数理解析研究所講究録
540巻 1984年 137-144

$\mathcal{P}(\omega)$/finite 上の limits

阪府大総 加茂静夫 (Shizuo Kamo)

$\mathcal{P}(\omega)$ 上の quasi-order $\le^*$ を, $x \le^* y$ となるのは $x \setminus y$ が finite のとき, で定める. $x <^* y$ は, $x \le^* y$ かつ not $y \le^* x$ を意味する. quasi-order $\le^*$ による $\mathcal{P}(\omega)$ 上の同値関係を $\sim$ で表わす. ω の部分集合からなる κ-sequence $X = \langle x_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ が, κ-limit であるとは, X が $<^*$-下降列であり, 任意の ω の無限部分集合 y に対して, $\exists \alpha < \kappa$ (not $y <^* x_\alpha$) が成り立つこととする. 定義からすぐわかるように, 適当な cardinal κ について, κ-limit が存在する. そこで, 連続体仮説の下で, ω_1 は, limit が存在する唯一の cardinal となる. 更に, 連続体の濃度が ω_2 ($2^\omega = \omega_2$) の場合には, 次の (A)〜(C) の可能性が考えられる. (A). $\exists \omega_1$-limit + $\neg \exists \omega_2$-limit. (B) $\neg \exists \omega_1$-limit + $\exists \omega_2$-limit. (C) $\exists \omega_1$-limit + $\exists \omega_2$-limit. (A)〜(C) のそれぞれが $2^\omega = \omega_2$ と整合することは, よく知られている. まず, (A) をみたす model は, 連続体仮説の成り立つ universe に対して,

ω_2 個の Cohen real を加える generic extension により得られる．又，(B) はマルティンの公理と $2^\omega=\omega_2$ から導かれる．更に，(B) の model に ω_1 個の Cohen real を加える generic extension による model では (C) が成り立つ．では，連続体の濃度 $(=2^\omega)$ が大きい場合はどうなるか．この論文ではそれについて考えるが，$\exists\kappa$-limit なら，$\exists\mathrm{cf}\kappa$-limit が成り立つから，regular cardinal の limit に制限して考察を行う．そして，次の結果を証明する．

定理（一般連続体仮説）　n を自然数とし，$\kappa_0,\cdots,\kappa_n$ と λ は regular cardinal で $\omega_1\leqq\kappa_0<\cdots<\kappa_n\leqq\lambda$ をみたすとする。このとき，poset $\mathbb{P}$ で，次の (i) から (iv) をみたすものが存在する．

(i)　$\mathbb{P}$ は countable chain condition をみたす，

(ii)　$\Vdash_{\mathbb{P}}$ " $2^\omega=\check{\lambda}$ ",

(iii)　$m=0,1,\cdots,n$ に対して，$\Vdash_{\mathbb{P}}$ " $\exists\check{\kappa}_m$-limit " となる．

(iv)　θ が $\kappa_0,\cdots,\kappa_n$ 以外の regular cardinal なら，$\Vdash_{\mathbb{P}}$ " $\neg\exists\check{\theta}$-limit " となる．

以下，この定理の証明のため，一般連続体仮説を仮定し，

$$\kappa_0,\cdots,\kappa_n,\lambda : \text{regular cardinals}\ \&\ \omega_1\leqq\kappa_0<\cdots<\kappa_n\leqq\lambda$$

とする．　$\kappa=\kappa_n$，$\bar{\kappa}=\kappa_0$ と記す．

≪ poset $\mathbb{P}$ の構成 ≫　$T_\xi\ (\xi<\kappa)$ による κ-stage finite support iteration $S_\xi\ (\xi<\kappa)$ を ξ に関する induction で次の様に

定める．ここで各$\xi < \kappa$に対して，$G|\xi$はV-generic on S_ξを，G_ξは$V[G|\xi]$-generic on T_ξを表わす．

1)．$\xi = 0$のとき．

$$T_0 = 2^{<\omega} \; (= \{ t \,;\, \exists k < \omega \, (t : k \to 2) \}),$$

$$a_0 = b_0 = \{ k < \omega \,;\, \exists t \in G_0 \, (t(k) = 1) \}$$

とする．

2)．$\xi = \eta + 1$のとき．

$$T_\xi = 2^{<\omega},$$

$$b_\xi = \{ k < \omega \,;\, \exists t \in G_\xi \, (t(k) = 1) \},$$

$$a_\xi = a_\eta \cap b_\xi$$

とする．

3)　ξがlimitのとき．

$$T_\xi = (\mathcal{P}_{<\omega}(\omega) \times \mathcal{P}_{<\omega}(\xi), \leqslant),$$

（ただし，T_ξのorderは，

$$(u, x) \leqslant (v, y) \iff u \supset v \;\&\; x \supset y \;\&\; u \setminus v \subset \bigcap_{\eta \in y} a_\eta \Big)$$

$$a_\xi = b_\xi = \bigcup \{ u \,;\, \exists x \, ((u, x) \in G_\xi) \}$$

とする．

$S_\xi \, (\xi \leq \kappa)$は，定理の(iii)を成り立たせるためのposetである．次の補題1～2が成り立つ．

<u>補題1</u>．$\xi < \eta < \kappa$とすると，

$$\Vdash_{\eta+1} \text{“} a_\eta \neq \phi \;\&\; a_\eta <^* a_\xi \text{”}$$

である.

補題 2. $\forall \theta \le \bar{\kappa}\ (\ \theta \ge \omega_1$: regular $\Rightarrow \Vdash_\theta$ "$\langle a_\xi \mid \xi < \check{\theta} \rangle$: $\check{\theta}$-limit" $)$

補題 3. S_κ は countable chain condition をみたす. 更に,

$\forall W \subset S_\kappa\ (\ |W| = \omega_1 \Rightarrow \exists W_1 \subset W\ (\ |W_1| = \omega_1\ \&\ W_1$: pairwise compatible $)\ )$ が成り立つ.

補題 2 より, poset $\bar{P}$ を,

$$\bar{P} = S_{\kappa_0} \times \cdots \times S_{\kappa_n} \times \{ f : \exists x \subset \lambda\ (\ |x| < \omega\ \&\ f : x \to 2\ ) \}$$

で定めれば, $\bar{P}$ は定理の (i)～(iii) をみたす. そこで, 以下, $\bar{P}$ を拡張して, (i)～(iv) をみたす poset P をつくる.

directed set $I = (\ I, \le\ )$ を,

$$I = \kappa_0 \times \cdots \times \kappa_n \times \mathcal{P}_{<\kappa}(\lambda)$$

$$(\xi_0, \cdots, \xi_n, A) \le (\eta_0, \cdots, \eta_n, B) \Leftrightarrow \xi_0 \le \eta_0\ \&\ \cdots\ \&\ \xi_n \le \eta_n\ \&\ A \subset B$$

で定める.

$X \subset \mathcal{P}(\omega)$ が strong finite intersection property (sfip) を持つとき, poset $R_X = (\ \mathcal{P}_{<\omega}(\omega) \times \mathcal{P}_{<\omega}(X), \le\ )$ を,

$$(u, x) \le (v, y) \Leftrightarrow u \supset v\ \&\ x \supset y\ \&\ u \setminus v \subset \cap y$$

で定める. R_X は strong countable chain condition をみたす poset であり, G を V-generic on R_X とし, $a = \cup \{ u\ ;\ \exists x\ (\ (u, x) \in G\ ) \}$ とおくと, $a \subset \omega\ \&\ a \ne \phi\ \&\ \forall x \in X\ (\ a \le^* x\ )$ が成り立つ.

各 $i = (\ \xi_0, \cdots, \xi_n, A\ ) \in I$ に対して, $Q_\alpha(i)$ $(\alpha < \bar{\kappa})$ による $\bar{\kappa}$-stage finite support iteration $P_\alpha(i)$ $(\alpha \le \bar{\kappa})$ を次の induction により

定める．ここで，各 $\alpha < \bar{\kappa}$ に対して，$G|\alpha$ は V-generic on $P_\alpha(i)$ を表わす．まず，

$$Q_0(i) = S_{\xi_0} \times \cdots \times S_{\xi_n} \times \{ f ; \exists x \subset A\,(|x| < \omega \ \&\ f : x \to 2)\}$$

とし，$0 < \alpha < \bar{\kappa}$ に対して，$V[G|\alpha]$ において，

$$Q_\alpha(i) = \text{the finite product of } \langle R_X \mid X \in \Gamma_\alpha(i) \rangle,$$

（ただし，$\Gamma_\alpha(i) = \{ X \subset \mathcal{P}(\omega) ; |X| < \kappa \ \&\ X$ は sfip を持つ$\}$）

とする．　$P(i) = P_{\bar{\kappa}}(i)$ とおく．

各 stage α で $Q_\alpha(i)$ が countable chain condition をみたすから，$P(i)$ も countable chain condition をみたす．又，$i \leq j$ のとき，$Q_0(i)$ が $Q_0(j)$ の complete な subposet になることと，$Q_\alpha(i), Q_\alpha(j)$ $(0 < \alpha < \bar{\kappa})$ の定め方から，$P(i)$ は $P(j)$ の complete な subposet になる．そこで，poset P を，

$$P = \bigcup_{i \in I} P(i)$$

で定める．P が定理で求める poset となることをみていく．

《 P は countable chain condition をみたすこと 》

I が σ-closed な directed set であることと，$P(i)$ $(i \in I)$ が countable chain condition をみたすことから，容易に導かれる．

《 $\Vdash_P$ " $2^\omega = \check{\lambda}$ " となること 》

まず，$|P| \leq \Sigma_{i \in I} |P(i)| \leq \kappa \cdot |I| = \lambda$ だから，

$$\Vdash_P \text{"} 2^\omega \leq \check{\lambda} \text{"}$$

である．

便宜のため，各 $p\in P$ に対して，$p(0)=(s_0^p,\cdots,s_n^p,f^p)$ と記す．今，$Q=\{p\in P;\ \mathrm{supp}(p)=\{0\}\ \&\ \forall m\le n(s_m^p=\phi)\}$ とおくと，$Q\cong\{f;\ \exists x<\lambda(|x|<\omega\ \&\ f:x\to 2)\}$ となるから，

$\Vdash_Q$ "$\check{\lambda}$ 個の Cohen real over $\check{V}$ が存在する"

が成り立つ．これと，Q が P の complete subposet であることより，

$\Vdash_P$ "$\check{\lambda}$ 個の Cohen real over $\check{V}$ が存在する"

が成り立つ．そこで，$\Vdash_P$ "$2^\omega\ge\check{\lambda}$" である．

《 $\forall m\le n(\Vdash_P$ "$\exists\check{\kappa}_m$-limit") について 》

P が countable chain condition をみたすことと，I が σ-closed により次の補題が成り立つ．

補題4. x を P-name とし，$\Vdash_P$ "$x<\omega$" とすると，適当な $i\in I$ と $P(i)$-name $\bar{x}$ で $\Vdash_P$ "$x=\bar{x}$" となるものがある．

$\forall m\le n(\Vdash_P$ "$\exists\check{\kappa}_m$-limit") を示すため，

$m\le n$ & G : V-generic on P

とする．$H=\{s_m^p;\ p\in G\}\subset S_{\kappa_m}$ とおく．このとき，H は V-generic on S_{κ_m} となるから，$S_\xi(\xi\le\kappa_m)$ と同時に定めた names $a_\xi, b_\xi\ (\xi<\kappa_m)$ の解釈がある．それ等を，a_ξ^H，$b_\xi^H\ (\xi<\kappa_m)$ とする．$X=\langle a_\xi^H\mid\xi<\kappa_m\rangle$ とおく．X が，$V[G]$ において，κ_m-limit となることを示すが，まず，補題1より，X は長さ κ_m の $<^*$-下降列である．そこで，

$V[G]\models$ "$\forall y\subset\omega(y\neq\phi\Rightarrow\exists\xi<\kappa_m(\text{not } y<^* a_\xi^H))$"

を示せばよい．それを示すため，$y \in V[G]$ を，$y \subset \omega$ & $y \setminus \phi$ となる set とする．補題4により，

$$y \in V[G \cap P(i)]$$

となる $i = (\xi_0, \cdots, \xi_m, A) \in I$ が存在する．　$\delta = k_m + 1$ とおく．
このとき，b_δ^H は Cohen real over $V[G \cap P(i)]$ となるから，

$$y \setminus b_\delta^H \neq \phi$$

である．これと，$a_\delta^H \subset b_\delta^H$ より，$y \setminus a_\delta^H \neq \phi$．

$$\therefore \text{ not } y \leq^* a_\delta^H$$

《 $\forall \theta$: regular ($\forall m \leq n (\theta \neq k_m) \Rightarrow \Vdash_P$ " $\neg \exists \check{\theta}$-limit ") 》

背理法で示すため，

(1)　θ : regular & $\forall m \leq n (\theta \neq k_m)$

(2)　$\Vdash_P$ " $\langle y_\delta \mid \delta < \check{\theta} \rangle$: $\check{\theta}$-limit "

とする．　各 $\delta < \theta$ に対して，$i_\delta = (\xi_0^\delta, \cdots, \xi_n^\delta, A^\delta) \in I$ と $\alpha_\delta < \bar{\kappa}$ を，y_δ が $P_{\alpha_\delta}(i_\delta)$-name となるようにとっておく．このとき，(1)により，$(\xi_0, \cdots, \xi_n) \in k_0 \times \cdots \times k_n$，$\alpha < \bar{\kappa}$ で

$D = \{ \delta < \theta \,;\, \xi_0^\delta \leq \xi_0$ & $\cdots$ & $\xi_n^\delta \leq \xi_n$ & y_δ : $P_\alpha(i_\delta)$-name $\}$

が cofinal in θ となるものがとれる．

Case 1.　$\theta < \kappa$ のとき．

$A = \bigcup_{\delta \in D} A^\delta$ とおく．　$|A| \leq \Sigma_{\delta \in D} |A^\delta| < \kappa$ となる．そこで，　$i = (\xi_0, \cdots, \xi_n, A)$　とおくと，

$$i \in I \;\&\; \forall \delta \in D (y_\delta : P_\alpha(i)\text{-name})$$

となる．そこで，$P_\alpha(i)$-name X を，

$$\Vdash_{P_\alpha(i)} \text{"} X = \{ y_\delta ; \delta \in D \} \text{"}$$

で定めれば，$\Vdash_{P_\alpha(i)} \text{"} X \in \Gamma_\alpha(i) \text{"}$ となるから，$P_{\alpha+1}(i)$-name c で，

$$\Vdash_{P_{\alpha+1}(i)} \text{"} c \subset \omega \ \& \ c \neq \phi \ \& \ \forall x \in X (c \leq^* x) \text{"}$$

となるものが存在する． D は θ で cofinal だから，

$$\Vdash_P \text{"} c \subset \omega \ \& \ c \neq \phi \ \& \ \forall \delta < \theta (c \leq^* y_\delta) \text{"}$$

となる．これは，(2) と矛盾する．

Case 2. $\kappa < \theta$ のとき．

各 bijection $\varphi : \lambda \to \lambda$ に対して，φ を canonical に拡張した $\{ f : \exists x \subset \lambda (|x| < \omega \ \& \ f : x \to 2) \}$ 上の permutation $\hat{\varphi}$ が得られるが，それを更に，P 上の permutation にまで拡張できる．この事実と，Δ-system lemma によりこの場合は矛盾となる。