

ω の高さをもつ closed 1-complex

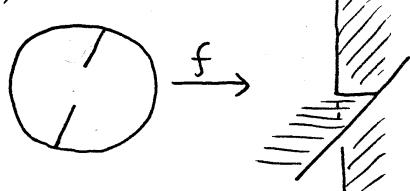
東北大 小林一章 (Kazuaki Kobayashi)

ハンドル体の中の ω の高さをもつ closed 1-complex の性質を記述します。

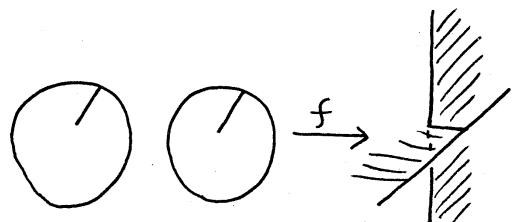
K をコンパクト, 向きづけ可能な 3 次元多様体 M^3 の中の closed 1-complex とする。 K が M^3 で 0-contractible とは次の性質をもつ 2-complex L と PL-map $f: L \rightarrow M^3$ が存在することである。即ち ① L の 1-骨格 $L^{(1)}$ の部分複体 \tilde{K} で K と单体的に同型となるものがある。 ② $|L - \tilde{K}|$ は開 2-球体の非交和 ③ L は 1 点にカラブロシブル ; $f(\tilde{K}) = K$ かつ $f|_{\tilde{K}}$ は埋め込みになつてゐる。更に f の特異点集合 $\overline{\{x \in L \mid \#f^{-1}f(x) \geq 2\}}$ は次の 3 つのタイプのものから成るとしておく ([S] 参照)

I. Cusp singularities

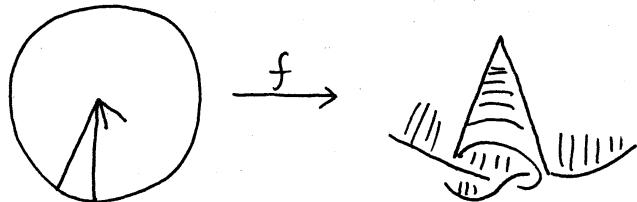
(a)



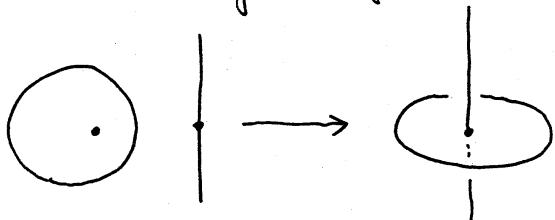
(b)



II. Branch point singularity



III Isolated singularity



V を種数, $g(V)$, が n のハンドル体とする。 D_1^2, \dots, D_n^2 を
 V にプロパーに埋め込まれた2-球体としたとき $\{D_1^2, \dots, D_n^2\}$
 が V の meridian ball system とは $\partial(V - \bigcup_{i=1}^n U(D_i^2))$ が1つ
 の3-球体となる時を言う。meridian ball system に含まれ
 た2-球体を meridian ball と言う。

K をハンドル体 V に含まれていう closed 1-complex とする。
 K が V で geometrically essential とは V の任意の meridian
 ball が K と交わる時を言う。

K を向きづけ可能なコンパクト多様体 M^3 の中の closed
 1-complex とし, V は K を含んでいうハンドル体とする。 V
 のスパインを $sp(V)$ とかく (ただし $sp(V)$ は常に closed 1-
 complex とし特に V が3-球体の時は $sp(V)$ は1点とする。)
 次の①, ②, ③の条件をみたすとき $sp(V) < K$ とかく。

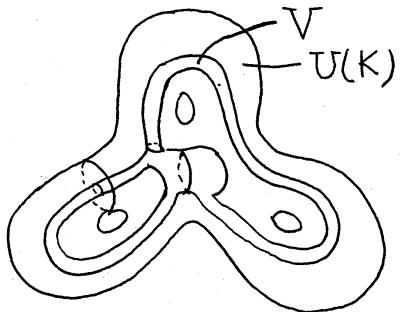
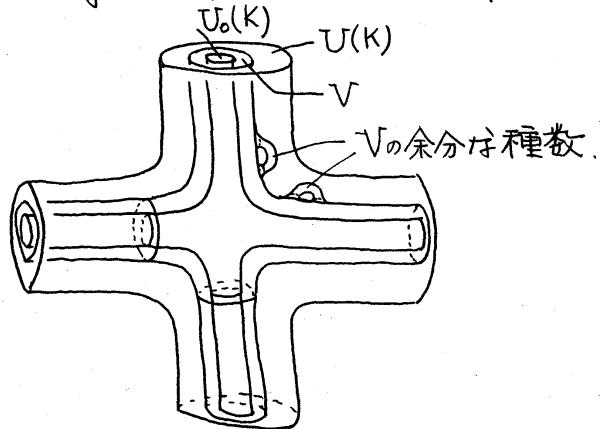
① K は V のどんなスパインにもたらさない ② K は V で geometrically essential ③ V は K を含むハンドル体で、②をみたすもののうち種数が最小。

注. 定義より K が 1 個から $sp(V) < K$ となるハンドル体 V はない。

Lemma 1. K を何をづけ可能なコンパクト多様体 M^3 内の closed 1-complex とする。 V が K を含む M^3 内のハンドル体で、 $sp(V) < K$ なら $K \subset V \subset U(K)$ となる K の正則近傍 $U(K)$ は存在しない。

証). もし結論のような $U(K)$ が存在すると $K \subset U_0(K) \subset V \subset U(K)$ となるようなハンドル体の列が存在する。今 $\tilde{K} = sp(V)$ とおくと $\tilde{K} < K$ だから K は $V = U(\tilde{K})$ で geometrically essential もし $U(K)$ の meridian ball $D^2 \cap D^3 \cap V = \tilde{D}_1^2 \cup \dots \cup \tilde{D}_p^2$ ($p \geq 2$) (\tilde{D}_i^2 は V の meridian balls) とすると K は V で geom. essential だから $D^2 \cap U_0(K) = \tilde{D}_1^2 \cup \dots \cup \tilde{D}_q^2$ ($q \geq p$) (\tilde{D}_i^2 は $U_0(K)$ の meridian balls) これは $D^2 \cap U(K)$ の meridian ball で $U(K) - U_0(K) \cong \partial U(K) \times I$ に矛盾。従って $\{D_1^2, \dots, D_n^2\}$ を $U(K)$ の meridian ball system とすると全ての i について $D_i^2 \cap sp(V) = 1$ 個 となる。そこでは $U_0(K) \subset V \subset U(K)$ の位置関係は次頁の左図のようになり V に余分な genus があると K は V で geometrically essential でなくなる。また右図のように

$g(V) < g(U(K))$ となると $K \notin V$ となり、いずれも矛盾。



∴ $\partial U_0(K) \neq \partial V \neq \partial U(K)$ となり $K = sp(V) \in U(K)$ となる。

これは $sp(V) = \tilde{K} < K$ の条件①に矛盾。故に $K \subset V \subset U(K)$ となる正則近傍 $U(K)$ は存在しない。】

定義 V を n 次元多様体 M^3 内のハンドル体で K を V に含む closed 1-complex とする。 $sp(V) < K$ のとき $K_{n-1} = sp(V)$ とかく。 K_{n-1} を含むハンドル体 V_{n-1} で $sp(V_{n-1}) < K_{n-1}$ のとき $K_{n-2} = sp(V_{n-1})$ とかく。以下同様に順次 K_i を作り K_i を含むハンドル体 V_i で $sp(V_i) < K_i$ のとき $K_{i-1} = sp(V_i)$ とかく。このようになして $K \equiv K_n$ から K_{n-1}, \dots, K_1, K_0 を作るときと $K_0 < K_1 < \dots < K_{n-1} < K_n = K$ とかく。従って $K_0 < \dots < K_n = K$ とかいたとき、あらかじめ $(n+1)$ 個の closed 1-complexes, K_0, K_1, \dots, K_n が与えられていいのではない。 K のみが与えられていて K_{n-1}, \dots, K_1, K_0 は $K_0 < K_1 < \dots < K_n = K$ となるように上の方法で作ったものとする。

Corollary 1. $K_0 < K_1 < \dots < K_n = K$ という列があると

$U(K_0) \supset U(K_1) \supset \dots \supset U(K_{n-1}) \supset U(K_n)$ をみたす正則近傍の列があり、それらについて $g(U(K_0)) \geq g(U(K_1)) \geq \dots \geq g(U(K_{n-1}))$ が成り立つ。

(証). 前半の正則近傍の列の存在は $K_0 < K_1 < \dots < K_n = K$ の定義より明らか。次に K_n は $U(K_{n-2})$ の中で geometrically essential である。何故なら K_{n-1} は $U(K_{n-2})$ の中で geometrically essential だから $U(K_{n-2})$ の任意の meridian ball D^2 に必ず $D^2 \cap U(K_{n-1}) = \tilde{D}_i^2 \cup \dots \cup \tilde{D}_p^2$ ($p \geq 1$) (\tilde{D}_i^2 は $U(K_{n-1})$ の meridian ball)。また K_n は $U(K_{n-1})$ の中で geom. essential だから $K_n \cap \tilde{D}_i^2 \neq \emptyset$ for $1 \leq i \leq p$. $\therefore D^2 \cap K_n = \emptyset$ // 次にもし $K_n = \text{sp}(U(K_{n-2}))$ は $U(K_{n-2})$ ならば $K_n \subset U(K_{n-1}) \subset U(K_{n-2})$ で $U(K_{n-2})$ は K_n のある正則近傍に過ぎない。即ち $U(K_{n-2}) = \tilde{U}(K_n)$ $\therefore K_n \subset U(K_{n-1}) \subset \tilde{U}(K_n)$ これは Lemma 1 に矛盾。 $\therefore K_n \neq \text{sp}(U(K_{n-2}))$ 。以上より K_{n-2} は $K_{n-2} < K_n$ となるための条件①, ② を満足している。そしてもし $g(U(K_{n-2})) < g(U(K_{n-1}))$ となると K_{n-1} は $K_{n-1} < K_n$ となるための③の条件を満足していなれば事にはり矛盾。
 $\therefore g(U(K_{n-2})) \geq g(U(K_{n-1}))$ 。以下同様。□

(注). $g(U(K_n))$ の最小性はたゞして $g(U(K_n)) > g(U(K_{n-1}))$ という事はあり得る。

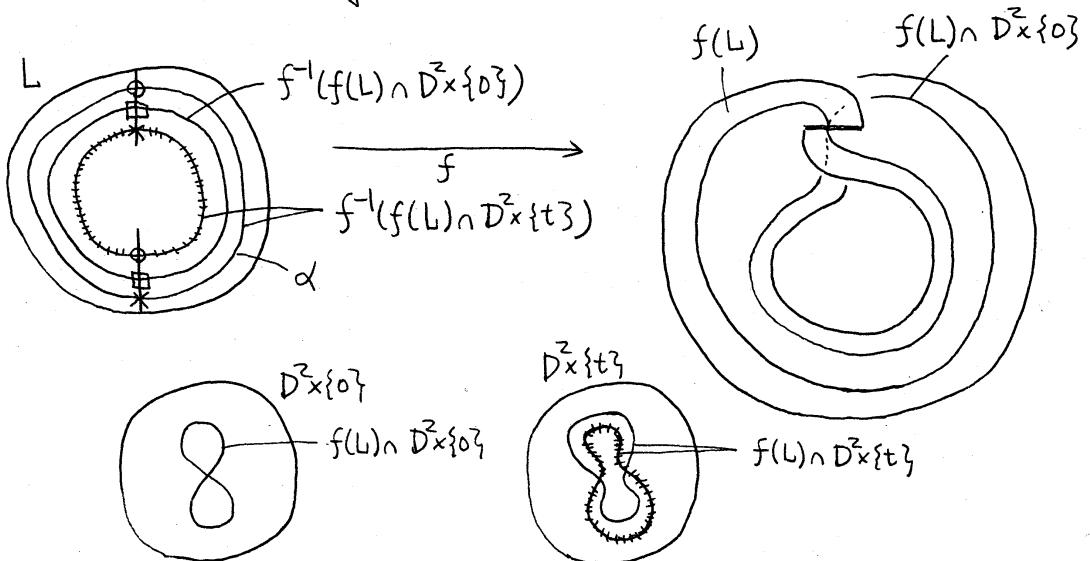
Corollary 2. M^3 内で $K_0 < K_1 < \dots < K_n = K$ で $U(K_0) \supset U(K_1) \supset \dots \supset U(K_n)$ としたとき $0 \leq k < j \leq n$ なる任意の k, j に必ず $\partial U(K_k) // \partial U(K_j)$

証). $j = k+1$ のときは $K_k < K_{k+1}$ の条件の下で $\partial U(K_k) \times \partial U(K_{k+1})$.
 $j \geq k+2$ のときは $\partial U(K_k) // \partial U(K_j)$ とするとき $U(K_k) - \overset{\circ}{U}(K_j) \cong \partial U(K_k) \times$
I 即ち $U(K_k) = \overset{\circ}{U}(K_j)$ 故に $K_j \subset U(K_{j-1}) \subset U(K_k) = \overset{\circ}{U}(K_j)$
これは Lemma 1 に矛盾. $\therefore \partial U(K_k) \times \partial U(K_j) \square$
3 次元多様体 M^3 に含まれる closed 1-complex K に対して
 $K_0 < K_1 < \dots < K_n = K$ という列が存在し

$\max\{n \mid n \text{ は上の} \dots \text{ な列の長さ}\} = m$ のとき K は
 M^3 で m の高さ をもつという。任意の自然数 m に対し K が M^3 で
 m の長さの列をもつとき, K は M^3 で ∞ の高さ をもつという。
 K から 長さ 有限の列 $\tilde{K} = K_0 < K_1 < \dots < K_n = K$ で到達する任意
の \tilde{K} が ∞ の高さをもつとき K は M^3 で ω の高さ をもつという。
Lemma 2 M^3 内に含まれる closed 1-complex K が M^3 で 0-
contractible なら K を含む M^3 内のハンドル体 V で, K がその
中で geom. essential かつ $K \neq sp(V)$ となるものがある。

証). K が 0-contractible だから、その定義より 2-complex L
と PL-写像 $f: L \rightarrow M^3$ が存在する。 f の特異点集合は cusp
singularity, branch point singularity, isolated singularity の 3
の型であると仮定して置く。従って $f(L)$ は closed 1-complex を
スペインにもち、よって $U(f(L))$ はハンドル体である。そこ
で K が $U(f(L))$ で geom. essential なら $f_1 = f$ とおく。 K が

$U(f(L))$ が geom. inessential なら $U(f(L))$ の meridian 2-ball D^2 で $D^2 \cap K = \emptyset$ となるものがある。従って D^2 と f の isolated singularity の像は交わらない。また branch point singularity の 1 つの成分 C の像 $f(C)$ の正則近傍は 3-球体 D^3 から M^3 の ambient isotopy で $f(C) \cap D^2 = \emptyset$ と出来る。そこでは以下 clasp singularity のみを考える。 $f(L^{(0)}) \cap D^2 = \emptyset$ としてよい。従って $f^{-1}(f(L) \cap D^2)$ の各成分は 単純閉曲線、更に meridian ball D^2 の collar を $D^2 \times [-1, 1]$ とし α を $f^{-1}(f(L) \cap D^2 \times \{t\})$ の 1 つの成分 (= 単純閉曲線) とし α とき $f|_\alpha = \text{embedding}$ となる $t \in [-1, 1]$ が存在する。



$|L - \tilde{K}|$ は 1 つ 2-球体 の 非交和 から 1 つ 2-球体 D^2_0 上 で $f^{-1}(f(L) \cap D^2 \times \{t\})$ の outermost component α を取ると それは D^2_0 上 で 2-ball D^2_α を張って いる。また $f|_\alpha$ は 埋め込み から $f(\alpha)$ は $D^2 \times \{t\}$ 上 で 2-球体 \tilde{D}^2_α を張って いる。そこで写像 \tilde{f} を $\tilde{f}(D^2_\alpha) = \tilde{D}^2_\alpha$ となる ように 变える。これによつて $\tilde{f}(D^2_0) \cap D^2 \times \{t\}$

$= \emptyset$ となる。このように ϕ を \tilde{f}_1 に変えて $\tilde{f}_1(L) \cap D^2 \times \{t\} = \emptyset$ と出来る。そして \tilde{f}_1 の特異点集合の型を再び piping technique を使って I, II, IIIのみにする。それを f_1 とする f_1 は I, II, III のみの特異点集合をもつ $f_1(L) \cap D^2 = \emptyset$. $U(f(L)) - \overset{\circ}{U}(D^2)$ を V_0 とおく, K が V_0 で geom. essential なら $V = V_0$ とおく。またもし L K が V_0 で inessential なら V_0 の meridian ball D^2 で $K \cap D^2 = \emptyset$ はあるものがある。 $f_1(L) \cap D^2 \neq \emptyset$ なら上の方法と全く同じにして写像 f_1 を変えて f_2 とし $f_2(L) \cap D^2 = \emptyset$ と出来る。以下同様にして K を含むハンドル体 V と K が V で 0-contractible を表わす 2-complex L と写像 $f_L: L \rightarrow V$ が存在し, K は V で geom. essential (V が 3-ball となることもある) 従って K は V で 0-contractible, 一方 $sp(V)$ は V で 0-contractible である。 $\therefore K \neq sp(V)$ in V 】

Proposition 2. M^3 内の 0-contractible な任意の closed 1-complex K に対して, K を含む handlebody V で $sp(V) < K$ となるものがある。

証). Lemma 2 より K が 0-contractible なら K を含むハンドル体 V' で K が V' で geom. essential かつ $K \neq sp(V')$ となるものがある。そこでそれらの V' のうちで種数が最小のものを V とすればよい。】

系 単連結な3次元多様体 M^3 内の任意の closed 1-complex は ω の高さをもつ。

Lemma 3. V を種数 n のハンドル体とし, K を V 内の closed 1-complex とする。 $K_0 < K_1 < \dots < K_m = K$ in V という列があると次の性質をもつ V の meridian ball system $\{D_i^2, \dots, D_n^2\}$ がある。

即ち $\bigcup_{i=1}^n D_i^2 \cap K_0 = \emptyset$ ($k \leq n$) かつ $V_0 \equiv V - \bigcup_{i=1}^n U(D_i^2) \supseteq K_0$ が geom. essential として (a) $g(V_0) \geq g(U(K_0))$ または (b) $K_0 = sp(V_0)$. (ただし K_0 が V が geom. essential のときには $n=0 \in V_0$ で全て V と理解する)。

証). $K_0 = sp(V_0)$ なら結論の (b) の場合が起る。 $\therefore K_0 \neq sp(V_0)$ とする。 K_0 が V_0 が geom. essential は条件より従う。そして $sp(V_0) \neq sp(V_0) < K_0$ の条件の ①, ③ をみたす。従って条件 ③ 及び Lemma 1 及び Cor. 1 より $g(V_0) \geq g(U(K_0))$. 即ち (a) が起る。

系 V を handlebody とし, K を V に含まれていう closed 1-complex とする。 $K_0 < K_1 < \dots < K_m = K$ in V という列があると $g(V) \geq g(U(K_0)) \geq \dots \geq g(U(K_{m-1}))$ が成り立つ。

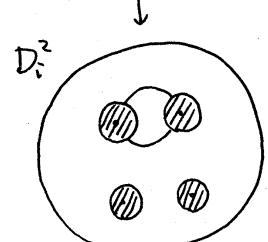
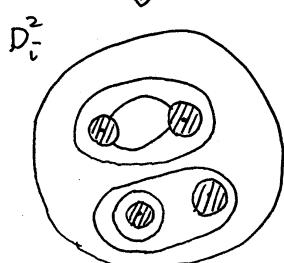
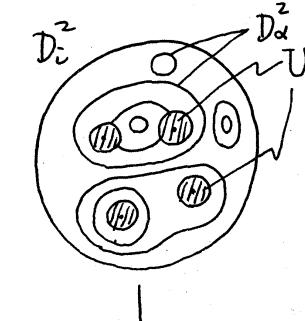
Theorem 1. V を種数 2 以下のハンドル体とし, K を V に含まれる closed 1-complex とする。 $K_0 < K_1 < \dots < K_n = K$ という列が存在したとする。 (a) $i_{K*}: \pi_1(\partial U(K_k)) \longrightarrow \pi_1(V - U(K_{k-1}))$ が

$0 \leq k \leq n-1$ なる k に対し 単射であるか, または (b) ある k に $\#$
 $\# U(K_k) \subset B^3 \subset V$ となる 3 -ball B^3 がある。 $(0 \leq k \leq n)$.

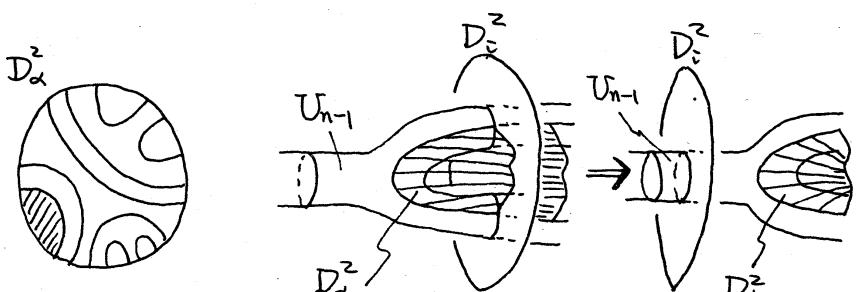
証). $k=n-1$ のとき (即ち $i_{n-1*} : \pi_1(\partial U_{n-1}) \rightarrow \pi_1(V - \overset{\circ}{U}_{n-1})$ のとき (\exists だし $U_{n-1} = U(K_{n-1})$). もし $\ker i_{n-1*} \neq \{e\}$ なら Loop Th. より, 次の条件を満たす単純閉曲線 α が ∂U_{n-1} 上に存在する。
 $\alpha \neq 0$ on ∂U_{n-1} かつ α は $V - \overset{\circ}{U}(K_{n-1})$ で特異点のない 2 -ball D_α^2 を張る。先ず $\alpha \sim 0$ on ∂U_{n-1} (null-homologous) で U_{n-1} で特異点のない 2 -ball \tilde{D}_α^2 を張るとき. $\Sigma^2 \cong D_\alpha^2 \cup_\alpha \tilde{D}_\alpha^2$ とおくと $\Sigma^2 \cong S^2$ で $\Sigma^2 \subset V$. V はハンドル体だから Σ^2 は V で 3 -ball B_α^3 を張る。 $W \equiv U_{n-1} \cup B_\alpha^3$ はハンドル体で $\alpha \neq 0$ on ∂U_{n-1} だから $g(W) < g(U_{n-1})$. そして $K_n \cup K_{n-1} \subset W$. 従って $g(U_{n-1}) = 1$ なら $g(W) = 0$ i.e. $W \cong B^3$. 結論の (b) が起る。 $g(V) \leq 2$ と Lemma 3 の系より $g(U_{n-1}) = 2$ 即ち W は solid torus と思って $\# n$. もし K_n が W で geom. inessential なら W の meridian ball $D^2 \subset D^2 \cap K_n = \emptyset$ となるものがある。 $K_n \subset W - \overset{\circ}{U}(D^2) \cong B^3$ これは結論の (b) が起る。そし K_n は W で geom. essential とする。またもし $sp(W) = K_n$ in W なら W は K_n のある正則近傍 $\tilde{U}(K_n)$ となる。よって $K_n \subset U(K_{n-1}) \subset \tilde{U}(K_n) = W$ となり $K_{n-1} < K_n$ と Lemma 1 の矛盾。従って $sp(W) \neq K_n$ in W . 故に $g(W) < g(U_{n-1})$ となり $K_{n-1} < K_n$ となる事に矛盾。次に $\alpha \neq 0$ on ∂U_{n-1} で α が U_{n-1} で特異点のない 2 -ball \tilde{D}_α^2 を張るととき, $\Sigma^2 = D_\alpha^2 \cup_\alpha \tilde{D}_\alpha^2$ とおくと $\Sigma^2 \cong S^2$ 且して $\alpha \neq 0$ on

∂U_{n-1} から U_{n-1} に含まれる単純閉曲線 β で U_{n-1} と null-homologous でなく、 $\beta \cap \hat{D}_\alpha^2 = 1$ 点となるものがある。従って $\beta \cap \Sigma^2 = 1$ 点。これは $\pi_2(V) = 0$ と対して矛盾。従ってこの場合も起らぬ。

従って α は U_{n-1} で特異点のない 2-ball を張る事はない。次に $\{D_i^2, D_\alpha^2\}$ を V の meridian ball system とする ($q(V) = 1$ のときは $\{\hat{D}_i^2\}$)。 K_{n-1} と $\bigcup_{i=1}^2 D_i^2$ とを transverse に交わるようにし且つ $K^{(0)} \cap \bigcup_{i=1}^2 D_i^2 = \emptyset$ となるようにする事により $\bigcup_{i=1}^2 D_i^2 \cap U_{n-1}$ は U_{n-1} の meridian balls, また $\bigcup_{i=1}^2 D_i^2 \cap D_\alpha^2 = \{\text{simple arcs}\} \cup \{\text{simple closed curves}\}$



このうちで内部に U_{n-1} との交わりを含まない simple closed curves を cut & glue で取り除く。次に (D_i^2 上でみて) U_{n-1} との交わりを含む simple closed curve のうちで最も内側から考えてこのような simple closed curves は存在しない事がわかる。従って $D_\alpha^2 \cap \bigcup_{i=1}^2 D_i^2 = \{\text{simple arcs}\}$ となる。



D_α^2 上でみて最も外側のものから、それが張っていける 2-ball を利用して D_i^2 を isotopy で動かして $D_i^2 \cap D_\alpha^2$ を取り除く。た

だし取り除いた結果 $D_i^2 \cap U_{n-1}$ が 2-balls でそれらの境界である circles が全て ∂U_{n-1} 上で null-homotopic でないようにしておく。以上より $\bigcup_{i=1}^2 D_i^2 \cap U_{n-1}$ は 2-balls でその境界である circles は ∂U_{n-1} で null-homotopic でなく $\bigcup_{i=1}^2 D_i^2 \cap D_\alpha^2 = \emptyset$ そこで U_{n-1} が D_1^2, D_2^2 で cut された後の $\alpha = \partial D_\alpha^2$ を含む成分を U_α とすると U_α は 3-ball $V_0 \equiv V - \overset{\circ}{U}(D_1^2 \cup D_2^2)$ に埋め込まれて solid torus。 $D_\alpha^2 \subset V_0 - \overset{\circ}{U}_\alpha$, ここで $U_0 = U_{n-1} - \overset{\circ}{U}(D_1^2 \cup D_2^2)$. $\partial(U_\alpha \cup U(D_\alpha^2)) \cong S^2$

$\therefore U_\alpha \cup U(D_\alpha^2) \cong B^3$. $\therefore W \equiv U_{n-1} \cup U(D_\alpha^2)$ は種数 1 のハンドル体. ($\alpha + 0$ on ∂U_α . \oplus もし $\alpha \sim 0$ on ∂U_α なら U_α は solid torus だから α は U_α で 2-ball \tilde{D}_α^2 を張る事になり, 従って α は U_{n-1} で 2-ball を張る事になり, このは最初の段階で示した事に矛盾). $K_{n-1} \subset W$. また K_n は W で geom. essential としてよい。何故ならもし K_n が W で inessential なら W の meridian 2-ball D^2 で $K_n \subset W - D^2$ となるものがあり $W - D^2 \cong B^3$ たり (b) が起るから。またもし $K_n = sp(W)$ なら $K_n \subset U(K_{n-1}) \subset W = \tilde{U}(K_n)$ となり $K_{n-1} < K_n$ と Lemma 1 に矛盾。 $\therefore K_n \neq sp(W)$. そして $g(W) < g(U_{n-1})$. これは K_{n-1} が $K_{n-1} < K_n$ の条件③を満足していなければ事に矛盾。

$$\therefore \ker i_{n-1*} = \{e\}$$

次に $\pi_1(\partial U_{n-2}) \xrightarrow{i_{n-2*}} \pi_1(V - \overset{\circ}{U}_{n-1})$ を考える。上と全く同様にして $\pi_1(\partial U_{n-2}) \xrightarrow{j_{n-2*}} \pi_1(V - \overset{\circ}{U}_{n-2})$ は単射であるか U_{n-2} を含む 3-ball B^3 が存在する。後者の場合は (b) が起る事になる。そ

で j_{n-2*} が単射であると仮定する。 $f_{n-2*} : \pi_1(\partial U_{n-2}) \longrightarrow \pi_1(U_{n-2} - \overset{\circ}{U}_{n-1})$ が単射である事を示す。もし $\text{Ker } f_{n-2*} \neq \{e\}$ なら loop Th. より ∂U_{n-2} 上に次の性質をもつ单纯複形曲線 α が存在する。即ち $\alpha \neq 0$ on ∂U_{n-2} 且つ α は $U_{n-2} - \overset{\circ}{U}_{n-1}$ で特異点をもたない 2-ball D_α^2 を張る。もし $\alpha \neq 0$ on ∂U_{n-2} なら K_{n-1} は U_{n-2} で geom. inessential となり $K_{n-2} < K_{n-1}$ の条件②に反する。また $\alpha \sim 0$ on ∂U_{n-2} なら D_α^2 で U_{n-2} を cut すると U_{n-2} は 2 つのハンドル体 W_1, W_2 に分かれ $g(W_i) = 1$ かつ $K_{n-1} \subset W_1$ または $K_{n-1} \subset W_2$ ($g(V) = 1$ のときは $\alpha \sim 0$ on $\partial U(K_{n-2}) \Leftrightarrow \alpha \simeq 0$ on $\partial U(K_{n-2})$ だからこの場合は起らぬ)。これは $g(U_{n-2})$ の最小性に矛盾。(またはこの場合も K_{n-1} は U_{n-2} で geom. inessential となり矛盾)。故に $f_{n-2*} = \text{単射}$ である。従って次の diagram と van Kampen の定理より $i_{n-2*} : \pi_1(\partial U_{n-2}) \longrightarrow \pi_1(V - \overset{\circ}{U}_{n-1})$ は単射となる。

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_1(\partial U_{n-2}) & \\
 j_{n-2*} \swarrow & & \searrow f_{n-2*} \\
 \pi_1(V - \overset{\circ}{U}_{n-2}) & \downarrow i_{n-2*} & \pi_1(U_{n-2} - \overset{\circ}{U}_{n-1}) \\
 & \downarrow & \\
 & \pi_1(V - \overset{\circ}{U}_{n-1}) &
 \end{array}$$

以下同様。

系 V を種数 2 以下のハンドル体とする。 K が V に含まれる closed 1-complex で ω の高さをもつたら K は V 内の 3-ball に含まれる。

証). K は ω の高さをもつので $\tilde{K} < K$ となる任意の \tilde{K} が ∞ の高さをもつ。今 \tilde{K} を 1 つ固定すると $V - \overset{\circ}{U}(\tilde{K})$ は irreducible だから Haken number $\beta(V - \overset{\circ}{U}(\tilde{K})) < \infty$ がわかる。即ち $V - \overset{\circ}{U}(\tilde{K})$ に含まれる disjoint, non-parallel incompressible surfaces の最大個数が $\beta(V - \overset{\circ}{U}(\tilde{K}))$ (\therefore これは有限 [H. Th. 13.2])。 K は ω の高さをもつから $\beta(V - \overset{\circ}{U}(\tilde{K}))$ より大きな自然数 m に対して K は $K_0 < K_1 < \dots < K_m = \tilde{K} < K_{m+1} = K$ なる列をもつ。定理 1 より $\pi_1(\partial U_k) \longrightarrow \pi_1(V - \overset{\circ}{U}(\tilde{K}))$ ($0 \leq k \leq m$) が単射となるか, U_k が 3-ball に含まれる。もし前者が起ると Lemma 1 の Cor. 2 から $\partial U(K_k) \not\cong \partial U(K_j)$ だから Haken number の定義に矛盾。故に U_k が 3-ball B^3 に含まれる。 $\overset{\circ}{U}(K_0) \supset \overset{\circ}{U}(K_1) \supset \dots \supset \overset{\circ}{U}(K_m)$ だから $U_k \subset B^3$ なら $K = K_m \subset B^3$ \square

参考文献

- [H] J. Hempel : 3-manifolds, Ann. Math. Study 86.
- [S] N. Smythe : Handlebodies in 3-manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970) 534-538.