

すべての閉4次元位相多様体は単体分割をもつ。

東 丈・理 中森信弥

(Shinya NAKAMORI)

フリードマン、クィンらにより、4次元多様体の分類はあ
うたな局面をむかえたといえる。これらの結果が、4次元の
(本来の)三角形分割問題や、3次元のケルベラ・ミルナー
群、 \mathbb{H}_3 にどの程度まで反映されるかを調べてみる。

4次元の場合、可微分圏とPL圏との差はないので、以下
においては、使いやすい方を、そのつど用いることにする。

補題1： (W, V) ($V \subset \text{int } W$ 局所平坦) をコンパクト
PL多様体は ($\partial V = \emptyset$) とする。このとき、

$\exists H : (W, V) \rightarrow \mathbb{R}$ すなはちのPLモース関数
 $H(\partial W) = \{pt\}$

$\exists p \in V$; p は、 H および、 $H|V$ の指數0の臨界点。
ここに、PL多様体のモース関数とは、たとえば、Kuper
[2] の意味でのものとする。

証明のアトラスイン: $W \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ (N : 大) とみたとき、
 W の高々関数

$$h := \text{proj}_N|_W : W \hookrightarrow \mathbb{R}_+^N = \mathbb{R}_+^{N-1} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

は、1つの PL モース関数とみることができます。ただし、

$$h(\partial W) = \{\text{pt}\}$$

とするよろしく $W \hookrightarrow \mathbb{R}_+^N$ とする。

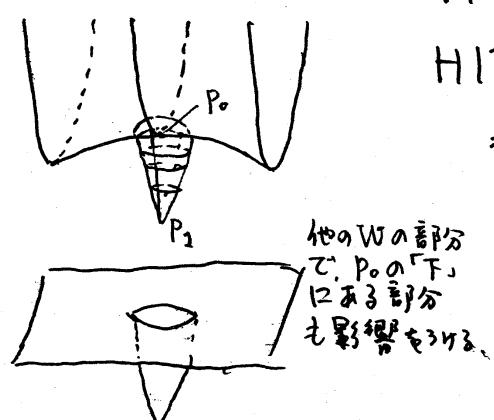
$$L : \mathbb{R}_+^N \longrightarrow \mathbb{R}_+ \text{ 線型関数}$$

である。

$H' := h + (L|_W)$ が 高々関数(とくに PL モース)
 かつ, $H'|_V$ も =
 が存在する。 $H'|_V$ には、かくとも 1 点, 指数 0 の臨界点 p_0
 が存在する。この p_0 にて, W における V へのフック (下図
 参照) をおこす。これを $\#_0$ とする。

$$H : W \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$H|_V : V \longrightarrow \mathbb{R}$$



また、高々関数であって、 p_0 の行
 く先である p_1 は, H , $H|_V$ の
 指数 0 の臨界点とみなされている。

□

注意: $(\dim W) - 1 = \dim V = 3$ のときを考える。 $H(p)$
 に十分近い実数 $y > H(p)$ で, $(H(p), y]$ には, H , およ

び、 HIV の臨界値が存在しないところものがとれる。このとき、 $(HIV)^{-1}(y) \cong S^2$ （ \cong は、PL同相、ないしは、可微分同相をあらわす），かつ、3次元多様体 $H^{-1}(y)$ の $(HIV)^{-1}(y)$ を含む連結成分 Γ は、 $\cong S^3$ である。それゆえ、3次元(PL)シェンフリーズ定理によて、 (PL) 2-球面 $(HIV)^{-1}(y)$ は、 $H^{-1}(y)$ で、ある (PL) 3-球の境界となっている。

p と Γ の結び、 $p^*\Gamma$ 、おひい、 p と、 $(HIV)^{-1}(y)$ との結び、 $p^*(HIV)^{-1}(y)$ を、 p から出る、 H に関するPL積分曲線(Siebenmann [5] をみよ)で、それゆえ、 Γ 、 $p^*\Gamma$ 、 $p^*(HIV)^{-1}(y)$ へ至るもののがまとめて走ることになる。そのかのほかには、 (PL) 4-球、 (PL) 3-球をなす。一方、 $p^*\Gamma - p^*((HIV)^{-1}(y))$ の連結成分の閉包、 C_+ 、 C_- は、ともに、 (PL) 4-球となっている。

\sum^3 で、以下、任意のホモトピー・3-球面をあらわすこととする。

$$W := \sum^3 \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], V := \sum^3 \times \{0\}$$

の場合を考察する。 $W \subset \sum^3 \times (-1, 1)$ と自然にみると、2つの弧 A_+ 、 A_- を、つきのよう構成する。 $p^*\Gamma$ では、これらは、ともに、 p を出る弧であって、

$$(A_+ \cup A_-) \cap (p^*((HIV)^{-1}(y))) = \{p\},$$

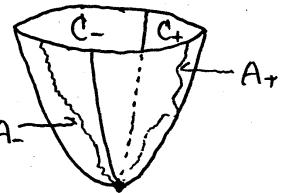
$A_{\pm} - \{p\} \subset C_{\pm}$ (複号同順),

ただし, C_{\pm} は, その正負に応じて, $\Sigma^3 \times (-1, 0)$, $\Sigma^3 \times (0, 1)$ に含まれているものとする。

次に, これらを弧を,

$$(A_+ \cup A_-) \cap (\Sigma^3 \times \{0\}) = \{p\}, \quad A_-$$

$$(\Sigma^3 \times (-1, 1)) - (A_+ \cup A_-) \cong (\Sigma^3 - \{p\}) \times (-1, 1)$$



以上より, $\Sigma^3 \times (-1, 0)$, $\Sigma^3 \times (0, 1)$ にて自然に延張する。

定義: V^n を, 位相多様体とする。その, 平滑化 (=smoothings) V_α, V_β が, 薄片化 (=sliced) コニコルダントとは, $V \times I$ の, ある平滑化 $(V \times I)_r$ が, 存在して,

$$(V \times \{0\})_r = V_\alpha, \quad (V \times \{1\})_r = V_\beta;$$

射影 $(V \times I)_r \longrightarrow I$ が 正則

たるとすをいう。

定義: V^n を, 位相的 $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ とする。このとき, うめこ

み

$$\varphi: S^{n-1} \hookrightarrow V^n$$

が, 本質的であるとは,

$$S^{n-1} \xhookrightarrow{\varphi} V^n \xrightarrow[\text{同相}]{} S^{n-1} \times \mathbb{R} \xrightarrow[\text{自然}]{} S^{n-1} \times \{0\}$$

によって, 誘導される, $\pi_{n-1}(S^{n-1})$ の元が, 自明化されるときをいう。

このとき、つきが成り立つ。

定理2：仮定

(H) $\left\{ \begin{array}{l} \text{積の微分構造をもつ(すなはち、「標準的な」),} \\ S^3 \times \mathbb{R} \text{と, } \exists \text{ すばぎコニコレダニ+たな, 位相 } S^3 \times \mathbb{R} \\ =: V \text{ の, 平滑化 } V_\alpha \text{ には, つねに, なめらかで,} \\ \text{本質的な, } S^3 \text{ の } \exists \text{ めこみが存在する。} \end{array} \right.$

のもとに、3次元、ケルベア・ミルナー群、 $\#_3$ は自明である。

証明のマストライン：まず、つきを主張する。

任意のホモトピー3-球面 Σ^3 の懸垂 $S(\Sigma^3)$ は、 S^4 と同相。

なぜかといふと、 Σ^3 と S^3 とは、ホモトピー同値であるから、

$$\Sigma^3 \times \mathbb{R} \underset{\substack{\cong \\ (\text{コンパクト}) \text{ 固有 } \text{ ホモトピー同値}}}{\sim} S^3 \times \mathbb{R}$$

Freedman [1] によて、

$$\Sigma^3 \times \mathbb{R} \underset{\text{同値}}{\approx} S^3 \times \mathbb{R}.$$

両者の、2点コンパクト化を考えて、

$$S(\Sigma^3) \approx S(S^3) = S^4.$$

s_\pm を、 $S(\Sigma^3)$ の懸垂点たちとすると、 $\Sigma^3 \times (-1, 1)$ から、微分構造を受け継いでいる、多様体、 $S(\Sigma^3) - \{s_\pm, A_\pm\}$ に注目する。これらの終端 (=end) \sqcup で、

$$U \cap (\Sigma^3 \times \{0\}) \subset p^* P$$

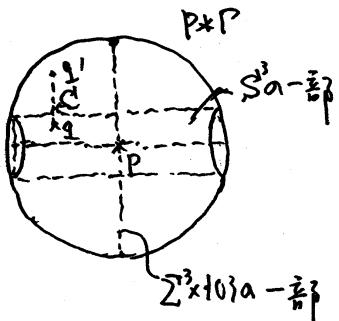
$$(U \cap P) \cap ((H|_{V^5}(y)) = \emptyset$$

たるものをとる。 $\{S_\pm\} \cup A_\pm$ は、 $S(\Sigma^3)$ で平坦な弧であるか
か、

$$U \underset{\text{同相}}{\approx} S^3 \times \mathbb{R}$$

$t = 3\pi/2$ 、一般に、Lashof-Shaneson, Lemma 1.2 [3] と、
クイニのアニユラス定理 ($\text{TOP}(4)/O(4) \rightarrow \text{TOP}/O \cong$
 $K(\mathbb{Z}/2; 3)$) が、3-連結であることを示すために、
 $S^3 \times \mathbb{R}$ の平滑化は、 $S^3 \times \mathbb{R}$ の 2つのうねりをコニカルダンス
類、標準的 $S^3 \times \mathbb{R}$ 12で代表されるものと、フリードマンの 12
で $S^3 \times \mathbb{R}$ 12で代表されるものを持つことがわかる。12に關
していえば、Lashof-Taylor, Prop. 2.2 [4] と、上の Lashof -
Shaneson の補題により、それの平滑化は、標準的 $S^3 \times \mathbb{R}$ と
等しいコニカルダンスとなる。

この状況で、われわれの仮定 (H) を用いると、 $\Sigma^3 \times \mathbb{R}$ 12は、いかがわしく、 $\Sigma^3 \times (-1, 1)$ 12は、本質的でないが、それら
かにうねりをもつていいことに気づく。この S^3 の 1 点 q を、 T_0 と



之ば、 $U \cap \text{int}(p^* P)$ にとる。 q から、
 P 上の点 q' へ至る、二の S^3 とは、 q での
み交わるような、 $p^* P$ の弧 C を考え、
 C にとる。 q の S^3 における球近傍を、

p^*P で、PL 的に、 φ' の P における球近傍へもってゆく。こうして S^3 からえらぶるもの、 S も、また、PL 3-球面である。さらに、 $S \times P$ は、PL 3-球、 D である。補題 1 のあと注意によれば、PL 2-球面 $(H|V)^{-1}(y)$ は、 P である PL 3-球の境界となつてゐるのであるから、 P の全域アイソトピーにより、 $(H|V)^{-1}(y)$ を、 D へもってゆくことができる。この全域アイソトピーは、アイソトピー拡張定理によつて、 p^*P 、 $\Sigma^3 \times (-1, 1) - \text{int}(p^*P)$ は、そのおのおのにうつる、 $\Sigma^3 \times (-1, 1)$ の全域アイソトピーにまで、拡張することができます。

この S により、 $\Sigma^3 \times (-1, 1)$ を二分し、その有界な閉包をもつ連結成分を、 \square^4 とする。上の議論によれば、ある、 $\Sigma^3 \times \{0\}$ から、ある PL 3-球をとりのぞいた、 Δ^3 に対して、

$$(\Delta^3, \partial\Delta^3 = (H|V)^{-1}(y) \text{ (のアイソトピック像)} \cong S^2) \subset (\square^4, \partial\square^4 = S)$$

は、平坦な、PL 部分多様体をなす。作り方により、 \square^4 は、可縮で、コンパクトな、PL 多様体である。 (B^4, B^3) を、標準的球対とする。 $(\square^4 \cup_{S^2} B^4, \Delta^3 \cup_{\partial\Delta^3} B^3)$ を考えると、これは、^{平坦化} PL 多様体群であつて、 $\square^4 \cup B^4$ は、PL、ホモトピー-4-球面であるし、一方、 $\Delta^3 \cup B^3$ は、 $\Sigma^3 (\times \{0\})$ に PL 同相しうる次元であるから、微分同相である。よつて、 $(\square^4 \cup B^4) - (\Delta^3 \cup B^3)$ の 1 つの連結成分の閉包を考えることにあり、任意のホモトピー-3-球面 Σ^3 が、ある PL (= 平坦)

めらか)な可縮, コンパクト4次元多様体の境界となつてい
ることがわかる。

□

この定理よりも, 仮定(H)の正否の判定が, より本質的であ
る。この仮定は, 標準的 $S^3 \times \mathbb{R}$ にある, $S^3 \times \{0\}$ を, 「ラスは
モ」性によって, 保証されている, いたるところ正則な $S^3 \times$
 $\mathbb{R} \times I$ の平滑化のモース関数に与えられる, 積分曲線で, $S^3 \times$
 $\{0\}$ から出発するものを, うまく, 有界領域にとどめておく
ことができるか, という問題に, 密接に関連することは, い
うまでもない。

命題3 : 仮定

(H') $\left\{ \begin{array}{l} \text{任意のホモトピー3-球面は, (本物の) 3-球面} \\ \text{と, } H\text{-コボルダントである} \end{array} \right.$

のもとに, 任意の單体分割可能な, 符号づけられた, スゼニ,
4次元, 開位相多様体 M の, 符号数, $\sigma(M)$ につき,

$$\sigma(M) \equiv 0 \pmod{16}$$

が, 成り立つ。

証明: T を, M の十分細かい三角形分割とし, v を, T の
頂点で, $|lk(v, T)|$ が, 偽ホモトピー3-球面(そろそろ)

意味で、「特異点」といふことをする。 X^4 を, $|1k(v, T)|$ と, $S^3 = \partial D^4 \subset D^4$ との, H-コホーリティズムとする。このとき, $Y^4 := |st(v, T)| \cup_{|1k(v, T)|} X^4 \cup_{S^3} D^4$ により, あるコンパクト・非輪状, 多面体的, 4次元ホモロジー多様体がえられる。いま, コンパクト・多面体的5次元ホモロジー多様体, $M \times I \cup_{|st(v, T)| \times \{1\}} \text{cone}(Y^4)$ を考えると, 二つの境界は, $-M$ と, M から特異点ひが, 解消されたホモロジー多様体, $M(w)$ である。よって, M と $M(w)$ の符号数は, 同じである。作り方より, 両者のスピニも等しい。すべての特異点について,これをあてなうと, ある PL(したがって, ためらかな)4次元多様体, $M(P)$ で,

$\sigma(M) = \sigma(M(P))$, かつ, $w_2(M) \equiv w_2(M(P)) \pmod{2}$
 となるのか, えられる。したがるに, 可微分圏における, ローリングの定理になり,

$$\sigma(M(P)) \equiv 0 \pmod{16}.$$

$10 \leq 12$,

$$\sigma(M) \equiv 0 \pmod{16}.$$

□

証: 定理1の, 仮定(H)のもとに, ある4次元, 開位相多様体で, 単体分割不能なものが存在する。

\tilde{v} , \tilde{w} , (H) は “ (H') ” であり, (H') の状況で, フリードマン ([1]) の開位相多様体, $|E_8|$ をとれば, それは, 上の命題を, 満足するから。

参考文献

- [1]. M. H. Freedman, 'The topology of four-dimensional manifolds', J. Diff. Geom., 17 (1982), 357-453.
- [2]. N. H. Kuiper, Non-degenerate piecewise linear functions, Rev. Roum. Math. Purées et Appl., 13 (1968), 993-1000.
- [3]. R. Lashof and J. Shaneson, Smoothing 4-manifolds, Inv. Math., 14 (1971), 197-210.
- [4]. —— and L. Taylor, Smoothing theory and Freedman's work on four-manifolds, preprint.
- [5]. L. C. Siebenmann, Deformation of homeomorphisms on stratified sets, Comm. Math. Helv., 47 (1972), 123-163.