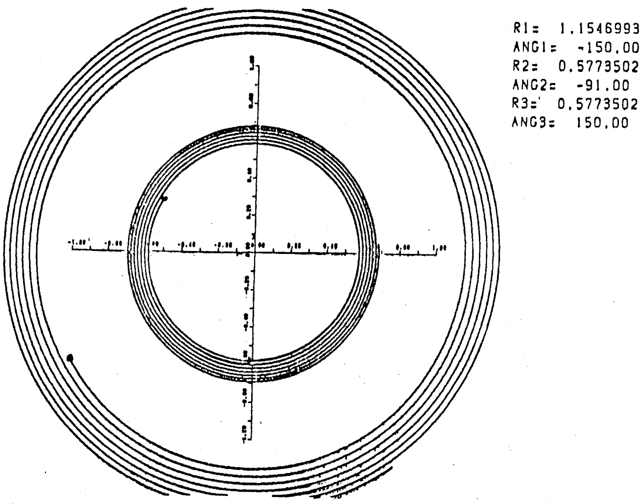


図2 expansion 解

図2の3つの渦系のうち1つをわずかに動かす。

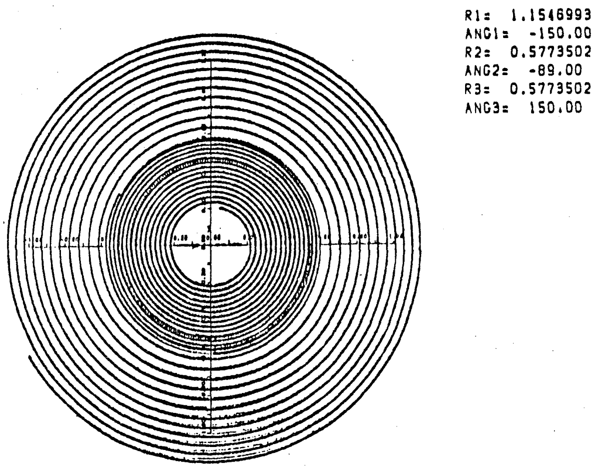


図3 contraction解
図2の渦系と逆の方向にわずかに動かす.

$$\psi \neq 0 : \quad \dot{X} = BX + CY = \frac{\partial}{\partial Y} H(X,Y) \qquad (4.4)$$

$$\dot{Y} = -(AX + BY) = -\frac{\partial}{\partial X} H(X,Y) \qquad (4.5)$$

$$H = \frac{1}{2}(AX^2 + 2BXY + CY^2) \qquad (4.6)$$

これは渦系系の重心が $H = const$ の曲線上を運動することを意味しており．前と同様に A, B, C の関係により軌道は双曲線，平行直線，楕円群となることがわかる．

以下最も簡単な例として2つの渦系を例にとって話を進める。エネルギーは

$$H = -\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi}\log r + \frac{1}{2}\sum_{1,2}(Ax_j^2 + 2Bx_jy_j + Cy_j^2)$$

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \qquad (4.7)$$

であり

$$\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2 = \Gamma X \qquad x_2 - x_1 = 2\xi \qquad (4.8)$$

$$\Gamma_1 y_1 + \Gamma_2 y_2 = \Gamma Y \qquad y_2 - y_1 = 2\eta \qquad (4.9)$$

とおくと H は

$$H = H_0 + \widetilde{H} \tag{4.10}$$

$$H_0 = \frac{\Gamma}{2}(AX^2 + 2BXY + CY^2)$$

$$\widetilde{H} = -\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi}\log\left[4(\xi^2+\eta^2)\right] + \frac{2\Gamma_1\Gamma_2}{\Gamma}\left[A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2\right]$$

と書ける。(4.8), (4.9) は定数因数を除けば正準変換であって前述のように X Y は H_0 = 一定の軌道上を運動するのに対し相対座標 ξ, η は $\widetilde{H}$ = 一定の軌道上を運動することになる。

以上の結果を利用して *simple shear* の中の２つの同じ強さ, 方向の渦糸の運動を考察しよう。方程式は

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{K(y_1-y_2)}{r^2} + \alpha y_1 \tag{4.11}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{K(x_1-x_2)}{r^2} \tag{4.12}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{K(y_2-y_1)}{r^2} + \alpha y_2 \tag{4.13}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{K(x_1-x_2)}{r^2} \tag{4.14}$$

$K = \frac{\Gamma}{2\pi}$　　α: *shear rate*

(4.13) − (4.11) より

$$2\dot{\xi} = \frac{-4K\eta}{r^2} + 2\alpha\eta \longrightarrow \dot{\xi} = \eta\left(\alpha - \frac{2K}{r^2}\right) \tag{4.15}$$

(4. 14) − (4. 12) より

$$2\dot{\eta} = \frac{4K\xi}{r^2} \longrightarrow \dot{\eta} = \frac{2K\xi}{r^2} \qquad (4.16)$$

(4. 15) / (4. 16)

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\eta(\alpha r^2 - 2K)}{2K\xi} \longrightarrow 2K(\xi d\xi + \eta d\eta) = \alpha r^2 \eta d\eta \qquad (4.17)$$

ここで

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 4(\xi^2 + \eta^2) \equiv 4R^2$$

$$d(R^2) = 2RdR = 2(\xi d\xi + \eta d\eta)$$

であるから (4. 17) より

$$K\,d(R^2) = 4R^2\alpha\,\frac{1}{2}\,d(\eta^2)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{d(R^2)}{R^2} = \frac{2\alpha}{K}\,d(\eta^2)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \log R^2 = \frac{2\alpha}{K}\eta^2 + C$$

$$\therefore\ R^2 = R_0^2\, e^{\frac{2}{K}\alpha\eta^2}$$

よって

$$\xi^2 = \xi_0^2\, e^{\frac{2\alpha}{K}\eta^2} - \eta^2 \qquad (4.18)$$

となる。上式で $2\alpha/K$ は、渦と shear の強さの比を表わすパラメターである。この結果は一般式 (4. 10) で $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$

とおいたものと一致する。比が問題なのであるから $K=1$ (shear と逆回転) と $K=-1$ (shear と順回転) を考えれば充分である。

$$\xi^2 = \xi_0^2 e^{2\alpha\zeta^2} - \zeta^2 \quad (K=+1) \qquad \text{逆回転}$$

$$\xi^2 = \xi_0^2 e^{-2\alpha\zeta^2} - \zeta^2 \quad (K=-1) \qquad \text{順回転}$$

今、$\xi_0^2 = 1$ として α の値をいくつかきめて ζ に対し ξ の値をプロットしたのが次のグラフである。図4 中心部の円は $\alpha=0$ (shear なしの場合) に対応している。円の内部は $K=-1$ (順回転) であり、外部は $K=1$ (逆回転) である。これによりわかることは、順回転の場合には shear の強さによらず、ξ, ζ は周期的であるのに対し、逆回転の場合には α のある値までは周期運動とはなれていってしまう運動とが可能であるが、α がある値を越えると、もはや、周期的な運動は許されなくなり常に2つの渦系は無限遠にはなれていってしまうのである。その α のクリティカルな値は $\xi=f(\zeta)$ の極値が ζ 軸に接するという条件より $\alpha = 1/2\xi_0^2 e$ と与えられる。図5 これは shear の中での渦の発展に1つの直感的な予想を与えうるものであると思う。すなわち shear と同じ方向の渦はこわれにくく、shear と逆方向の渦はこわれやすいのではあるまいか。

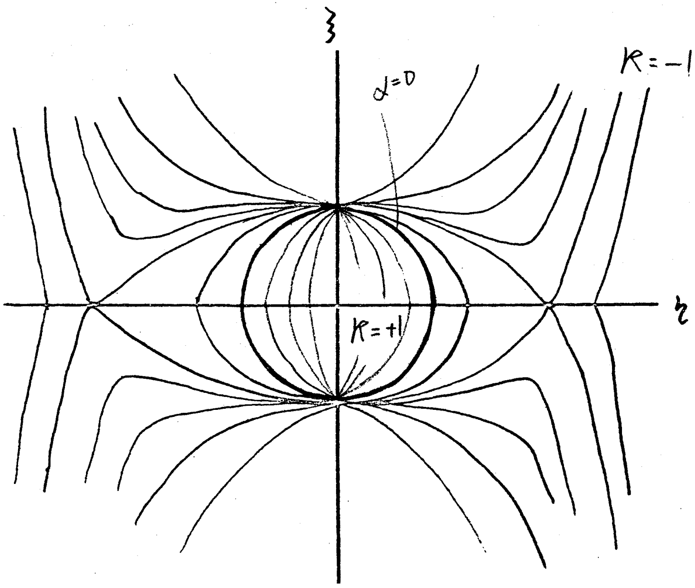
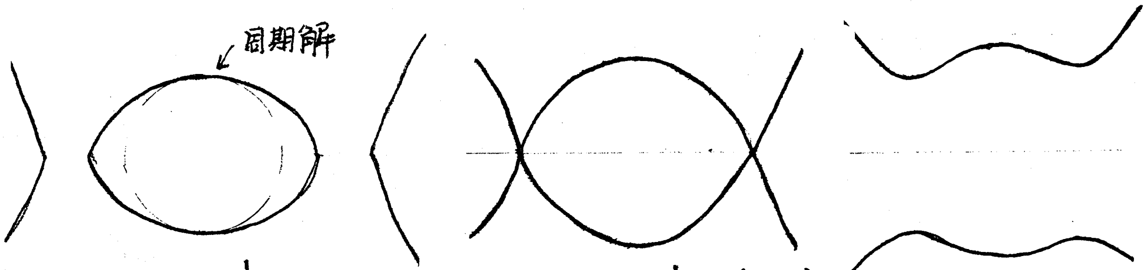


図4

ζ−ξグラフ

中心部の円はshearなし．円外は逆回転，円内は順回転に対応している。

図5：αの変化によるグラフの形状変化



$\alpha < \frac{1}{2\xi_0^2 e}$ $\alpha = \frac{1}{2\xi_0^2 e}$（クリティカル） $\alpha > \frac{1}{2\xi_0^2 e}$

参考文献

1) I. Imai: 流体力学（前編）裳華房 (1973), p.187

2) S. Takeno & S. Homma: Prog. Theor. Phys. Vol.69, No.3, 1983, 773-789

3) C.C.Lin: Proc. Nat. Acad. Sci. USA 27, (1941), 570-575

4) H.Hasimoto, K.Ishii, Y.Kimura & M. Sakiyama: Proc. IUTAM Symp. on Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids, Kyoto, 1983

5) Y. Kimura: 数理解析研究所 講究録 510「ナビエ ストークス方程式の解」1984 P177-190

6) H. Hasimoto: 特定研究報告集「乱流現象の解明と制御」1983年1月 P134-143

7) H. Aref: Ann. Rev. Fluid Mech 15 (1983) 345 - 389

8) H. Aref: Phys. Fluids 22(3) 1979 393-400