

Global Knots の Conjugation と Prime 分解

東大理 宮崎桂

(Katura Miyazaki)

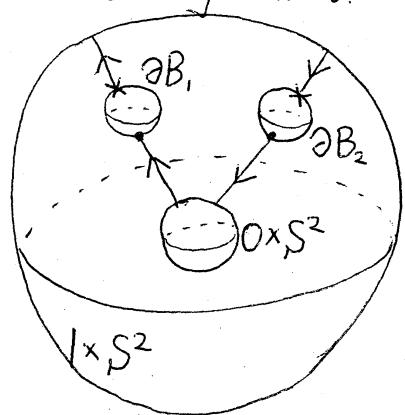
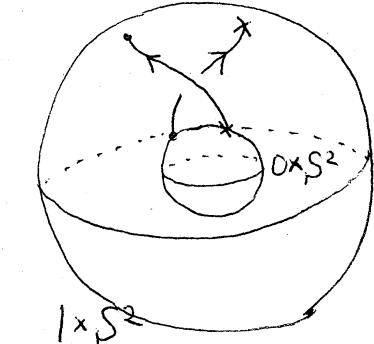
S^3 の knot がただ一通りの prime 分解を持つことはよく知られている。しかし、一般の 3 次元多様の knot について “prime knot” はしばしば定義されるが (e.g. Gordon-Litherland [1]) prime 分解自体は調べられていないようだ。closed, oriented 3-mfd の oriented knot の prime 分解については次の定理が成立する。(言葉の正確な定義は §1 参照)

定理 1 (存在条件) nontrivial knot $\mathcal{K} = (M, K)$ が prime 分解をもつ必要十分条件は、meridian m ($\subset \partial N(K)$) が exterior $M - \text{Int } N(K)$ で essential なこと。

この定理は Haken の有限性定理と innermost disk argument によりたやすく示される。([1] の section 1 に全ての link が prime 分解を持つと書いてあるのは誤り)。分解の規則を述べるには、§2 で定義される knot どうしの conjugation という概念が必要になる。さらに、prime knot \mathcal{R} と \mathcal{U} を次のように定義する。

\mathcal{R} を $S^1 \times S^2$ の knot で、 $(I \times S^2, I \times \{p_1, p_2\})$ から $0 \times S^2$ と $I \times S^2$ を同一視して得られるものとする。

$2S^1 \times S^2$ の knot \mathcal{U} は
次のように定める。2つの circle
 $t_1 \in S^1 \times p_1, t_2 \in S^1 \times p_2 (\subset S^1 \times S^2)$
 に逆の向きを入れる。 $B_1, B_2 (\subset S^1 \times S^2)$ を $(B_i, B_i \cap t_i)$
 が trivial ball pair かつ $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ にとる。そして $(S^1 \times S^2, t_1 \cup t_2)$ から B_1, B_2 を取り除き、できた境界
 $(\partial B_i, \partial B_i \cap t_i), i=1, 2$ を orientation reversing homeo で
 同一視して得られる knot が \mathcal{U} である。



定理2 \mathcal{K} を prime 分解を持つ knot とする。

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \# \cdots \# \mathcal{K}_t \# n\mathcal{R} \# m\mathcal{U} \# (N, \phi)$$

$$= \mathcal{K}'_1 \# \cdots \# \mathcal{K}'_t \# n'\mathcal{R} \# m'\mathcal{U} \# (N', \phi)$$

\mathcal{K} の prime 分解とする。ただし、 $\mathcal{K}_i, \mathcal{K}'_i$ は \mathcal{R} や \mathcal{U} でない prime knot, N, N' は 3-mfd。このとき次が成立する。

- 1) $t = t'$ 。 \mathcal{K}_i は \mathcal{K}'_i の conjugation (up to order)
- 2) $n+2m = n'+2m'$ 。もし $n=0$ なら $n'=0$ かつ $\mathcal{K}_i = \mathcal{K}'_i$ (up to order)。
- 3) $N = N'$.

系 knot \mathcal{K} が \mathcal{R} を factor に含まない prime 分解を持てば、それが \mathcal{K} の唯一の prime 分解である。

定理3 \mathcal{K}_1 が \mathcal{K}_2 の conjugation なら、 $\mathcal{R} \# \mathcal{K}_1 = \mathcal{R} \# \mathcal{K}_2$ 。特に、 $\mathcal{R} \# \mathcal{R}$ は \mathcal{U} の conjugation なので $\mathcal{R} \# \mathcal{R} \# \mathcal{R} = \mathcal{R} \# \mathcal{U}$ 。

定理2, 3 から prime 分解は “conjugation” の範囲で 多意性を持つことがわかる。本稿では conjugation の説明に 主眼をあき、定理の証明については §3 でアイデアを述べ

るにとどめる。くわしくは preprint [2] を参照のこと。

§1 M を closed, oriented 3-mfd, $K(CM)$ を oriented circle とした時、対 (M, K) を knot と呼ぶ。 K のことを knot と呼ぶこともある。2つの knot は、その間に orientation preserving homeo があるとき同じものとみなす。

2つの knot $\mathcal{K}_i = (M_i, K_i)$ $i=1, 2$ の和 $\mathcal{K}_1 \# \mathcal{K}_2$ は対 $(M_1, K_1) \# (M_2, K_2)$ で def する。

$\mathcal{K} = (M, K)$ が trivial knot $\iff \overset{\text{def}}{K}$ に embedded disk がはいる。

\mathcal{K} が prime knot $\iff \overset{\text{def}}{\mathcal{K}}$ は nontrivial knot で、任意の分解 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \# \mathcal{K}_2$ に対して \mathcal{K}_1 or

\mathcal{K}_2 は S^3 の trivial knot.

この定義によると、prime knot の exterior は irreducible 3-mfd。

分解 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \# \cdots \# \mathcal{K}_n \# (N, \phi)$, N は 3-mfd, は $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n$ が prime knot のとき、prime 分解と呼ぶ。

§2 X を connected, oriented 3-mfd で $\partial X = T_1 \cup \dots \cup T_n$ は n 個の torus、 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ を $\alpha_i \subset T_i$ なる essential oriented circle とする。対 $(X, \bigcup_{i=1}^n \alpha_i)$ から次のように

knotを構成する。

構成 1 (V_1, a_1) (V_2, a_2) を trivial ball pair とする。
 orientation revers. embedding $f: \bigsqcup_{\text{disjoint}} N(\alpha_i) \rightarrow \partial V - \partial a_i$ を
 $\text{lk}_{V_1}(f(\alpha_i), a_1) = +1$ になるようにとる。この時
 $M = X \cup V_1$ とおくと $\partial M = S^2$, arc a_1 は M に properly
 embedded。よって $(M, a_1) \cup (V_2, a_2)$ は knot \mathcal{K}
 を与える。
 $(\partial M, \partial a_1) = (\partial V_2, \partial a_2)$

この \mathcal{K} は $(X, \cup \alpha_i)$ と f に依存しているようだが、実は
 f のとり方にはならないことが次からわかる。

構成 2 上で作った \mathcal{K} を再構成する。

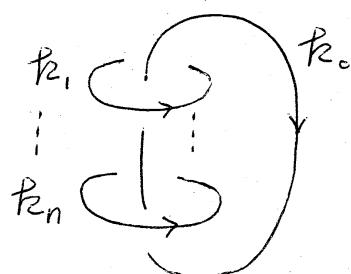
$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= (M, a_1) \cup (V_2, a_2) \\ &= (X \cup_f (V_1, a_1)) \cup (V_2, a_2) \\ &= X \cup ((V_1, a_1) \cup (V_2, a_2)) \quad \text{と書ける。} \end{aligned}$$

$V_1 \cap V_2 = \partial V_1 - \partial X$ は n 個の annulus と 2 個の disk
 $N(\partial a_1)$ からなる。 (V_i, a_i) は trivial ball pair なので $\bigcup_{i=0}^n k_i$
 を図のような S^3 の link とすると、 $(V_1, a_1) \cup (V_2, a_2) =$
 $(S^3 - \bigcup_{i=1}^n N(k_i), k_0)$ となる。

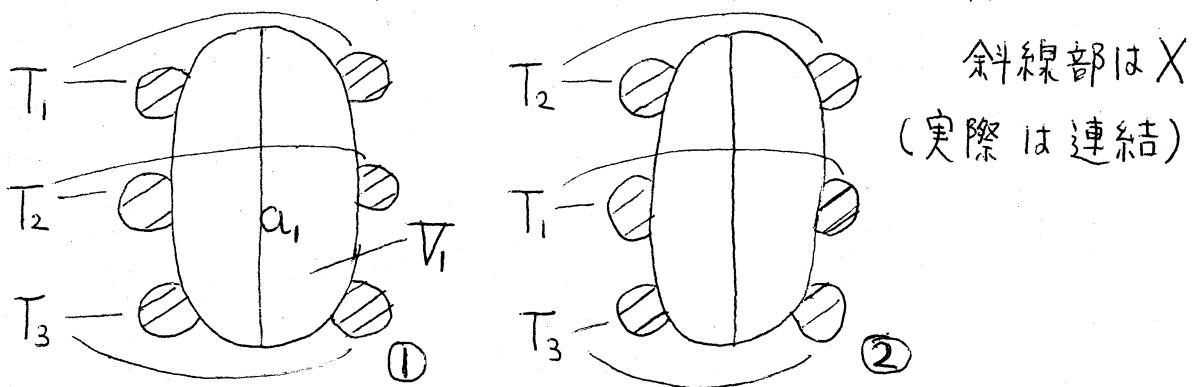
$$(C_n, k_0) = (S^3 - \bigcup_{i=1}^n N(k_i), k_0) \quad \text{とおく}$$

$$\text{よし } \mathcal{K} = X \cup_{\partial X = \partial C_n} (C_n, k_0)$$

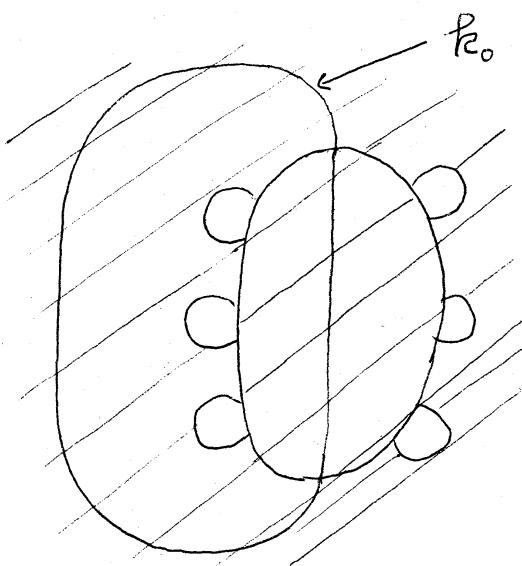
と書ける。



この union U は f から induce される orientation rev. homeo
 $\hat{f}: \bigcup T_i \rightarrow \bigcup \partial N(k_i) = \partial C_n$ で定められる。(この時、
 $lk_{C_n}(\hat{f}(x_i), k_0) = +1$, $lk_{C_n}(\hat{f}(x_i), k_j) = 0$ となる。
 $\forall i \neq j$ に対して (C_n, k_0) の orientation pres. autohomeo g で $g(\partial N(k_i)) = \partial N(k_j)$, $g(\partial N(k_j)) = \partial N(k_i)$, $g|_{\partial N(k_\ell)} = id$ for $\ell \neq i, j$. となるものがある
 ので K は f のとり方にはよらない。(下図も参照せよ)



f のとり方により (M, a_1) の断面図は ① にも
② にもなる。



$K = (M, a_1) \cup (T_2, a_2)$
 の断面図。斜線部は C_3
 (M, a_1) が ① でも ② でも
 K は同じになる。

定義 上の $(X, \bigcup_{i=1}^n d_i)$ を \mathcal{K} の degree n の inducing-pair と呼ぶ。 $(X, \bigcup_{i=1}^n d_i)$ は \mathcal{K} の inducing-pair, $(X', \bigcup_{i=1}^n d'_i)$ は \mathcal{K}' の inducing-pair とする。もし $X = X'$, かつ 各 i ごとに d_i が d'_i or $-d'_i$ は $\exists X$ で isotopic (up to order) ならば、 \mathcal{K} は $(X, \bigcup_{i=1}^n \pm d_i)$ を介して \mathcal{K}' の conjugation であるという。略して \mathcal{K} は \mathcal{K}' の conjugation と呼ぶ。

注意 任意の knot $(M, K) = \mathcal{K}$ について, exterior $E(\mathcal{K})$ と meridian \hat{m} (ただし oriented s.t. lk(K, m) = +1) との対 $(E(\mathcal{K}), \hat{m})$ は \mathcal{K} の inducing-pair になる。 $(E(\mathcal{K}), -\hat{m})$ は $(M, -K) = -\mathcal{K}$ の inducing-pair なので、 \mathcal{K} は $-\mathcal{K}$ の conjugation.

§3 最後に conjugation や inducing pair がどのように prime 分解にかかわってくるかを見る。

簡単のため、knot $\mathcal{K} = (M, K)$ が $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \# \mathcal{K}_2$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}' \# \mathcal{K}_2$ という 2通りの prime 分解を持つとする。このとき K と 2 点で横断的に交わる separating 2-sphere S, S' があり、 $(M, K) = (M_1, a_1) \cup_S (M_2, a_2)$ s.t. $(M_i, a_i) \hat{\wedge} = \mathcal{K}_i$
 $= (M'_1, a'_1) \cup_{S'} (M'_2, a'_2)$ s.t. $(M'_i, a'_i) \hat{\wedge} = \mathcal{K}'_i$ となっている。

目標 \mathcal{K}_1 は \mathcal{K}'_1 の conjugation (up to order)。

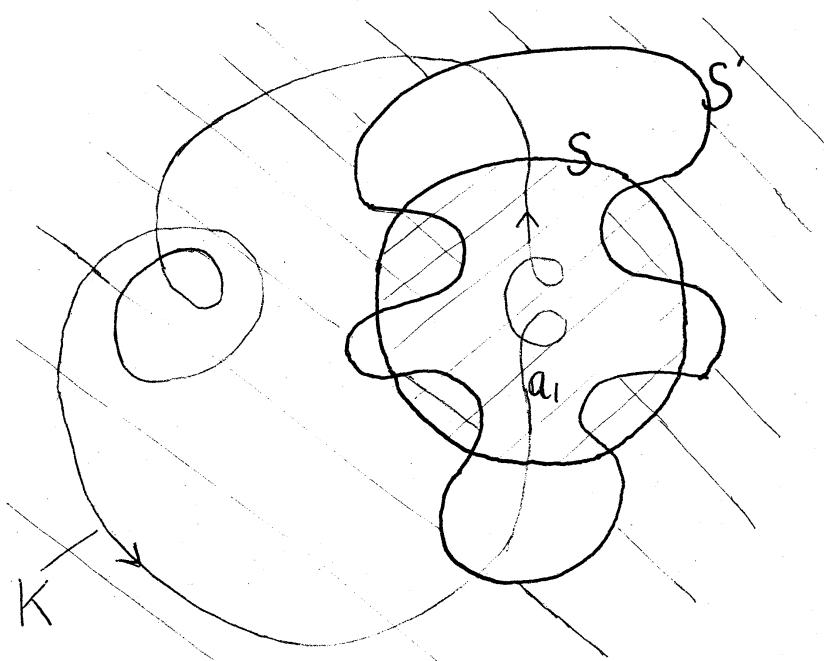
証明方針 議論をやさしくするため、いくつか都合のいい仮定をおく。

仮定1 S' は次の条件をみたす位置まで isotopy で動かせる。
 1° S' と S は横断的に交わる
 2° $S' \cap a_i = \emptyset$
 3° $S' \cap S$ は $\partial S - \partial a_i$ に含まれる essential circle からなる。
 および $\partial S' - \partial a'_i$

この結果 $S' \cap M_1$ は \emptyset またはいくつかの annulus からなる。 \emptyset ならば $M_1 \cap M_1$ として一般性を失はないので $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}'_1$ 。以下 $\emptyset \neq \mathcal{K}_1$ とする。

仮定2 $M - S'$ は 2 つの連結成分 X, V からなる。
 さらに $X \neq S' \times D^2, \partial V = S^2$ である。

仮定1, 2 の結果 ∂X はいくつかの torus からなり、
 S, S', K の関係は断面図で次のページの図のようにかける。
 $\mathcal{K}_1 = (X \cup_{\text{2 annuli}} (V, a_1))^{\wedge}$ とかけることに注意せよ。もし
 (V, a_1) が trivial ball pair ならば(仮定3)、 \mathcal{K}_1 は
 $(X, \alpha_1 \cup \alpha_2)$ を inducing pair に持つ。ただし (α_1, α_2) は
 2 つの annulus $\partial X \cap \partial V$ の core で $lk_V(\alpha_i, a_1) = +1$ となるよう向きづけたもの。



$\backslash\backslash\backslash$ 部分 M_1 , $\backslash\backslash\backslash$ 部分は M'_1 として一般性を失
ない。~~斜~~部分は X : connected

K_1 と同じことを K'_1 についても考える。 $V' = M'_1 -$
 $\text{Int } X$ とおくと $K'_1 = (X \cup (V', a'_1))^\wedge$ は (V', a'_1) が
trivial ball pair ならば(仮定3')、 $(X, \alpha'_1 \cup \alpha'_2)$ から
induceされる。 (α'_1, α'_2) は α_1, α_2 と同様に定める。
 $\alpha_1 \cup \alpha_2$ と $\alpha'_1 \cup \alpha'_2$ は 2 tori ∂X 上で向きを無視して
isotopic。故に K'_1 は $(X, \pm \alpha_1 \cup \pm \alpha_2)$ を介して K_1 の
conjugationとわかる。□

以上のように、innermost argumentを途中であき

らめるのがミソである。実際には、仮定1は innermost で常に成立し、仮定³も K_1 や K'_1 の primeness と $X \neq S^1 \times D^2$ の仮定により常になります。しかし仮定2は必ずしも成立せず、図のような簡単な関係になるとはかぎらない。それでも innermost の議論は仮定1を示す以上には用いない。くわしくは[2]を見て下され。Th 2, 3 の R や H を考える必要もそこから生じます。

References

- [1] C. McA. Gordon and R.A. Litherland,
Incompressible surfaces in branched coverings,
The Smith conjecture, Acad. Press.
- [2] K. Miyazaki, *Conjugation and the prime
decomposition of knots in closed, oriented 3-mfds*,
preprint.