数理解析研究所講究録
541 巻 1984 年 73-85

Hilbert 空間における時間に関して二階のある微分方程式について

姫路工業大学
丸尾健二 (Kenji-Maruo)

0.序　H は実 Hilbert 空間として A は正定値自己共役作用素とする。 ϕ は H から $(-\infty, \infty]$ への下半連続な凸関数とし $\partial\phi$ は ϕ の劣微分とする。 今次の方程式を考える。

$$(0.1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} + Au + \partial\phi u \ni f(\cdot, u) & \\ u(0) = a, \quad \dfrac{du}{dt}(0) = b & \text{on } [0, T] \end{cases}$$

ここで T は任意の正の実数である。

上の方程式は Brezis [1] により open problem として提出され Schatzman [2], [3] によって ϕ が H の中の半空間 K の indicator function (ie $\phi(x) = I_K(x) = \begin{cases} 0 & x \in K \\ \infty & x \notin K \end{cases}$) の場合 又 H が有限次元の時に解の存在や一意性の是非について それぞれ研究している。 その後 Schatzman [4] は 本質的に $H = L_2(0,1)$ のとき $\phi(x) = I_K(x)$ で K は

$\{ f \in H;\ f(x) \geqq \varphi(x)\ \text{a.e}\ x \in [0,1] \}$ の場合に locally energy conservation solution という概念の解を提示し 解の存在と一意性を 具体的な計算をなす事により示している。

本稿においては 上記の仮定を含みかつ Jörgens [5] の方程式をも含みうる仮定のもと 解の存在について主に議論する。 又一意性については 以前数理研で発表させていただいた (1982年 スペクトル散乱理論 464) 仮定の下での いわゆる $\{t_i\}$-energy conserving solution の一意性とほぼ同じ結果なので 簡単に述べさせていただく。

さて記号として S を Banach 空間としたとき その norm を $|\cdot|_S$ と書き H の内積を $(\ ,\ )$ によって表わし S と dual space S^* の paring を同じく $(\ ,\ )$ によって表わす。
A の ½ 分数巾を $A^{\frac12}$ で表わし その Domain にグラフ norm を入れた空間を V とする。 次に $\partial\phi_\lambda$, ϕ_λ は $\partial\phi$, ϕ の 吉田近似とする。

さて方程式 (0,1) の解の存在を示す為に 吉田近似の方程式

$$(0,2)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u_\lambda}{dt^2} + Au_\lambda + \partial\phi_\lambda u_\lambda = f \\ u_\lambda(0) = a, \quad \dfrac{d^2u_\lambda}{dt^2}(0) = b \end{cases}$$

を考る。 次の section で 解の定義 仮定 定理 を示し Section 2. で (0,2) の方程式の解の諸性質を調べ Section 3 で (0,2) の 解の収束を示し解の存在を言う。 Section 4 で

$\{t_i\}$-energy conserving solution について簡単に述べ多少の注意を言う。Section 5 で例を示そう。

1. 解の定義と仮定と定理

まず仮定を述べよう。X_1, X_2 は実 Banach space とする。

仮定 1。$V \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow H \hookrightarrow X_2$（代数的かつ位相的に埋め込まれている。）$V \hookrightarrow X_1$ は compact の埋め込み X_1 は可分で $X_2 \subset \{\text{dual space of } X_1\}$.

仮定 2。ある $z \in V$ で次の不等式を満すものがある。

$$(\partial\phi_\lambda x,\ x-z) \geq C_1|\partial\phi_\lambda x|_{X_2} - C_2 \quad \text{for any } x \in V$$

ここで C_1, C_2 は $|x|_V$, $|\phi_\lambda(x)|$, z にのみ関係する正の数。

仮定 3。$f \in W^{1,2}([0,T];H)$

次に解の定義を述べよう。

定義 1　$u \in C([0,T];X_1) \cap W^{1,\infty}([0,\infty];H)$ が (0,1) の解とは次の条件を満すものを言う。

1）任意の $t \in [0,T]$ で $u(t) \in D(\phi) = \{x \in H ; |\phi(x)| < \infty\} \cap V$.

2). 右, 左の弱微分がすべての $t \in [0,T]$ で存在して

$$\left|\frac{d^{\pm}}{dt}u(t)\right|_H^2 + |u(t)|_V^2 + 2\,\phi(u(t))$$
$$\leqq |b|^2 + |a|_V^2 + 2\,\phi(a) + 2\int_0^t (f(s), u'(s))\,ds.$$

($t=0$, と T では存在するもののみ)。

3). $C([0,T];X_1)$ 上の線型汎関数 F が存在して次の性質を満している。

イ) $F(v-u) \leqq \int_0^T \phi(v(s))\,ds - \int_0^T \phi(u(s))\,ds$

for any $v \in C([0,T];X_1)$.

ロ)

$$\int_0^T (u'(s), v'(s))\,ds + \int_0^T (f(s) - Au(s), v(s))\,ds + (b, v(0)) - \left(\frac{d^-}{dt}u(T), v(T)\right) = F(v)$$

for any $v \in C([0,T];X_1) \cap L^1(0,T;V) \cap W^{1,\infty}(0,T;H)$.

4) $u(0)=a$, $b - \frac{d}{dt}u(0) \in \partial I_{K_0} a$

ここで K_0 は $D(\phi)$ の閉包で I_{K_0} は K_0 上の indicator function

このとき次の定理を得る。

定理 1. $a \in V \cap D(\phi)$ で $b \in H$ とします。仮定 1~3 のもと解を得る。

一意性を調べる為に次の仮定を入れよう。

仮定4．KをHでの内点をもつ閉凸集合とする。Kの境界の滑らかさは境界の各点における長さ1の外法線がLipschitz連続になっているとする。ここで $\phi(x)=I_K(x)$．とする。$X_1=X_2=H$とする

定理2．$a\in K\cap V$, $b\in H$としよう 仮定1,3,4のもとに{ti}-energy conserving solution (数理研講究録 464, 61-69)が一意に存在する。

注意 今 $\partial\phi$が一価であり $\forall u, v\in V$に対して
$|\partial\phi u-\partial\phi v|_H \leqq C\,|u-v|_H$ が成立しているとする。但し
Cは $|u|_V$, $|v|_V$ $\phi(u)$, $\phi(v)$ にのみdependする数とする。
上記の講究録中(3.6)の式を満すuをmild solutionという。
今mild solution (3.6)式の右辺第三項中 $\gamma(c(\omega))d\varphi_u$ を $\partial\phi u\,ds$ に置きかえたものも又mild solutionという事にする。仮定1, 2, 3, かつ上記の仮定があれば一意性がでてくる。

2)．吉田近似の解の性質

(0, 2)の解について次の諸予備定理を得る。

予備定理 2.1．

次の等式，不等式を得る。

イ) $$\left|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\right|_H^2 + |u_\lambda(t)|_V^2 + 2\phi_\lambda(u_\lambda(t)) = |b|^2 + |a|_V^2 + 2\phi_\lambda(a) + 2\int_0^t (f(s), u'(s))\,ds$$

ロ) $$\left|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\right|_H^2 + |u_\lambda(t)|_V^2 + |\phi_\lambda(u_\lambda(t))| \leqq \text{Constant}$$

ここで Constant は λ に無関係な正の数.

証明 (0, 2) に $\frac{d}{dt}u_\lambda(t)$ を積して 0 から t まで積分し部分積分を使用すれば イ) イ)に Growall の不等式を使用すれば ロ) が得られる。

予備定理 2.2

$$\int_0^T |\partial\phi_\lambda u_\lambda(s)|_{X_2}\,ds \leqq \text{Constant}$$

ここで Constant は λ に無関係。

証明 仮定 2 を使用し 仮定 2 の不等号の左辺中 $\partial\phi_\lambda u_\lambda(s)$ のかわりに $-(u_\lambda'' + Au_\lambda - f)$ を代入して 0 から T まで積分し部分積分と 予備定理 2.1 の ロ) から証明できる.

予備定理 2.3

吉田近似の解の集合 $\{u_\lambda(t)\}$ は $\lambda_j \to 0$ となる様な部分列で $u_{\lambda_j}(t)$ は X_1 で一様収束するものが存在する

証明　予備定理 2.1 のロ) と仮定 1 と Ascoli-Arzela の定理を使用すれば $u_{\lambda_j}(t) \longrightarrow u(t)$ 一様収束 in H がわかる．今 $|u_{\lambda_j}|_V \leqq \mathrm{Const}$ より $u(t) \in V$ となる．故に $u(t) \in X_1$ である。まず $u(t) \in C([0,T]:X_1)$ を示そう。今 $\exists \{t_i\}_{i=1}^{\infty} \subset [0,T]$ で ($t_i \to t_0$ となるもの) $\varliminf_{i\to\infty} |u(t_i)-u(t_0)|_{X_1} \geq \delta_0 > 0$ としよう。$|u(t_i)|_V \leq \mathrm{Const}$ より $u(t_{i_j}) \longrightarrow w$ in X_1 (仮定 1 より)

一方 $u(t_{i_j}) \to u(t_0)$ in H より $u(t_0) = w$ が得られる。故に矛盾するので $u \in C([0,T]:X_1)$．さて $u_{\lambda_j}(t)$ は $u(t)$ に H で収束と上記と同様な方法を使用すれば $u_{\lambda_j}(t)$ は $u(t)$ に X_1 で収束がわかり．一様収束も $u_{\lambda_j}(t) \to u(t)$．各点収束と $u(t)$ が連続よりわかる。

以後簡単の為部分列 $\{\lambda_j\}$ も $\{\lambda\}$ で表わす．

予備定理 2.4

イ) $\{\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\}$ は weak $L^2(0,T;H)$ で収束する部分列をもつ。

ロ) $\int_0^t (\partial\phi_\lambda u_\lambda(s), v(s))\,ds = F_{\lambda,t}(v)$ とすれば any $v \in C([0,T]:X_1)$ と any $t \in [0,T]$ に対して $F_{\lambda_j,t}(v)$ は収束する様な部分列をもつ．この極限を $F_t(v)$ と書く

証明．イ) は予備定理 2.1 のロ) より明らか。

ロ) については $v(s) \equiv \alpha \in X_1$ に対して $|F_{\lambda,t}(\alpha)| \leqq \mathrm{Const}$

より収束する部分列がある。故に X_1 は可分と対角線論法を使用して $^\forall\alpha\in X_1$ で $F_{\lambda_j}(\alpha)$ の収束がわかる。又 $v(s)\in C([0,T];X_1)$ は階段関数で近似する事と上記の収束を使用してこの予備定理を得る。

3. 定理1の証明

予備定理 3.1

F_t は $C([0,T];X_1)$ 上の線型汎関数である。かつ F_t の operator norm での総変動量 (on $[0,T]$) は有界である。

証明. 前半は自明である。後半は

$$|F_t(v)-F_s(v)| = \lim_{\lambda\to 0}|F_{\lambda,t}(v)-F_{\lambda,s}(v)|$$
$$\leqq \overline{\lim_{\lambda\to 0}}\int_s^t |\partial\phi_\lambda u_\lambda(s)|_{X_2}ds\cdot\sup_{0\le t\le T}|v(t)|_{X_1}.$$

と予備定理 2.2 より証明できる。

予備定理 3.2

$\frac{d^{\pm}}{dt}u(t)$ が weak の意味で存在する。(0とTは存在する方のみ)

証明 (0,2) の式に任意の $\alpha\in V$ を積して部分積分をすると

$$(3.1)\quad \left(\frac{d}{dt}u_\lambda(t),\alpha\right) = (b,\alpha) + \int_0^t (f-Au_\lambda(s),\alpha)ds + F_{\lambda,t}(\alpha).$$

右辺は すべて収束する。又 $\frac{du_\lambda}{dt}(t)$ はHで有界と V のHでのdense性より すべての t で収束する。今 $\frac{d}{dt}u \in L_2(0,T;H)$ より

$Y_0 = \{ t \in [0,T]\ ;\ \lim_{\lambda \to 0} \frac{d}{dt} u_\lambda(t) = \frac{d}{dt} u(t) \}$ とおく。

Y_0 上で $^\forall \alpha \in V$ に対し、(3,1) で $\lambda \to 0$ とし 予備定理 3.1 より

$(\frac{d}{dt} u(t), \alpha)$ は総変動量有界がわかる。

$\frac{d}{dt}u(t)$ のHでの有界性を考えると $^\forall \alpha \in H$ で $(\frac{d}{dt}u(t), \alpha)$ の総変動有界がでる。故に weak の意味ですべての $t \in [0,T]$ に対し $\frac{d^+}{dt}u(t)$ が存在する。

予備定理 3.3.

$$F(v-u) \leq \int_0^T \{\phi(v(s)) - \phi(u(s))\} ds \quad \text{for any } v \in C([0,T];X_1)$$

但し $F(v) = \lim_{t \to T} F_t(v)$ の事である。

証明. $\lim_{\lambda \to 0} \phi_\lambda(u_\lambda(t)) \geq \phi(u(t))$, $\lim_{\lambda \to 0} \phi_\lambda(v) = \phi(v)$ と ϕ_λ の定義より自明.

予備定理 3.4

$u(0) = a$, $\quad b - \frac{d^+}{dt} u(0) \in \partial I_{K_0} a$ とみたす.

証明. 前半は自明. 後半は $^\forall v \in D(\phi) \cap V$ に対して

(0.2) に $v-u(t)$ を積して $\lambda\to 0$ とすれば $t\in Y_0$ で

$$\left(\frac{d}{dt}u(t),\, v-u(t)\right) - (b,\, v-a) = \int_0^t (f(s)-Au(s),\, v-u(s))\,ds - \int_0^t |u'(s)|_H^2\,ds - F_t(v-u)$$

となる。

右辺の一項と二項は $t\to 0$ で 0にゆく。又 $F_t(v-u) \le \int_0^t (\phi(v)-\phi(u))\,ds \to 0$ as $t\to 0$ となる。

故に $\left(b-\frac{d^+}{dt}u(0),\, v-a\right) \le 0$ と V の dense 性より証明できる。

定理1の証明に入ろう。解の定義中 1) は 予備定理 2.1 の ロ) と 2.3 よりでてくる。 2) は 予備定理 2.1 の イ) と 予備定理 2.3 と (3.1)の収束を考えると不等式が又右左弱微分の存在は予備定理 3.2 よりでてくる。
3) は 予備定理 3.3 と (0.2) に $v\in C([0,T];V)\cap W^{1,\infty}(0,T;H)$ を積して部分積分をした式と予備定理 2.3, 2.4 よりわかる。4) は予備定理 3.4 による。故に証明終り

4. 一意性について.

定理2の証明については講究録 464 61-69 を見ていただきたい。注意については注意中の仮定と予備定理 2.1 のロ)とにより $|\partial\phi_\lambda(u_\lambda(t))|_H \le Const$ がわかり上記の講究録中と同じ様な方法より mild solution の存在がわかる。

一意性については mild solution が2つあるとして 差をとり 注意中の仮定を使用し Growall の不等式をもちいて矛盾が出る。 mild solution は $\{f_i\}$- energy conserving solution なので 今の場合 $\{f_i\}$- energy conserving solution は $\{f_i\}$ の取り方によらず一意である事は自明の事である。

5. 例

以後 $\Omega \subset R^n$ として 有界な領域とする。$\partial\Omega$は滑か。

$L_2(\Omega) = H \quad A = -\Delta$ (Dirichet 問題)とする。

1.) $\phi(u) = \int_\Omega |u(x)|^p u(x)\,dx$ とすると $\partial\phi u = (p+1)|u|^{p-1}u$ となる。今 $X_1 = C(\Omega)$, $X_2 = L_1(\Omega)$ とする。

今 $(n+1) > p(n-2)$ なれば 仮定1を満す。今 $\partial\phi_\lambda f = (p+1)|\omega_\lambda|^{p-1} \cdot \omega_\lambda$ ここで $\omega_\lambda = (1+\lambda\partial\phi)^{-1} f$。 $\forall x \in \Omega$ で $\omega_\lambda(x)\cdot f(x) \geqq 0$ $|\omega_\lambda(x)| \leqq |f(x)|$ より $|\omega_\lambda^p(x)| - 1 \leqq |\omega_\lambda(x)|^{p+1} \leqq |\omega_\lambda(x)|^{p-1}\omega_\lambda(x)\cdot f(x)$ がでるので Ωで積分すれば仮定2が出る。

2.) $K = \{f \in L_2(\Omega) /\ f(x) \geqq \theta(x)\ a.e\, x \in \Omega\}$ 但し $\theta \in C^1(\Omega)$ かつ $\theta(x) < 0$ on $\partial\Omega$。 $I_K(f) = \phi(f)$とおくと $z_0 \in C^1(\Omega)$ とし $z_0(x) = 0$ on $\partial\Omega$, $|\theta(x) - z_0(x)| > \delta_0 > 0$ としよう。

仮定2については $\partial\phi_\lambda(f)(x)=\frac{1}{\lambda}(f-\mathrm{Proj}_K f)(x)$ より

$f(x)>\theta(x)$ なら $\partial\phi_\lambda(f)(x)=0$ $f(x)\leq\theta(x)$ なら $f(x)-z_0(x)$ $\leq-\delta_0$ となっているので $(\partial\phi_\lambda f(x)\cdot(f(x)-z_0(x))\geq\delta_0\,\partial\phi_\lambda f(x)$ を得 Ω で積分すれば仮定2がなりたつ。

仮定1を成立させる為 $X_1=C(\Omega)$, $X_2=L_1(\Omega)$ として $n=1$ としなければならない。

注意中の仮定は例1の時成立している。故に例1は一意性がなりたつ。

文献

[1] H. Brezis: Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear part. diff. equations Contributions to Nonlinear Functional Analysis E. Zarantonello (editor), Acad. Press (1971). 101–179

[2] M. Schatzman: Sur une classe de problems hyperboliques nonlinears, C. R. Acad. Paris, t. 277 (1973), A 671 – A 674

[3] M. Schatzman: A class of nonlinear differential

equations of second order in time, nonlinear Analysis, Theorey, method & Appricatións 2 (1978), 355-373.

[4] M. Schatzman : A Hyperbolic Problem of Second Order with unilateral Constraints : The Vilbrating String with a concave obstace; J. Math. Anal. and Appl. 73, 138-191 (1980).

[5] K. Jörgens : Das Anfangswertproblem in Großen für eine Klasse nichtlinear Wellengleichungen, Math. Z. 77, 295-308 (1961).