数理解析研究所講究録
542巻 1985年 174-188

Splitting of Singular Fibers in Good Torus Fibrations

東大理.　上　正明 (Masaaki Ue)

Good Torus Fibration $f: M \longrightarrow B$ は松本[1]により定義された4次元多様体の class で次の性質をもつものである．（B は2次元多様体）

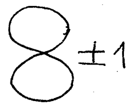
(*) B のある孤立点集合 σ について，$f|f^{-1}(B-\sigma) \longrightarrow B-\sigma$ は T^2-bundle. $\forall x \in \sigma$ $f^{-1}(x)$ の各点．で local に $f \sim z_1^m z_2^n$ or $z_1^m \bar{z}_2^n : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ とかける。このとき $f^{-1}(x)$ (good singular fiber) は互いに横断的に交わる (immersed) surface (divisor) の union として書ける：

$$f^{-1}(x) = \sum_{i=1}^{m} m_i \Theta_i \qquad m_i \in \mathbb{Z}^+.$$

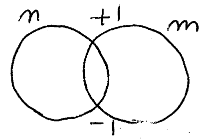
但各 divisor Θ_i には．M から自然に定まる orientation が入る．m_i は各 divisor の multiplicity.

g.c.d $(m_1 \cdots m_n) = 1$ のとき simple, >1 のとき multiple fiber という。Good singular fiber の type は既に[1]により分類されている。特に最も簡単な type は次の通り

$I_1^{\pm}$. 丁度1点自己交叉をもつ immersed S^2 (self intersection number は ± 1) で multiplicity は 1.



$Tw^{(n,m)}$ (Twin) 2点で交わる2つの embedded S^2 intersection number は一方 $+1$, 他方 -1. multiplicity は各 n, m.



Good Torus Fibration の diffeo type を決定することが第1の問題であるが、最初の出発点として次の条件をさらに仮定する。

(1) $B \approx S^2$

(2) multiple fiber なし

以下この(1).(2)を常に仮定する。

この時さらに含まれる singular fiber の type が上記の $I_1^{\pm}$, T_W のみの場合は既に分類されている.

Th.[2][3] $\sigma \neq 0$ のとき. $M \cong \pm$(*elliptic surface over $\mathbb{C}P^1$) $\# \, a S^2 \underset{(\sim)}{\times} S^2$,

$\sigma = 0$ のとき. $\overset{(\sim)}{L_m} \# \, a S^2 \underset{(\sim)}{\times} S^2$.

但. σ は M の signature $S^2 \tilde{\times} S^2$ は non-trivial S^2-bundle over S^2. $\overset{(\sim)}{L_m}$ については[3]参照.

Remark. *multiple fiber のない $\mathbb{C}P^1$ 上の elliptic surface の diffeotype は Kas-Moishezon により euler 数のみで決定されることが知られている. 従って上記の M の diffeotype は euler 数. signature, type w_2 π_1 ($\sigma \neq 0$ なら $\pi_1 = 1$) で完全に決定される。また上記の class は $\mathbb{C}P^1$ 上の楕円曲面を全て含む。

そこで他の good singular fiber をもつ case の diffeo type の決定が次の問題である。ここで $\mathbb{C}P^1$ 上の楕円曲面の diffeo type の Moishezon による決定方法を憶い出してみると、まず minimal な analytic singular fiber はすべて I_1^+ 型 fiber の和に分解可能（特に deformable）であることを示し、I_1^+ type ~~の~~ の singular fiber のみをもつ $\mathbb{C}P^1$ 上の fibration の diffeo type の決定問題に帰着させた。（上記の Th はこれの拡張になっている）。そこでこの case にならって一般の singular fiber (non-analytic) が $I_1^\pm$, Tw 型 fiber の和に分解可能かどうかを考えるのが自然である。もしすべて分解可能ならすべて上の定理に帰着する。ところが実際には分解しえない fiber が存在する。この点が diffeo type を決定する際の第1障害になっている。

定義1 good singular fiber に次の性質をもつ divisor Θ がないとき reduced という。

(i) $|\Theta$ の self-intersection $\#| \leq 1$

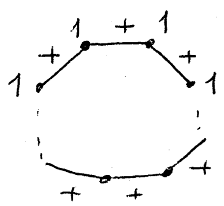
(ii) Θ は他の fibers と高々2点でのみ交わる。

Remark. 上記の Θ があるときはその divisor は blow-down して除去することが可能であり、新たな fiber も good. そして (もとの fiber の regular nhd) $\cong$ (新しい fiber の regular nhd) $\# \pm \mathbb{C}P^2$ $(|\Theta|^2=1)$ or $\# S^2\times S^2$ $(|\Theta^2|=0)$ とかける. ([1] 参照)

そこで以下 reduced な good singular fiber のみ考えれば十分である.

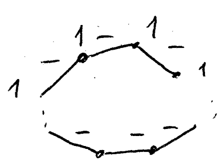
<u>Proposition</u>. reduced good singular (non-multiple) fiber は次の type のものに限る. 但. 下記の diagram は divisor に点, divisor 同志の交わりに線, 点上の数は multiplicity, edge 上の符号は交わりの intersection number を表わす. (通常の dual graph と同じ)

・type $\widetilde{A}_k^+$

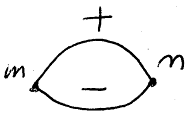


k コの divisor

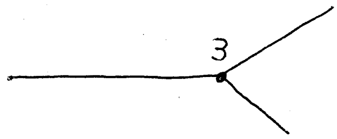
$\widetilde{A}_k^-$



〃

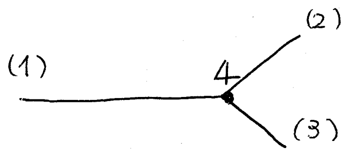
$\mathrm{Twin}^{m.n}$ 

(特に $\widetilde{A}_1^{\pm} = I_1^{\pm}$)

type $\widetilde{E}_6^+$  3つのlinearな枝

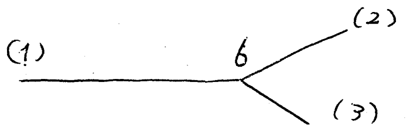
~~各~~は 1 + 2 + 3 or 1 − 3 (但 右端は上のmultiplicity 3のvertexに相当する.

type $\widetilde{E}_6^-$ $\widetilde{E}_6^+$ のedge上のsignの符号を一斉にとりかえたもの.

type $\widetilde{E}_7^+$  3つのlinearな枝

(1)の枝は 2 + 4 又は 2 − 4 (2), (3)の枝は 1 + 2 + 3 + 4 or 1 − 4

type $\widetilde{E}_7^-$ $\widetilde{E}_7^+$ の符号を一斉に取りかえたもの.

type $\widetilde{E}_8^+$ 

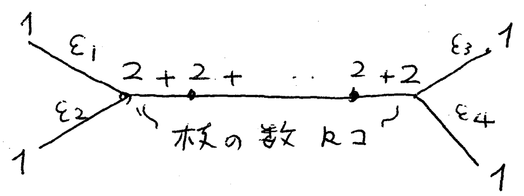
3つの linear branch

(1)の枝は $1+2+3+4+5+6$ 又は $1-6$

(2)の枝は $2+4+6$ 又は $2-6$

(3)の枝は $3+6$ 又は $3-6$

type $\widetilde{E}_8^-$ $\widetilde{E}_8^+$の符号を一斉にかえたもの

type $\widetilde{D}_k^+$ 

$\varepsilon_1 \sim \varepsilon_4$ は $\pm$ を任意にとれる.

type $\widetilde{D}_k^-$ $\widetilde{D}_k^+$の符号を一斉にかえたもの.

証明は [1] の結果と初等計算による.

Remark. 上記のfiber中すべてのedgeの符号が+(−)のとき analytic fiber (即ち Kodairaのfiber [ ] の適当な blow up である. (−のときはorientationをかえたもの — これを anti-analytic fiberと呼ぶことにする.

<u>定義2.</u> singular fiber F（以下その regular nhd も同じ記号で書く）が別の fiber F′（good でなくてもよい）に関して $F \cong F' \# aS^2\times S^2 \# b\mathbb{C}P^2 \# c\overline{\mathbb{C}P^2}$ とかけるとき、F′を(広義の)blow down により F から得られた fiber と呼ぶことにする。

<u>定義3.</u> singular fiber F が(広義の) blow down により $I_1^\pm$, Tw 型 singular fiber のみをもつ D^2上の torus fibering に diffeo になるとき、F を $I_1^\pm$, Tw の和に split すると呼ぶことにする。

我々は reduced good singular fiber が高々2コの $\pm\mathbb{C}P^2$ との連結和をとれば（即ち blow-up する）$I_1^\pm$ の和に split すること、及び blow-up をしなければ split し得ない例があることを示す。（但 Twin は除く）

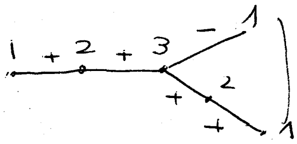
<u>Remark</u> analytic fiber の場合とちがい、non-analytic fiber の場合、単に |self-intersection #| ≦ 1 の divisor を blow down するだけでは stable にも split させら

れない。(即ち直接表にあらわれない embedded S^2 に関する blow-down (上の意味で)をも必要とする。また、analytic fiber については上記の意味で I_1^+ の和に split するだけではなく deformation で移ることが示されている [　]. しかし non-analytic case で deformation を定義しその様相を追跡する事は難しい。しかし都合のよい事に、問題となる fiber の monodromy の関係から、それらの fiber の regular nbd の ∂ の S^1 上の T^2-bundle の構造は unique であり、splitting を通じて torus fibration の一部の fiber 構造をとりかえても fibering は compatible に貼り合うので問題は生じない。唯一問題となるのは $\tilde{A}_n$ 型だけだがこの case は analytic case に帰着され deformation で分解するのでやはり問題ない。

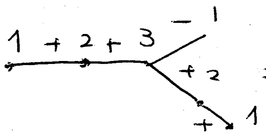
<u>Theorem</u>. 1. good singular fiber は次の様に (stable に) split する。(以下 $\tilde{E}^+$, $\tilde{D}^+$ case のみ示す。(−) case は単にすべての符号をとり換えればよい)。

(I) $\widetilde{E}^+$型 (1) analytic な $\widetilde{E}_6^+$, $\widetilde{E}_7^+$, $\widetilde{E}_8^+$ 型はそれぞれ Kodaira の IV*, III*, II* 型 [1] でそれぞれ $8I_1^+$, $9I_1^+$, $10I_1^+$ と split. (2) ~~non~~ anti analytic $\widetilde{E}_6^+$, $\widetilde{E}_7^+$, $\widetilde{E}_8^+$ は blow down すると IV, III, II 型の符号(orientation)を逆にしたもの(以下 suffix − を付けて表す)でそれぞれ $4I_1^-$, $3I_1^-$, $2I_1^-$ と split.

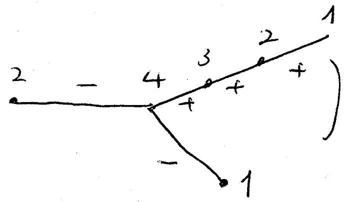
(3) non-analytic $\widetilde{E}_6^+$, $\widetilde{E}_7^+$ $\widetilde{E}_8^+$ は次の例外を除き、それぞれ IV−, III−, II− に split.

例外. $\widetilde{E}_6^+$ (

) $\# \mathbb{C}P^2 \cong \mathrm{IV} \# 4\overline{\mathbb{C}P^2}$



$\# 2\overline{\mathbb{C}P^2} = \mathrm{IV}^* \# \mathbb{C}P^2$

$\widetilde{E}_7^+$ (

) について

$\widetilde{E}_7^+ \# \mathbb{C}P^2 \cong \mathrm{III}_- \# 2\mathbb{C}P^2 \# 3\overline{\mathbb{C}P}^2$,

〃 $\# \overline{\mathbb{C}P^2} = \mathrm{III}_- \# \mathbb{C}P^2 \# 4\overline{\mathbb{C}P}^2$

〃 $\# 4\overline{\mathbb{C}P^2} = \mathrm{III}^* \# 2\mathbb{C}P^2$

III) $\widehat{D}_k^+$ $\overline{\mathbb{C}P^2}$ の copy による blow up ののち．

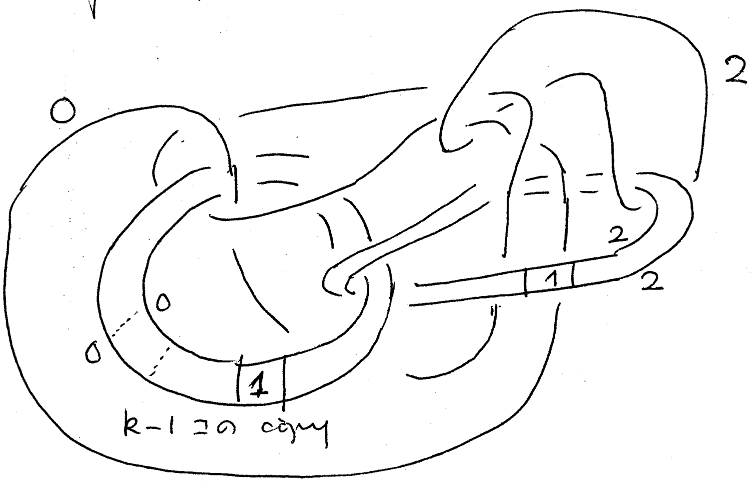
Kodaira の I_k^* 型に split.

又．$\mathbb{C}P^2$ の copy による blow up ののち．

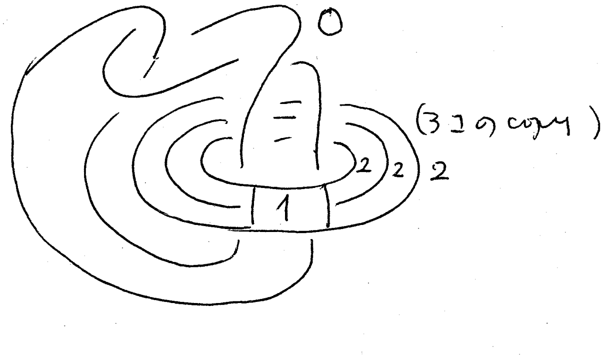
次の本質的に nonanalytic な fibering N_k に移る．

$N_k \cong (k-1)I_1^+ + 5I_1^-$ と分解し．regular nbd は

次の framed link で与えられる



$k \geqq 2$



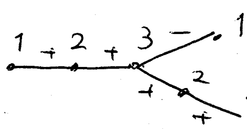
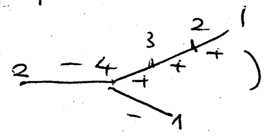
$k = 1$

但. $N_0 \simeq 6 I_1^-$ は I_0^*型と同じである.

Remark. $\tilde{A}_k^+$型は Moishezon の定理 及び [1] の結果に帰着する. Twin は $\mathrm{Twin}^{1,2}$ (分解しない)のみが本質的である [1][2]. すべての case につきより explicit な表示は当然可能だがここでは省略する.

また. Theorem 1 で与えた情報は $\tilde{E}$, $\tilde{D}_k$ for small k については best possible である. (k が大きいときもおそらく正しい) 即ち.

Theorem 1′. Theorem 1 における例外

$\tilde{E}_6^+$ () # $\overline{\mathbb{C}P^2}$, $\tilde{E}_7^+$ ()

は どのように blow-down しても決して $I_1^\pm$, Twin の和に split しない。(証明は Matsumoto の signature function と Th 0 を使った簡単な trick で行なう). □

Theorem 1 の情報から diffeo type の決定可能な good torus fibration over S^2 は沢山存在する.

しかし Theorem 1 からは stable な情報（即ち $\mathbb{C}P^2$ 又は $-\mathbb{C}P^2$ をいくつ connected sum すると diffeo type が決定できるか、）しか得られない例もまた多い。少なくとも次のことはいえる。

Theorem 2. M を good torus fibration over S^2 で multiple fiber なし $\tilde{D}$ 型 singularity なしとする。このとき高々1個の $\mathbb{C}P^2$ 又は $-\mathbb{C}P^2$ を connected-sum すると $\mathbb{C}P^2$ と $-\mathbb{C}P^2$ のいくつかの連結和と diffeo。

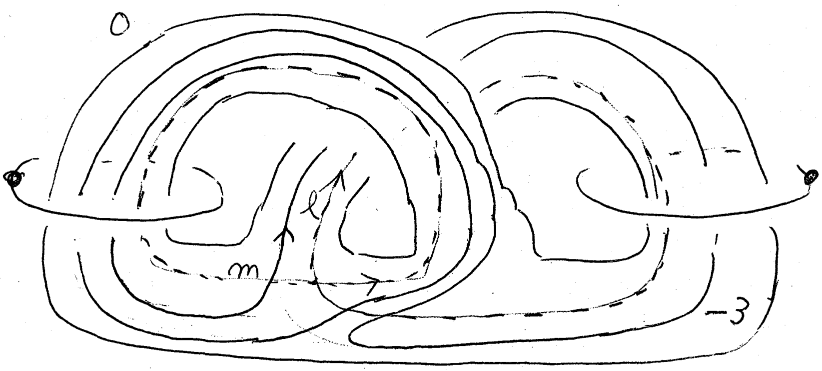
これはそれ自体 split しない singular fiber (Theorem 1′) について Theorem 1 の例外として挙げた2通り以上の stable splitting の情報をつかうことにより Th0 及び Mandelbaum の定理 [ ]

M = elliptic surface over $\mathbb{C}P^1$ without multiple fibers

$\Rightarrow$ $M \# P$ は completely decomposable

に帰着させることによって証明される。$\tilde{D}$ 型 singular fiber をもつ場合にも結果は得られるが今のところあまりきれいな情報は得られない。

Theorem 1 の証明のためには $I_1^{\pm}$ の和 を framed link picture で表わすことが必要である。実際まず $I_1^{\pm}$ を $T^2 \times D^2$ に 1個の 2-handle を attach させた形に表示する (Lefschetz vanishing cycle)。H_1T^2 の標準的 basis (m, l) を fix したとき、$am + bl$ $(\gcd(a, b) = 1)$ なる curve on $T^2 \times 1\,\mathrm{point} \subset T^2 \times \partial D^2$ にそって framing $-ab - \varepsilon$ $(\varepsilon = \pm 1)$ で attach すると $I_1^{\pm}$ が得られる。(即ち 次の picture の通り)



I_1^{+}

$(a, b) = (2, 1)$ の例

$I_1^{\pm}$ の和を表わすときは それぞれの vanishing cycle の attach される circle の homological type とつける順番を与えれば 一意に定まる。即ち 図の手前から奥に向かって順に $a_1 m + b_1 l, a_2 m + b_2 l, \cdots, a_k m + b_k l$ にそって $I_1^{\varepsilon_i}$ に対応する cycle を attach するとき 全体を $((a_1, b_1)_{\varepsilon_1}, (a_2, b_2)_{\varepsilon_2}, \cdots, (a_k, b_k)_{\varepsilon_k})$ と表わすと、

多様体のtypeは一意に定まる。(表示は一意でない。) 実際これをframed link calculusで変形すると

$\mathrm{II} = ((1,0)_+, (0,1)_+, \cancel{(1,0)_+})$, $\mathrm{III} = ((1,0)_+ (0,1)_+ (1,0)_+)$

$\mathrm{I}_0^* = ((1,0)_+, (0,1)_+ (1,0)_+ (0,1)_+ (1,0)_+, (0,1)_+)$, $\mathrm{IV} = ((1,0)_+, (0,1)_+, (1,0)_+, (0,1)_+)$, $N_k = (\overbrace{(1,0)_+, \cdots, (1,0)_+}^{k-1\text{コ}}, (0,1)_-, (1,0)_-, (0,1)_-, (1,0)_-, (0,1)_-)$

が直接証明され、各簡単なframed linkでかける。これらの情報を、各singular fiberの変形でえられるlink pictureと比較することにより定理は示される。

★ diffeo typeの決定でより前進するためには次の様な問題: non-spin elliptic surface over $\mathbb{C}P^1$ は $\mathbb{C}P^2$ と $-\mathbb{C}P^2$ のいくつかのconnected-sumにdiffeoか? にattackするための新しい方法論が必要である様に思える。

Reference [1] Y. Matsumoto: Good Torus fibrations preprint (1982)

[2] 〃 Torus fibrations over the 2-sphere with I_1^* singular fibers. 〃 (1984)

[3] Z. Iwase. Good torus fibrations with twin singular fibers. 〃 (1983)

[4] M. Ue Splitting singular fibers in ⋯ (1984)