数理解析研究所講究録
542巻 1985年 168-173

複素射影平面 $\mathbb{CP}^2$ の直線族から得られる正規軌道曲面の Einstein-Kähler 計量の存在について.

九大・理　加藤十吉 (Mitsuyoshi Kato)

X を非特異 compact 複素曲面, $D=\bigcup_i D_i$ を X の複素曲線で, 各 D_i は非特異であり, D の特異点は正規交叉2重点からなり, $D_i\cap D_j$ $(i\neq j)$ は高々1点からなるとする。

このとき, 各 D_i に自然数 $b_i(\geq 2)$ を指定し,

$$(X,(D,b)\equiv\bigcup(D_i,b_i))$$

のことを正規軌道曲面という。D の特異点の全体を ΣD とする。非特異複素曲面 M と M の自己複素同型群 G で M に真性不連続に作用するものが存在し, G による M の商空間が X と複素同型で, $p: M\longrightarrow X$ をその商写像 (正規分岐被覆) とするとき, M の各点 x で, G の isotropy 群 $G_x=\{g\in G \mid g(x)=x\}$ の位数が

$p(x)\in X-D$ のとき, 1 (G_x が自明),

$p(x)\in D_i-\Sigma D$ のとき, b_i ($G_x\cong\mathbb{Z}_{b_i}$),

$p(x)\in D_i\cap D_j$ $(i\neq j)$ のとき, b_ib_j ($G_x\cong\mathbb{Z}_{b_i}\times\mathbb{Z}_{b_j}$)

となるとき, (G,M) を $(X,(D,b))$ の一意化という。

M が compact (したがって, G が有限) のとき,

(G, M) を $(X, (D, b))$ の有限一意化という。

M が単連結であるとき，(G, M) は $(X, (D, b))$ の普遍一意化と呼ばれ，一意化を被覆（非分岐）する最大の一意化という普遍性をもつ。([Ka₁])

問題

1. $(X, (D, b))$ はいかなる条件のもとに一意化，有限一意化をもつか？

2. $(X, (D, b))$ の普遍一意化の幾何学を行え！

compact 非特異複素曲面 M にはその標準因子 $K(M)$ に関する $K(M)$-次元としての小平次元 $\kappa(M)$（例えば，[I]），宮岡と Yau の仕事で注目される特性数 $\varepsilon(M) = 3c_2(M) - (c_1(M))^2 = e(M) - 3\,\mathrm{sign}(M)$ が考えられる。$(e(M) = c_2(M))$

$\kappa(M)$ は双有理型不変量で，$\varepsilon(M)$ はホモトピー不変量である。M が (-1) curve，(-2) curve を含まないと仮定すると

$\kappa(M) = 2$，つまり，M が一般型であれば，M には Einstein-Kähler 計量で，Ricci 曲率が負のものが存在し，$\varepsilon(M) \geqq 0$ が成立する。しかも，$\varepsilon(M) = 0$ となることが M の普遍被覆が $\mathbb{C}^2$ の開単位球体となる為の必要十分条件である。

正規軌道曲面 $(X,(D,b))$ を (X,b) と表し，

$$c_2(X,b)=e(X,b)=e(X)+\sum_i\left(\frac{1}{b_i}-1\right)(e(D_i)-d_i)$$
$$+\sum_d\left(\frac{1}{b_ib_j}-1\right)$$

（但し，$d_i=\#(D_i\cap\Sigma D)$，$\sum_d$ は ΣD の点 $D_i\cap D_j$ にわたる和を表す。），

$$K(X,b)=K(X)+\sum_i\left(1-\frac{1}{b_i}\right)D_i$$
$$\varepsilon(X,b)=3c_2(X,b)-K(X,b)^2$$
$$e^b(D_i)=e(D_i)+\sum_{d_i}\left(\frac{1}{b_j}-1\right)$$

，但し，$\sum_{d_i}$ は $D_i\cap\Sigma D$ の各点 $D_i\cap D_j$ にわたる和，

$$\varepsilon_X^b(D_i)=\frac{2D_i^2}{b_i}-e^b(D_i),$$
$$\varepsilon_X(D_i)=2D_i^2-e(D_i)$$

と定義する。

(Hirzebruch - Höfer)：

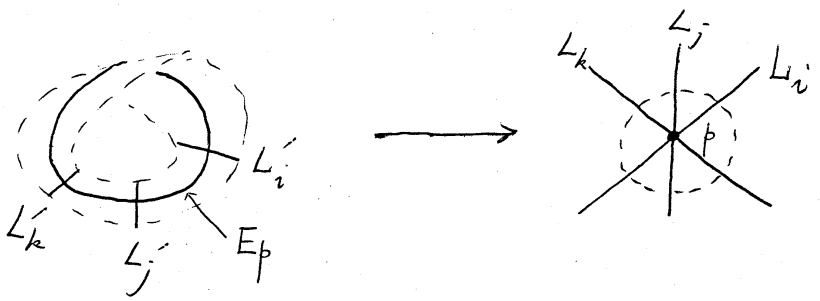
$$\varepsilon(X,b)=\varepsilon(X)+\frac{1}{2}\sum_i\left(1-\frac{1}{b_i}\right)(\varepsilon_X(D_i)+\varepsilon_X^b(D_i))$$

が成立する。

(X,b) が有限一意化 (G,M) をもつとき，

X の $K(X,b)$ 次元として定義される小平次元 $\kappa(X,b)$ と M の小平次元は一致し，しかも，$\varepsilon(M)$ は $\varepsilon(X,b)$ の自然数倍となるように定義してある。

$\mathbb{C}P^2$ の直線族 $L = \bigcup_i L_i$ を考える。L の特異点は $m(\geq 2)$ 重点からなる。$m \geq 3$ なる特異点を特異多重点という。$\mathbb{C}P^2$ をすべての特異多重点で blowing-up したものを X，L_i の proper transform を L_i'，特異多重点 p に対する exceptional curve を E_p とする。p での局所図は次の様である。



p での blowing-up

$D = \left(\bigcup_i L_i'\right) \cup \left(\bigcup_p E_p\right)$，但し，$\bigcup_p$ は特異多重点 p にわたる和集合をとることを表す，とおく。

各 L_i' 上に任意の自然数 $b_i\ (\geq 2)$ を指定する。

各 E_p 上に，p を含み，p 以外に特異多重点を含む直線 L_{i_k} $(k=1,\cdots,r_p)$ に対応する $b_{i_1},\cdots,b_{i_{r_p}}$ の最小公倍数 $b_p = [b_{i_1},\cdots,b_{i_{r_p}}]$ を指定する。

このとき，$(X,(D,b))$ は正規軌道曲面をなしている。

次の結果が成立する。

定理.

(I) 各 L_i 上に特異多重点が存在すれば，(X, b) は有限一意化をもつ。([K_2])

(II) 各 L_i 上に2個以上の特異多重点が存在し，ある L_k に対し，$e^b(L_k') \leq 0$ であれば，

$$\kappa(X, b) = 2$$

が成立する。しかも，$e^b(E_s) > 0$ なる特異多重点 s に対応する E_s の (X, b) の有限一意化への lift は -2 or -1 curve で，これらをすべて1点につぶした variety には，(-2 curve をつぶした) ところで(のみ)高特異点をもつ Einstein-Kähler metric が存在する。しかも，

$$\varepsilon(X, b) \geq \sum_s \frac{1}{b_s}$$

，但し，$\sum_s$ は $e^b(E_s) > 0$ なる特異多重点 s にわたる和，が成立する。

(III) L_i 上の特異多重点の個数を σ_i とすると，

$$\varepsilon_X^b(L_i') = \frac{2(1-\sigma_i)}{b_i} - e^b(L_i'), \quad \varepsilon_X^b(E_p) = -\frac{2}{b_p} - e^b(E_p),$$

$$\varepsilon(X, b) = \frac{1}{2}\left\{ \sum_i \left(1 - \frac{1}{b_i}\right) \varepsilon_X^b(L_i') - \sum_p \left(1 + \frac{1}{b_p}\right) \varepsilon_X^b(E_p) \right\}$$

が成立する。さらに，(II) の条件下で，(X, b) の普遍一意化の空間が $\mathbb{C}^2$ の単位球体である為の必要十分条件は，

$$\varepsilon_X^b(L_i') = \varepsilon_X^b(E_p) = 0 \qquad (\forall i, \forall p)$$

となることである。とくに，$e^b(E_s) > 0$ なる s は存在しない。

(Ⅳ) $e^b(E_t)=0$ をみたすいくつかの特異多重点 $t=t_1,\cdots,t_m$ について，open 曲面 $X'=X-\bigcup_{i=1}^{m}E_{t_i}$ を考える。このとき，$b_{t_i}=\infty$ とし，$\frac{1}{b_{t_i}}=0$ と解釈し，上の記法を拡張する。このとき，条件(Ⅱ) 及び

$$\varepsilon_X^b(L_i')=\varepsilon_X^b(E_p)=0 \qquad (\forall i,\ \forall p)$$

が成立すれば，(X',b) の普遍一意化空間は $\mathbb{C}^2$ の開単位球体である。（$b_{t_i}=\infty$ とは，X' の E_{t_i} に対応する end で∞巡回被覆となる $(X',b|X')$ の一意化と理解する）。
（[Ⅲ] は Hirzebruch-Höfer による。）

参考文献

[I] 飯高 茂，代数幾何学Ⅲ，岩波書店基礎数学講座

[Ka1] M. Kato, *On uniformizations of orbifolds (preprints).*

[Ka2] M. Kato, *On the existence of finite principal uniformizations of $\mathbb{CP}^2$ along weighted line configurations*, Memoires of Fac. Sci. Kyushu Univ., Ser. A vol 38 (1984), 127-131.

[Ko] R. Kobayashi, *Einstein-Kähler metrics on open algebraic surfaces of general type*, (to appear).