数理解析研究所講究録
541巻 1984年 86-99

非線形 Volterra 方程式に応ずる発展方程式の解の挙動

相模工大　小林和夫 (kazuo Kobayasi)

§1. 序論

Banach 空間 X での非線形 Volterra 方程式

(V)　　$u(t) + b * Au(t) \ni g(t), \quad t \geqq 0$

の解 $u(t)$ の $t \to \infty$ における漸近挙動を調べることを目的とする。ここで, A は m-accretive 作用素, b は実数値関数, g は X-値関数である。そして, $b * z(t) = \int_0^t b(t-s) z(s) ds$ とする。

Crandall & Nohel [5] は (V) を次の型の発展方程式 (E) ととらえて, 解の存在と一意性を証明した。

$$(E) \quad \begin{cases} du(t)/dt + Au(t) + G(u)(t) \ni f(t), & t \geqq 0 \\ u(0) = u_0 \in \overline{D(A)} \end{cases}$$

もし $b(0)=1$ ならば, (V) を (形式的に) 微分をすることにより

(1.1)　　$b(t) + k * b(t) = 1$

$$(1.2)\qquad f(t) = g'(t) + k * g'(t) + k(t)\,u_0$$

$$(1.3)\qquad G(u)(t) = k(0)\,u(t) + \int_0^t u(t-s)\,dk(s)$$

$$(1.4)\qquad u_0 = g(0)$$

と k, G, u_0 をおけば（E）が導かれる。

２章では（E）の一般解を定義し，それの $t\to\infty$ での漸近挙動に関する蚊戸－小林－宮寺［7］の結果を紹介する。３章では（V）の解の漸近挙動を２章の結果を用いて調べる。４章では（V）の解の漸近挙動の他の結果を述べる。これは平野［6］がHilbert空間のとき証明した結果を一様凸Banach空間へ拡張するものである。

§2.（E）に対する漸近挙動

この章では，（E）に対する漸近挙動に関する蚊戸－小林－宮寺［7］の結果を証明なしで述べる。

Xは実Banach空間とする。XがOpial条件を満たすとは次が成り立つことである。

$$w\text{-}\lim_n x_n = x_0 \Rightarrow \liminf_n \|x_n - x\| > \liminf_n \|x_n - x_0\|,\ \forall x \neq x_0$$

Hilbert空間，l^p空間，$1<p<\infty$，はOpial条件を満たす。

Gは次の条件を満たす与えられた写像とする。

$$(2.1)\qquad G:\ C([0,\infty);X) \to L^1_{loc}(0,\infty;X)$$

$$(2.2)\qquad G:\ C([0,T];X) \to L^1(0,T;X),\quad \forall T>0$$

(2.3) $\quad G(u^T) = G(u)^T \quad$ for $\ u \in C([0,\infty);X),\ T>0$

(2.4) $\quad \exists\, \gamma \in L^1_{loc}(0,\infty)\quad$ s.t.

$$\|G(u)-G(v)\|_{L^1(0,t;X)} \leqslant \int_0^t \gamma(s)\|u-v\|_{L^\infty(0,s;X)}ds, \quad t\geqslant 0$$

$$\text{for}\quad u,v \in C([0,\infty);\overline{D(A)})$$

ここで u^T, $G(u)^T$ は u, $G(u)$ の区間 $[0,T]$ への制限とする。

<u>定義 2.1.</u> u が (E) の強解であるとは，$u \in W^{1,1}_{loc}(0,\infty;X) \cap C([0,\infty);\overline{D(A)})$, $u(0)=u_0$, $du(t)/dt + Au(t) + G(u)(t) \ni f(t)$ a.e. t が成り立つことである。

さて，$f \in L^1_{loc}(0,\infty;X)$ とする。このとき，$\forall T>0$, $\forall u \in C([0,T];X)$ に対して，(2.2) より次の初期値問題

$$\begin{cases} dv(t)/dt + Av(t) \ni f(t) - G(u)(t), & 0 \leqslant t \leqslant T \\ v(0) = u_0 \in \overline{D(A)} \end{cases}$$

は一意な "integral solution" $v \in C([0,T];\overline{D(A)})$ をもつ。これを $v = Q^T(u)$ と表す。

<u>定義 2.2.</u> u が (E) の一般解であるとは，$u \in C([0,\infty);\overline{D(A)})$, $u^T = Q^T(u^T)$, $\forall T>0$, が成り立つことである。

このとき，次の存在定理が成り立つ。

<u>定理 2.1.</u> $u_0 \in \overline{D(A)}$, $f \in L^1_{loc}(0,\infty;X)$, G は (2.1)-(2.4) を満たすとする。このとき，(E) は一意な一般解 u をもつ。さらに，$\lambda>0$ に対して近似問題

$$
(\mathrm{E})_\lambda \quad \begin{cases} du_\lambda(t)/dt + A_\lambda u_\lambda(t) + G(u_\lambda)(t) = f(t), & t \geqq 0 \\ u_\lambda(0) = u_0 \end{cases}
$$

は一意な強解 u_λ をもち，$\lim_{\lambda \to 0+} \|u_\lambda - u\|_{C([0,T];X)} = 0$，$\forall T > 0$ が成り立つ。

<u>定理 2.2.</u>　$u_0 \in D(A)$，$f \in BV_{loc}(0,\infty;X)$，$G$ は (2.1)－(2.4) に加えて次を満たすとする。

$$
(2.5) \begin{cases} \forall T>0,\ \forall R>0 \text{ に対して } \exists M>0 \text{ s.t.} \\ Var(G(v):[0,t]) \leqq M\{1+Var(v:[0,t])\},\ 0 \leqq t \leqq T \\ \|G(v)(0+)\| \leqq M \\ \qquad \text{for } v \in C([0,T];\overline{D(A)}) \cap BV(0,T;X),\ \|v\|_{L^\infty(0,T;X)} \leqq R \end{cases}
$$

このとき，(E) の一般解 u は各有限区間 $[0,T]$ 上で Lipschitz 連続である。したがって，X が回帰的ならば u は強解である。

2.1. 弱漸近挙動

次の条件 (C1)－(C2) をおく。

(C1)　i) G は (2.1)－(2.4) を満たす。

ii) 任意の定数値関数 $v(t) \equiv v \in D(A)$ に対して

$$G(v) \in L^1(0,\infty;X)$$

iii) 非負，非増加関数 $k \in L^1(0,\infty)$ が存在して

$$
[G(v)(t) - G(w)(t),\ v(t) - w(t)]_+ \geqq \frac{d}{dt}(k * \|v-w\|(t))
$$

$$\text{for a.e. } t,\ \forall v, w \in W^{1,1}_{loc}(0,\infty;X)$$

（ただし，$[x, y]_+ = \lim_{\lambda \to 0+} \lambda^{-1}(\|x+\lambda y\| - \|x\|)$ とする。）

(C2)　$u_0 \in \overline{D(A)}$，　$f \in L^1(0,\infty\,;X)$

定理 2.3.　(C1)，(C2) を仮定し，X は回帰的で Opial 条件を満たすとする。u を (E) の一般解とするとき，次は互いに同値である。

(a)　$w\text{-}\lim_{t\to\infty} u(t)$ が存在する。

(b)　$w\text{-}\lim_{t\to\infty} u(t)$ が存在し $A^{-1}0$ の元である。

(c)　$A^{-1}0 \neq \phi$　かつ　$\omega_w(u) \subset A^{-1}0$

ただし，$\omega_w(u) = \{\xi \in X : \exists\, t_n \uparrow \infty,\ \xi = \lim_n u(t_n)\}$

定理 2.4.　(C1)，(C2) を仮定し，X は回帰的で Opial 条件を満たすとする。u を (E) の一般解とする。もし $A^{-1}0 \neq \phi$　かつ　$\lim_{t\to\infty} \| u(t+h) - u(t) \| = 0$，$\forall h > 0$，ならば，$w\text{-}\lim_{t\to\infty} u(t) = \xi \in A^{-1}0$

定理 2.5.　(C1)，(C2) を仮定し，X は回帰的で weakly sequentially continuous duality mapping をもつとする。u を (E) の一般解とする。このとき，次の条件 (d) は上の (a)−(c) と互いに同値である。

(d)　$A^{-1}0 \neq \phi$　かつ　$w\text{-}\lim_{t\to\infty}\{u(t+h) - u(t)\} = 0$，$\forall h>0$.

2.2.　強漸近挙動

(C1)，(C2) に加えて次の条件をおく。

(C3) $G: C([0,\infty);X)\cap L^\infty(0,\infty;X) \to L^\infty(0,\infty;X)$

(C4) $\forall M>0$ に対して

$$\lim_{h\to 0+}\int_0^\infty \|G(v)(t+h)-G(v(\cdot+h))(t)\|dt=0$$

が $v\in C([0,\infty);X)\cap L^\infty(0,\infty;X)$, $\|v\|_{L^\infty(0,\infty;X)}\leqq M$

について一様に成り立つ。

(ここで, $v(\cdot+h)$ は v の translation を表わす。)

<u>定理 2.6.</u> (C1)-(C4) を仮定し, ある $\lambda_0>0$ に対して, レゾルベント $(I+\lambda_0 A)^{-1}$ は compact とする。u を (E) の一般解とするとき, 次は互いに同値である。

(a)′ $\lim_{t\to\infty} u(t)$ が存在する。

(b)′ $\lim_{t\to\infty} u(t)$ が存在して $A^{-1}0$ の元である。

(c)′ $A^{-1}0\neq\phi$ かつ $\omega(u)\subset A^{-1}0$

(d)′ $A^{-1}0\neq\phi$ かつ $\lim_{t\to\infty}\|u(t+h)-u(t)\|=0$, $\forall h>0$

ここで, $\omega(u)=\{\xi\in X;\ \exists t_n\uparrow\infty,\ \lim_n u(t_n)=\xi\}$.

§3. (V) に対する漸近挙動, その I

次の条件の下で, (V) の一般解の漸近挙動を調べる。Baillon & Clément [1] は Hilbert 空間において同じ条件の下で (V) の漸近挙動を研究している。

(H1) $b\in AC_{loc}[0,\infty)$, $b(0)>0$, $b'\in BV_{loc}[0,\infty)$

(H2) $g\in W^{1,1}_{loc}(0,\infty;X)$, $g'\in L^1(0,\infty;X)$, $g(0)\in\overline{D(A)}$

(H3) $k \in L^1(0,\infty)$, 非負非増加

ここで, k は (1.1) で定義された関数である。(H3) は b が "completely positive" かつ $b(\infty) > 0$ と同値である。([4])

定義 3.1. $f(t)$, G, u_0 を (1.1)-(1.4) で定義されたものとする。このとき, u が (E) の一般解 (または強解) のとき, u は (V) の一般解 (または強解) と呼ぶ。

さて, (1.1)-(1.4) で定義された $f(t)$, G, u_0 に対して2章の (C1)-(C4) が満たされることを見る。先づ, (C2), (C3) は明らかである。(C1) は次の補題から従う。

補題 3.1.

$$[G(v)(t),\ v(t)]_+ \geq \frac{d}{dt}(k * \|v\|(t)) \quad a.e.t,\quad v \in W^{1,1}_{loc}(0,\infty;X)$$

証明. $\pi:\ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ を $[0,t]$ の分割で, $t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k$, $|\pi| = \max_k (t_k - t_{k-1})$ とする。$[\cdot,\cdot]_+$ は上に半連続であるから, $v \in W^{1,1}_{loc}(0,\infty;X)$ に対して

$$\begin{aligned}
&[G(v)(t),\ v(t)]_+ \\
&\geq \limsup_{|\pi|\to 0}\ [k(0)v(t) + \sum_k v(t-\tau_k)(k(t_k) - k(t_{k-1})),\ v(t)]_+ \\
&\geq k(0)\|v(t)\| - \lim_{|\pi|\to 0} \sum_k \|v(t-\tau_k)\|\,|k(t_k) - k(t_{k-1})| \\
&= k(0)\|v(t)\| + \int_0^t \|v(t-s)\|\,dk(s) = \frac{d}{dt}(k * \|v\|(t))
\end{aligned}$$

(証終)

次に, (C4) を示すため, $\Delta_h(v)(t) = G(v)(t+h) - G(v(\cdot+h))(t)$ とおくと

$$\Delta_h(v)(t) = \int_t^{t+h} v(t+h-s)\,dk(s)$$

であるから

$$\int_0^\infty \|\Delta_h(v)(t)\|dt \leq \|v\|_{L^\infty}\int_0^\infty (k(t)-k(t+h))dt \leq \|v\|_{L^\infty} k(0)h$$

これより (C4) が成り立つ。したがって，2章の結果より次の定理を得る。

<u>定理 3.2.</u>　(H1)-(H3) を仮定し，X は回帰的で Opial 条件を満たすとする。このとき，(V) の一般解 u に対して定理 2.3，2.4 の結論が成り立つ。

<u>定理 3.3.</u>　(H1)-(H3) を仮定し，X は回帰的で weakly sequentially continuous duality mapping をもつとする。このとき，(V) の一般解 u に対して，定理 2.5 の結論が成り立つ。

<u>定理 3.4.</u>　(H1)-(H3) を仮定し，ある $\lambda_0 > 0$ に対して，レゾルベント $(I+\lambda_0 A)^{-1}$ は compact とする。このとき，(V) の一般解 u に対して，定理 2.6 の結論が成り立つ。

§4.　(V) に対する漸近挙動，その II

この章では，平野 [6] の Hilbert 空間での結果を一様凸 Banach 空間へ拡張する。次の仮定をおく。

(4.1)　A は一価，strictly m-accretive

(4.2)　$k \in AC_{loc}[0,\infty)$，$k(0) > 0$，$k' \in BV_{loc}[0,\infty)$

(4.3)　$k' \in L^1(0,\infty) \cap L^{p'}(0,\infty)$，$1/p + 1/p' = 1$，$p \geq 1$

(4.4) $b \in L^{\infty}(0,\infty)$

(4.5) $g \in W^{1,1}_{loc}(0,\infty;X)$

(4.6) $g(0) \in D(A)$, $g' \in BV_{loc}(0,\infty;X)$

(4.7) $\exists z_0 \in X$ s.t. $\lim_{t\to\infty} \int_0^h \| f'(t+\tau) - z_0 \| d\tau = 0$, $\forall h > 0$

(4.2), (4.5), (4.6) を仮定するとき，もし $f(t)$ が (1.2) によって定義されているならば $f(t) \in BV_{loc}(0,\infty;X)$ であり，そして，(1.3) によって定義された G は (2.5) を満たす。したがって，定理 2.2 より X が回帰的ならば (V) は一意な強解をもつ。

<u>定理 4.1.</u> X を一様凸 Banach 空間とし，(4.1)-(4.7) を仮定する。u を (V) の強解とし，次を仮定する。

(4.8) $\sup_{t\geq 0} \| u(t) \| < \infty$

(4.9) $\exists w_0 \in X$ s.t. $Au(\cdot) - w_0 \in L^p(0,\infty;X)$

(4.10) $b(0)^{-1}\left(z_0 - \left(\int_0^{\infty} b'(s)ds\right) w_0\right) \in R(A)$

このとき，$\frac{1}{t}\int_0^t u(s+h)\,ds$ は $t\to\infty$ のとき，$A^{-1}(z_0 - (\int_0^{\infty} b'(s)ds) w_0)$ の元に $h>0$ について一様に弱収束する。

証明では，一般性を失うことなく $b(0)=1$ と仮定する。
u は (V) の強解であるから

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) + \left(\int_0^{\infty} b'(s)ds\right) w_0 - z_0$$
$$= g'(t) - z_0 - \int_0^t b'(t-s)(Au(s) - w_0)ds + \left(\int_t^{\infty} b'(s)ds\right) w_0$$

ここで

$$Bv = Av + \left(\int_0^\infty b'(s)ds\right)w_0 - z_0, \quad v \in D(B) = D(A)$$

とおくと，(4.1), (4.10) より B は strictly m-accretive，$B^{-1}0 \neq \phi$ である。$\{T(t)\,;\, t \geqq 0\}$ を $-B$ より生成される非線形縮小半群とする。

補題 4.2. $\lim_{t\to\infty} \|u(t+h) - T(h)u(t)\| = 0, \quad \forall h > 0$

証明　integral solution の性質から

$$\begin{aligned}
&\|u(t+h) - T(h)u(t)\| \\
&\leqq \int_0^h \|g'(t+\xi) - z_0 - b'*(Au-w_0)(t+\xi) + \left(\int_{t+\xi}^\infty b'(s)ds\right)w_0\|ds \\
&\leqq \int_0^h \|g'(t+\xi) - z_0\|d\xi + \int_0^h \|b'*(Au-w_0)(t+\xi)\|d\xi \\
&\quad + \int_0^h \left\{\int_{t+\xi}^\infty |b'(s)|ds\, d\xi\right\}\|w_0\| \\
&= I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

ところで，(4.7) より $\lim_{t\to\infty} I_1 = 0$．(4.3) より $I_3 \leqq h\|w_0\|\int_t^\infty |b'(s)|ds \to 0 \quad (t\to\infty)$，そして，(4.3), (4.9) より

$$\|b'*(Au-w_0)\|_{L^p} \leqq \|b'\|_{L^1}\|Au-w_0\|_{L^p} < \infty$$

であるから

$$\begin{aligned}
I_2 &\leqq h^{1/p'}\left(\int_0^h \|b'*(Au-w_0)(t+\xi)\|^p d\xi\right)^{1/p} \\
&= h^{1/p'}\left(\int_t^{t+h} \|b'*(Au-w_0)(\xi)\|^p d\xi\right)^{1/p} \underset{t\to\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

（証終）

補題 4.3. u は asymptotically uniformly

continuous である。i.e., $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\exists \rho > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t. $\| u(t) - u(s) \| < \varepsilon$ for $s, t > \rho$, $|s-t| < \delta$.

<u>証明</u>　先づ, 次式が成り立つことに注意しておく。

$$
\begin{aligned}
&u(t+s) - u(t) \\
&= f(t+s) - f(t) - \int_0^t (b(t+s-\tau) - b(t-\tau))(Au(\tau) - w_0)\,d\tau \\
&\quad - \int_t^{t+s} b(t+s-\tau)(Au(\tau) - w_0)\,d\tau - \int_t^{t+s} b(\tau) w_0\,d\tau
\end{aligned}
$$

ところで,

$$f(t+s) - f(t) = \int_0^s f'(t+\tau)\,d\tau = \int_0^s \{f'(t+\tau) - z_0\}\,d\tau + s z_0$$

であるから (4.7) より

(4.11)　$\displaystyle \lim_{t\to\infty} \{f(t+s) - f(t)\} = s z_0$,　$s \in [0,1]$ で一様収束

また, (4.3) より $b(\infty) = \lim_{t\to\infty} b(t)$ は存在するから

(4.12)　$\displaystyle \lim_{t\to\infty} \int_t^{t+s} b(\tau) w_0\,d\tau = s\, b(\infty) w_0$, $s \in [0,1]$ で一様収束

そして,

(4.13)
$$
\begin{aligned}
&\left\| \int_t^{t+s} b(t+s-\tau)(Au(\tau) - w_0)\,d\tau \right\| \\
&\leq \|b\|_{L^\infty} \int_t^{t+s} \|Au(\tau) - w_0\|\,d\tau \\
&\leq \|b\|_{L^\infty}\, s^{1/p'} \|Au - w_0\|_{L^p} .
\end{aligned}
$$

さらに,

$$
\begin{aligned}
&\left\| \int_0^t (b(t+s-\tau) - b(t-\tau))(Au(\tau) - w_0)\,d\tau \right\| \\
&\leq \|b(\cdot+s) - b\|_{L^{p'}} \|Au - w_0\|_{L^p}
\end{aligned}
$$

ところが,

$$\|b(\cdot+s) - b\|_{L^{p'}}^{p'} = \int_0^\infty |b(t+s) - b(t)|^{p'}\,dt$$

$$= \int_0^\infty \left| \int_0^s b'(t+\tau)\,d\tau \right|^{p'} dt \leq s^{p'/p} \int_0^\infty \left\{ \int_0^s |b'(t+\tau)|^{p'} d\tau \right\} dt$$
$$= s^{p'/p} \int_0^s \left\{ \int_0^\infty |b'(t+\tau)|^{p'} dt \right\} d\tau$$
$$\leq s^{p'/p+1} \|b'\|_{L^{p'}}^{p'} = s^{p'} \|b'\|_{L^{p'}}^{p'}$$

であるから

$$(4.14) \qquad \left\| \int_0^t (b(t+s-\tau) - b(t-\tau))(Au(\tau) - w_0)\,d\tau \right\|$$
$$\leq s \|b'\|_{L^{p'}} \|Au - w_0\|_{L^p}$$

したがって，(4.11)－(4.14) と最初に注意した等式を合せると u は asymptotically uniformly continuous であることが分る。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証終）

<u>補題 4.4.</u>（[2, Lemma 1]）X を一様凸 Banach 空間とし，$u \in L^\infty(0,\infty;X) \cap L^1_{loc}(0,\infty;X)$ は次を満たすとする。

(i) u は asymptotically uniformly continuous である。

(ii) $\lim_{t\to\infty} \|u(t+h) - T(h)u(t)\| = 0, \quad \forall h > 0.$

このとき，$\frac{1}{T_n}\int_{a_n}^{a_n+T_n} u(t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \zeta$ ならば，$\zeta \in B^{-1}0$ である。但し $\{a_n\}, \{T_n\}$ は $a_n \uparrow \infty$, $T_n \uparrow \infty$ なる数列

<u>定理 4.1 の証明</u>　　B は strictly accretive であるから $B^{-1}0 = \{\zeta\}$ (singleton) である。$T_n \uparrow \infty$, $a_n \uparrow \infty$ を任意にとる。補題 4.2－4.4 より $\frac{1}{T_{n_k}}\int_0^{T_{n_k}} u(s+a_{n_k})\,ds \to \zeta$ である部分列 $\{n_k\}$ がとれる。ここで，(4.8) を用いた。

したがって，$\frac{1}{t}\int_0^t u(s+h)ds$ は $t\to\infty$ のときうに h について一様に弱収束する。（証終）

§5. 例.

メモリーをもった物質からなる長さ1の棒における非線形熱方程式は，$Au=-a(u_x)_x$ の型の作用素 A をもったVolterra 方程式に書き表される。（[3]を見よ。）いま，

(5.1) $\quad a\in C^1(\mathbb{R}),\ a'(x)>0 \ \text{for}\ x\in\mathbb{R},\ a(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

を仮定する。このとき，Neumann 境界条件を持った作用素 A_p，$1\leq p\leq\infty$ を次のように定義する。

$$D(A_\infty)=\{u\in C^2[0,1]\ ;\ u_x(0)=u_x(1)=0\}$$

$$A_\infty u=-a(u_x)_x \quad \text{for}\ u\in D(A_\infty)$$

$1\leq p<\infty$ に対して

$$A_p = A_\infty \text{ の } L^p(0,1) \text{ での閉包}$$

すると A_∞ は $C[0,1]$ で，A_p，$1\leq p<\infty$，は $L^p(0,1)$ で m-accretive となる。また，レゾルベント $(I+A_\infty)^{-1}$ は $C[0,1]$ で compact となる。したがって，3章の結果を用いることができる。なお，Dirichlet 境界条件 $u(0)=u(1)=0$ をもつ作用素の場合は，Poincaré の不等式より $A_p-\omega I$ が accretive いわゆる strongly accretive となるので，漸近挙動は扱いやすくなる。（ω は正数）

References

1. J.-B. Baillon & P. Clément, Ergodic theorems for non-linear Volterra equations in Hilbert space, Nonlinear Analysis, 5 (1981), 789-801.

2. R. E. Bruck & G. B. Passty, Almost convergence of the infinite product of resolvent in Banach spaces, Nonlinear Analysis, 3 (1979), 279-282.

3. Ph. Clément, R. C. MacCamy & J. A. Nohel, Asymptotic properties of solutions of nonlinear abstract Voltera equations, J. Integral Eq. 3 (1981), 185-216.

4. Ph. Clément & J. A. Nohel, Asymptotic behavior of solutions of nonlinear Volterra equations with completely positive kernels, SIAM J. Math. Anal. 12 (1981), 514-535.

5. M. G. Crandall & J. A. Nohel, An abstract functional differential equations and a related nonlinear Volterra equation, Israel J. Math. 29 (1978), 313-328

6. N. Hirano, Asymptotic behavior of solutions of nonlinear Volterra equations, J. Diff. Eq. 47 (1983), 163-179.

7. N. Kato, K. Kobayasi & I. Miyadera, On the asymptotic behavior of solutions of evolution equations associated with nonlinear Volterra equations, preprint