数理解析研究所講究録
543巻 1985年 169-176

$A_\mathfrak{a}$進位相の分離性とM列の並べかえ

広島修道大学 坂口通則 (Michinori Sakaguchi)

Aを可換ネータ環, Mを零でない有限生成A加群とする。Aの元の列 $a_1,\dots,a_n$ がM列であるとは

(1) a_i が $M/(a_1,\dots,a_{i-1})M$ 正則である $(i=1,\dots,n)$,

(2) $M\neq(a_1,\dots,a_n)M$,

を満たすことである。

M列の並べかえがまたM列であるかという問題は, 一般には成立しないが, Aが局所環であれば成立する. これは, 局所環はZariski環であるという事実によると思われる. この逆は, 条件付きで D. Taylor [5] によって得られている。

定理 ネータ環Aが長さ3のA列を持つとする。もし任意のA列のすべての並べかえがA列であれば, Aは局所環である.

環Aが長さ3のA列を持たない場合について考える。問題「a, bがM列ならば，b, aもM列であるか」は一般には成立しないが，どのような条件があると成立するかを考える。このため，条件「Aの元aがM正則ならば，MはAa進位相で分離的である」を満たすA加群Mを研究する。

以下環はネータ可換環とし，加群はすべて有限生成とする。

Aを環とし，MをA加群とする。このとき，

$Z(M)=\{a\in A \mid M\xrightarrow{a}M$ が単射でない$\}$,

$R(M)=\{a\in A \mid M\xrightarrow{a}M$ が単射であるが全射でない$\}$,

$U(M)=\{a\in A \mid M\xrightarrow{a}M$ が全単射である$\}$

とする。

$M\neq 0$ ならば，$Z(M), R(M), U(M)$ はAの互いに排反な部分集合で，$A=Z(M)\cup R(M)\cup U(M)$ である。さらに，

$K(M)=\{a\in A \mid \cap a^nM=0\ (n=1,2,\ldots)\}$

とする。

$K(M)$ はAの部分集合であって，$K(M)\subset Z(M)\cup R(M)$ となる，一般に $K(M)$ はイデアルにならない。

§1　K(M).

$a\in A$ のとき，$a\in K(M)$ であるかどうかの判定は，Krullの共通部分定理に Aa を適応して得られる次の命題を使う．

命題1.1　A を環とし，M を A 加群とする．$a\in A$ について，$a\in K(M)$ であるための必要十分条件は，すべての $\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}\,M$ に対して $Aa+\mathfrak{p}\neq A$ が成立することである．

系1.2　A を環，$\mathfrak{q}$ を A の素イデアルとする．M を零でない A 加群とする．すべての M の素因子(associated prime ideal)が $\mathfrak{q}$ に含まれれば，$\mathfrak{q}\subset K(M)$ である。

系1.3　A を環，M を A 加群とする。このとき，$Z(M)\subset K(M)$ であるための必要十分条件は，すべての $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j\in \mathrm{Ass}\,M$ に対して $\mathfrak{p}_i+\mathfrak{p}_j\neq A$ が成立することである．

命題1.1により良く知られている次の事が分かる．A が整域か局所環であれば，$K(A)=A-U(A)$ となる．A

が半局所環であれば，A の Jacobson 根基は $K(A)$ に含まれる．系 1.3 は $Z(M)\subset K(M)$ であることを Ass M の元の条件で示したが，$K(M)\subset Z(M)$ であることは次の命題から分かる．

命題 1.4　A を環，M を零でない A 加群とする．このとき，$K(M)\subset Z(M)$ であるための必要十分条件は，Ass M の中に A の極大イデアルが存在することである．

系 1.5　A を環，M を零でない A 加群とする．このとき，$K(M)=Z(M)$ であるための必要十分条件は，ある A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ が Ass M の中に存在して，$\mathfrak{m}$ はすべての Ass M の元を含む．

前に述べたように，零でない A－加群 M に対して，$K(M)\subset Z(M)\cup R(M)$ で $Z(M)\cup R(M)=A-U(M)$ であるから $K(M)\subset A-U(M)$ となる。命題1.1，系1.2，系 1.3，補題 1.6 を使って，A 加群 M が $K(M)=A-U(M)$ となる条件を定理1.7で求める．

補題 1.6　A を環，M を A 加群とすると，$U(M)=$

$A-\cup\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}\in \mathrm{Supp}\,M$ となる。

定理1.7　Aを環とし，Mを零でないA加群とする。$\mathrm{Ass}\,M=\{\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_n\}$とすると次は同値である。

(1)　$K(M)=A-U(M)$.

(2)　$\mathfrak{m}\in \mathrm{Supp}\,M$である極大イデアル$\mathfrak{m}$と$\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}\,M$に対して$\mathfrak{p}\subset\mathfrak{m}$である。

(3)　$R(M)\subset K(M)$かつ$\mathfrak{p}_1+\cdots+\mathfrak{p}_n\neq A$である。

さらに，$R(M)\neq\phi$である場合には，定理1.7の(3)の条件を言いかえて次の定理を得る。

定理1.8　Aを環とし，Mを零でないA加群で$R(M)\neq\phi$とする。このとき，$K(M)=A-U(M)$であるための必要十分条件は，$R(M)\subset K(M)$である。

§2　$K(M)=A-U(M)$となる加群M.

A加群Mで$K(M)=A-U(M)$を満たすものを構成する一つの方法を示す。

Aを環，$\mathfrak{a}$をAのイデアルとするとき，

$$S(\mathfrak{a})=\{a\in A \mid Aa+\mathfrak{a}=A\}$$

とする．$S(\mathfrak{a})$はAの積閉部分集合である．命題1.1，定理1.7を言いかえると次の命題となる．

命題2.1　Aを環，MをA加群とする．$a\in A$に対して，$a\in K(M)$であるための必要十分条件は，すべての$\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}\,M$に対して$a\notin S(\mathfrak{p})$となることである．

命題2.2　Aを環，Mを零でないA加群とする．このとき，$K(M)=A-U(M)$であるための必要十分条件は，すべての$\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}\,M$に対して$S(\mathfrak{p})=U(M)$となることである．

Aを環，Mを零でないA加群とする．$S(\mathfrak{a})$の定義から，$\mathrm{Ass}\,M=\{\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_n\}$とすると，$S(\mathfrak{p}_1+\cdots+\mathfrak{p}_n)\ni 0$となるのは$\mathfrak{p}_1+\cdots+\mathfrak{p}_n=A$の時である．$\mathfrak{p}_1+\cdots+\mathfrak{p}_n\neq A$で$S=S(\mathfrak{p}_1+\cdots+\mathfrak{p}_n)$とする．

定理2.3　上の仮定のもとで次は同値である．

(1)　$K(M)=A-U(M)$.

(2)　$S=U(M)$.

(3) 自然な写像 $M \longrightarrow M_S$ が同型である．

この定理より A 加群 M_S が $K(M_S) = A - U(M_S)$ を満たす．

§3 M列の並べかえ．

A を環，M を A 加群とする．a, b がM列とすると，$a \notin Z(M/bM)$ ([1], Th. 117) であるから，b, a がM列であるための必要十分条件は $b \notin Z(M)$ である．

補題 3.1　A を環，M を A 加群とする．a, b がM列ならば $0 :_M b \subset \cap a^n M$ $(n = 1, 2, \cdots)$ である．

系 3.2　M を A 加群で $R(M) \subset K(M)$ とする．a, b がM列ならば b, a もM列である．

定理 3.3　M を A 加群とすると次は同値である．

(1)　a, b がM列ならば b, a もM列である．

(2)　$a \in R(M) - K(M)$ ならば $R(M/aM) = \phi$ である．

(3)　$a \in R(M) - K(M)$ と $\mathfrak{m} \in \mathrm{Supp}\, M/aM$ である極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して $\mathrm{depth}_{A_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m} = 1$ である．

例　kを体とし，$R = k[X,Y,Z]/(XY)$ とする．$R = k[x,y,z]$ と表す．$\mathfrak{n} = (x, y, z)$，$\mathfrak{r} = (x-1, y)$，$S' = (R-\mathfrak{n}) \cap (R-\mathfrak{r})$ と置く．このとき，$A = R_{S'}$ とすると A は半局所環で $R(A) - K(A) \neq \phi$ である．さらに，A は A加群として定理3.3の同値条件を満たす．

参考文献

[1] I. Kaplansky, Commutative rings, The University of Chicago press, Chicago, 1974.

[2] H. Matsumura, Commutative Algebra, Benjamin, New York, 1970.

[3] M. Nagata, Local Rings, Interscience, New York, 1962.

[4] M. Sakaguchi, Remarks on the separation of the Aa-adic topology and permutations of M-sequences, to appear.

[5] D. Taylor, Ideals generated by monomials in an R-sequence, Chicago thesis, Chicago, 1966.