数理解析研究所講究録
543巻 1985年 148-163

特異点の higher conductor module について *)

京大・数理研　泊 昌孝　(Masataka TOMARI)

複素数体$\mathbb{C}$上の2次元正規特異点(V,p)とその特異点解消$\psi:(\tilde{V},A)\longrightarrow(V,p)$を使って定まる$\mathcal{O}_{V,p}$-module $R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$を考えよう。このノートでは、$R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$の$m$-adic filtration（$m$は$\mathcal{O}_{V,p}$の極大イデアル）と特異点の numerical invariants との関係について論ずる。まず，一般次元にも通じる話として，1次元特異点について述べる。そして，2次元特異点独特の話をしたい。

筆者にとって，この研究の出発点は，命題(2.5)であった。2次元正規 Gorenstein 特異点について，特異点の幾何種数p_gと算術種数p_aにはある制限が存在する事は，以前より経験的に知られており，また，種数が小さい時には，いくつか命題が知られていた（用語については§2を見よ）。それを，$R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$の$m$-adic filtrationを考えることにより，具体的な命題として明らかにすることができた。だが，この研究対象が，特異点論に決定的な命題を与えてくれるかどうかは，

*) このノートは，[11] Part I と密接な関係があります。

まだまだこれからの問題である。

2次元正規特異点についての基礎的な事柄についての詳細などは，[4]，[12]，[10]，[11] 等を参照して下さい。

§1. 単項化定理，一次元特異点について

(1.1) (V,p) を n 次元被約特異点とする時，次の data を (V,p) の partial resolution と呼びます： $\psi:(\tilde V,A)\longrightarrow(V,p)$，ただし $\psi:\tilde V\longrightarrow V$ は固有正則双有理写像で，$\tilde V$ は（局所）正規であり，そして解析集合 $|\psi^{-1}(p)|$ を A と書くことにします。（一次元の時は，これは正規化であり，勿論本当の resolution です。）我々は，ideal $\mathcal{I}\subset\mathcal{O}_V$ に対して，元 $f\in\mathcal{I}_p$ であって $\mathcal{I}\cdot R^{n-1}\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}=f\cdot R^{n-1}\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}$ となるものが存在することを示します。その為の準備を以下このパラグラフで述べましょう。

ψ の critical locus を E と書く。すると，$\dim E\leqq n-1$ であるから，集合 $\{q\in V \mid \dim|\psi^{-1}(q)|\geqq n-1\}$ は離散的であり，以下 $\{p\}$ であると仮定する。$R^{n-1}\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}$ の support は $\{p\}$ に含まれる。$R^{n-1}\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}$ を higher conductor module と呼びます（$n\geqq 2$）。

さて，A を $A=(\bigcup_{j=1}^{m}A_j)\cup A'$ ； A_j は（大

域的）既約成分で codim 1 のもの，codim $A' \geqq 2$ ，というふうに分解します。ideal $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_V$ に対して <u>記号 $D(\mathcal{I}, \psi)$</u> を次のように定める。

$$D(\mathcal{I}, \psi) := \sum_{j=1}^{m} \left[\inf_{f \in \mathcal{I}_p} v_{A_j}(\psi^* f) \right] \cdot A_j ,$$

ただし，v_{A_j} は $\psi^* f$ が恒等的に消える $\tilde{V}$ の連結成分に属する A_j に対しては $v_{A_j}(\psi^* f) = +\infty$ と定め，他の場合は，A_j の generic point に於ける $\psi^* f$ の vanishing order であるとする。

各 A_j に対して，元 $f_j \in \mathcal{I}_p$ であって，条件

$$v_{A_j}(\psi^* f_j) = \inf_{f \in \mathcal{I}_p} v_{A_j}(\psi^* f) \qquad (☆)_j$$

を満たすものをとります。その一次結合 $f_{\alpha} = \sum_{j=1}^{m} a_j f_j$ ，$\alpha = (a_j) \in \mathbb{C}^m$，が，generic な α に対して，すべての j について 条件$(☆)_j$ を満たすことは，容易に確かめることができます。上で導入した記号を使うと，$D(\mathcal{I}, \psi) = D((f_{\alpha}), \psi)$ for generic $\alpha \in \mathbb{C}^m$ ということです。

記号 $D(\mathcal{I}, \psi)$ に対して <u>$\mathcal{O}_{\tilde{V}}$-ideal sheaf $\mathcal{I}_{D(\mathcal{I}, \psi)}$</u> を，

$$\mathcal{I}_{D(\mathcal{I}, \psi)} = \begin{cases} 0 ; & v_{A_j}(\psi^* f) = +\infty \ \forall f \in \mathcal{I}_p, \text{ となる } A_j \text{ が存在する } \tilde{V} \text{ の連結成分上}, \\ \mathcal{O}_{\tilde{V}}(-D(\mathcal{I}, \psi)), & \text{上記以外の } \tilde{V} \text{ 上}. \end{cases}$$

と定めて，<u>$\mathcal{O}_{D(\mathcal{I}, \psi)} := \mathcal{O}_{\tilde{V}} / \mathcal{I}_{D(\mathcal{I}, \psi)}$</u> と書くことにします。

<u>定理(1.2)(単項化定理)</u>　(V,p) を n 次元被約特異点，$\psi:(\tilde V,A)\longrightarrow(V,p)$ を partial resolution，$\mathcal{I}\subset\mathcal{O}_V$ を ideal sheaf，そして元 $f\in\mathcal{I}_p$ が $D(\mathcal{I},\psi)=D((f),\psi)$ を満たすものとする。すると，次の関係が成立する。

(1)　$\mathcal{I}\cdot R^{n-1}\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}=f\cdot R^{n-1}\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}$

(2)　$R^{n-1}\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/\mathcal{I}\cdot R^{n-1}\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}\cong R^{n-1}\psi_*(\mathcal{O}_{D(\mathcal{I},\psi)})\cong R^{n-1}\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V}/\psi^{-1}\mathcal{I})$,

ただし，$\psi^{-1}\mathcal{I}$ は　$\psi^*\mathcal{I}\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}_{\tilde V}\longrightarrow\mathcal{O}_{\tilde V}$ の image である。

<u>証明</u>　(1)　次の可換図式を見よ。

$$\begin{tikzcd}
R^{n-1}\psi_*((\psi^*f)) \arrow[r] \arrow[dr, "a"] & R^{n-1}\psi_*(\mathcal{I}_{D(\mathcal{I},\psi)}) \arrow[r] \arrow[d, "b"] & R^{n-1}\psi_*(\mathcal{I}_{D(\mathcal{I},\psi)}/(\psi^*f)) \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\
 & R^{n-1}\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V}) & 0
\end{tikzcd}$$

ここで．消滅は，$n=1$ の時は $\mathcal{I}_{D(\mathcal{I},\psi)}=(\psi^*f)$ であることにより，$n\geq 2$ の時は $\mathcal{I}_{D(\mathcal{I},\psi)}/(\psi^*f)$ の ψ に対する相対次元が $n-2$ 以下であることによる。ゆえに $\mathrm{Im}\,a=\mathrm{Im}\,b$ である。そして，ψ^*f を掛けることによってできる同型 $\mathcal{O}_{\tilde V}\xrightarrow{\cong}(\psi^*f)\mathcal{O}_{\tilde V}$ が導く図式

$$\begin{tikzcd}
R^{n-1}\psi_*((\psi^*f)) \arrow[r, "a"] & R^{n-1}\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V} \\
R^{n-1}\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V}) \arrow[u, "\wr"] \arrow[ur, "f\text{の積}"'] &
\end{tikzcd}$$

を見て，$\mathrm{Im}\,a=f\cdot R^{n-1}\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}$ がわかる。更に，図式

$$\begin{tikzcd}
R^{n-1}\psi_*(\psi^{-1}(\ell)) \arrow[r] \arrow[drr, "d"] & & R^{n-1}\psi_*(\ell_{D(\lambda,\nu)}) \arrow[d, "b"] \\
\ell \otimes R^{n-1}\psi_*(O_{\tilde V}) \arrow[u] \arrow[rr, "e", "積"'] & & R^{n-1}\psi_* O_{\tilde V}
\end{tikzcd}$$

を見て，関係

$$\mathrm{Im}\, b = \mathrm{Im}\, a = f\cdot R^{n-1}\psi_* O_{\tilde V} \subseteq \ell\cdot R^{n-1}\psi_* O_{\tilde V} = \mathrm{Im}\, e \subseteq \mathrm{Im}\, d \subseteq \mathrm{Im}\, b$$

が得られ，これらが一致することがわかった。

(2) は $\mathrm{coker}\, e = \mathrm{coker}\, b = \mathrm{coker}\, d$ であるから明らか。

証明終.

以後，この節では一次元特異点について考察する。

<u>命題(1.3)</u>　一次元被約特異点 (V,p) について，次の等式が成立する。 $\dim \left(\psi_* O_{\tilde V}/O_V\right) / m\cdot\left(\psi_* O_{\tilde V}/O_V\right) = e(m, O_{V,p}) - 1.$
ただし，$e(m, O_V)$ は O_V の m に関する重複度である。

<u>証明</u>.　$\mathrm{degree}\, D(m,\psi) = e(m, O_{V,p})$ であることは良く知られている。そして，定理(1.2)により，これらは $\dim \left(\psi_* O_{\tilde V}/O_V\right) / m\cdot\left(\psi_* O_{\tilde V}/O_V\right)$ とも一致する。与式の左辺 $=$ $\dim\left(\psi_* O_{\tilde V} / m\cdot\psi_* O_{\tilde V} + O_V\right) = \dim\left(\psi_* O_{\tilde V} / m\cdot\psi_* O_{\tilde V}\right) - \dim\left(m\cdot\psi_* O_{\tilde V} + O_V / m\cdot\psi_* O_{\tilde V}\right)$ $= e(m, O_{V,p}) - \dim O_V / m\cdot\psi_* O_{\tilde V} \cap O_V$ である。$m\cdot\psi_* O_{\tilde V} \cap O_V = m$ であることは容易にわかり，求める結果が従う。証終

(1.4) $\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/\mathcal{O}_V$ の $\mathfrak{m}$-adic filtration について考えよう。数 $L(V,p)$ を $L(V,p) = \min\{\alpha \in \mathbb{Z} \mid \alpha \geq 0,\ \mathfrak{m}^\alpha\cdot(\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/\mathcal{O}_V) = 0\}$ として定める。中山の補題により, $\mathfrak{m}^i(\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/\mathcal{O}_V) \neq 0$ ならば $\mathfrak{m}^{i+1}(\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/\mathcal{O}_V) \neq \mathfrak{m}^i\cdot(\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/\mathcal{O}_V)$ である。ゆえに数 $L(V,p)$ は filtration

$$\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/\mathcal{O}_V \supsetneqq \mathfrak{m}(\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/\mathcal{O}_V) \supsetneqq \cdots\cdots \supsetneqq \mathfrak{m}^{L(V,p)}\cdot(\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/\mathcal{O}_V) = 0$$

の長さである。

$D(\mathfrak{m},\psi) = D((f),\psi)$ となる元 $f \in \mathfrak{m}$ をとると, 明らかに, $D(\mathfrak{m}^\alpha,\psi) = D((f^\alpha),\psi)$ for $\alpha \geq 0$, であるから, 等号 $\mathfrak{m}^\alpha\cdot(\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/\mathcal{O}_V) = f^\alpha\cdot(\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/\mathcal{O}_V)$ $\alpha \geq 0$ が成立する。上記 filtration は積による巾zero endomorphism

$$f\cdot \ : \ \psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/\mathcal{O}_V \longrightarrow \psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/\mathcal{O}_V$$

によりきまる。$f\cdot$ の固有空間の次元は $e(\mathfrak{m},\mathcal{O}_{V,p})-1$ であり (1.3), nilpotency order は $L(V,p)$ である。ゆえに,

<u>命題(1.5)</u> 一次元被約特異点 (V,p) について, 次の不等式が成立する。 $\dim(\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/\mathcal{O}_V) \leq L(V,p)(e(\mathfrak{m},\mathcal{O}_{V,p})-1)$

$$L(V,p) + e(\mathfrak{m},\mathcal{O}_{V,p}) - 2 \leq \dim(\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/\mathcal{O}_V).$$

(1.6). 上の filtration に関する2つの特別な場合について, その言い換えを注意しておく。

(1) $L(V,p) = \dim(\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} / \mathcal{O}_V) \iff e(\mathfrak{m}, \mathcal{O}_{V,p}) = 2$.

(2) $L(V,p) = 1 \iff$ (V,p) は Cohen-Macaulay of maximal emb. dim であって，かつ 1 回 $\mathfrak{m}$ で blow up して normal になる。

証明についてひと言．(1) は命題 (1.3) に含まれている。(2) については，等式 $\mathfrak{m}\cdot(\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} / \mathcal{O}_V) \cong \mathfrak{m}\cdot \psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} / \mathfrak{m}\cdot \mathcal{O}_V$ に気を付ければ，伊藤 [5] に含まれている。

§2. 2次元正規特異点の numerical invariants について

(2.1) 2次元正規特異点 $(V,p)/\mathbb{C}$ とある resolution $\psi : (\tilde{V}, A) \longrightarrow (V,p)$ を考えよう。$R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}}$ は resolution のとり方に依らない $\mathcal{O}_V$-module であることが Leray の spectral sequence によって確めることができる。そのことを念頭に置いて，数 $L(V,p)$ を $L(V,p) = \min\{\alpha \in \mathbb{Z} \mid \alpha \geq 0,\ \mathfrak{m}^\alpha R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} = 0\}$ と置く。(1.4) で言ったのと同様に，この数 $L(V,p)$ は $\mathfrak{m}$-adic filtration

$$R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} \supsetneqq \mathfrak{m}\cdot R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} \supsetneqq \cdots\cdots \supsetneqq \mathfrak{m}^{L(V,p)} R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} = 0$$

の長さである。

$D(\mathfrak{m}, \psi) = D((f), \psi)$ となる元 $f \in \mathfrak{m}$ をとると，$\mathfrak{m}^\alpha \cdot R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} = f^\alpha \cdot R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}}$ $\alpha \geq 0$ が成立し，上記

filtration は積による ゆ zero endomorphism

$$f\cdot \quad R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} \longrightarrow R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$$

によりきます。$f\cdot$ の固有空間の次元は $\dim H^1(\mathcal{O}_{D(m,t)})$ であり (1,3)，そして，nilpotency order は $L(V,p)$ である。ゆえに，

命題 (2.2)　2次元正規特異点 (V,p) の resolution $\psi : (\tilde{V},A) \longrightarrow (V,p)$ について，次の不等式が成立する。

$$\dim R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} \leqq L(V,p)\cdot \dim H^1(\mathcal{O}_{D(m,t)})$$

$$L(V,p) + \dim H^1(\mathcal{O}_{D(m,t)}) - 1 \leqq \dim R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} \qquad //$$

$\dim R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ を 幾何種数 (geometric genus) と呼び $p_g(V,p)$ と書く。この節では，もうひとつ2次元独特の numerical invariant p_a をも加えて，$R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ の情報との関係を論じたい。resolution $\psi : (\tilde{V},A) \longrightarrow (V,p)$ に対して 数

$$\sup\{\, p_a(D) \mid \text{non-zero effective divisor } D \text{ on } \tilde{V} \text{ s.t. } |D| \subset A \}$$

を考えよう。ただし，$p_a(D) := 1 - \chi(\mathcal{O}_D)$ とする。これは有限値であり，resolution のとり方に依らないことがわかっている [12]。この数を特異点 (V,p) の算術種数 (arithmetic genus) と呼び $p_a(V,p)$ と書く。この数の感じをわかっていただく為に，次の補題を見て下さい。

<u>補題(2.3)</u>　上の状況において, non-zero effective divisor D on $\tilde{V}$, s.t. $|D| \subset A$, に対して次の等式が成立する。

$$p_a(D) = \dim R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} - \dim R^1\psi_*(\mathcal{I}_D) - \dim \mathfrak{m}/\psi_*(\mathcal{I}_D).$$

<u>証明</u>　$0 \to \mathcal{I}_D \to \mathcal{O}_{\tilde{V}} \to \mathcal{O}_D \to 0$ により, 完全列 $0 \to \mathcal{O}_V/\psi_*(\mathcal{I}_D) \to \psi_*(\mathcal{O}_D) \to R^1\psi_*(\mathcal{I}_D) \to R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) \to R^1\psi_*(\mathcal{O}_D) \to 0$ が従う。この完全列により, 等式, $p_a(D) = 1 - \chi(\mathcal{O}_D) = 1 - \dim \psi_*(\mathcal{O}_D) + \dim R^1\psi_*(\mathcal{O}_D) = 1 + \dim R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) - \dim R^1\psi_*(\mathcal{I}_D) - \dim \mathcal{O}_V/\psi_*(\mathcal{I}_D)$ がわかる。$1 = \dim \mathcal{O}_V/\mathfrak{m}$ に気を付けてやれば, 主張が従う。　証終

これより, 特に $p_a(D) \leq p_g(V,p)$ であり, $p_a(V,p) \leq p_g(V,p)$ なのだが, 更に次の事が成立する。

<u>命題(2.4)</u>. 2次元正規特異点(V,p)について, 次の不等式が成立する。

$$L(V,p) + p_a(V,p) - 1 \leq p_g(V,p).$$

<u>証明</u>　resolution $\psi: (\tilde{V}, A) \longrightarrow (V,p)$ を考え, non-zero effective divisor D on $\tilde{V}$ であって $|D| \subset A$ かつ $p_a(D) = p_a(V,p)$ となるものをとる。補題(2.3)により,

$\dim R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V}) - p_a(V,p) = \dim R^1\psi_*(I_D) + \dim \mathfrak{m}/\psi_*(I_D)$ である。中山の補題を使って、 $\mathfrak{m}^{\dim R^1\psi_*(I_D)}\cdot R^1\psi_*(I_D) = 0$ と $\mathfrak{m}^{\dim(\mathfrak{m}/\psi_*(I_D))}\cdot(\mathfrak{m}/\psi_*(I_D)) = 0$ (すなわち $\mathfrak{m}^{\dim(\mathfrak{m}/\psi_*(I_D))+1} \subseteq \psi_*(I_D)$) がわかる。可換図式

$$\begin{tikzcd}
R^1\psi_*(I_D) \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & & R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V}) \\
\psi_*(I_D)\otimes R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V}) \arrow[u] \arrow[urr, "\text{積}"'] & &
\end{tikzcd}$$

を見て、次の関係が従う。 $\mathfrak{m}^{\dim R^1\psi_*(I_D) + \dim(\mathfrak{m}/\psi_*(I_D)) + 1} R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V}) \subseteq \mathfrak{m}^{R^1\psi_*(I_D)}\cdot\psi_*(I_D)\cdot R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V}) \subseteq g(\mathfrak{m}^{R^1\psi_*(I_D)}\cdot R^1\psi_*(I_D)) = 0$.
ゆえに、 $1 + p_g(V,p) - p_a(V,p) = \dim R^1\psi_*(I_D) + \dim \mathfrak{m}/\psi_*(I_D) + 1 \geqq L(V,p)$ である。 証終.

<u>命題(2.5)</u> 2次元正規特異点 (V,p) について, $p_g(V,p) = p_a(V,p)$ ならば, $p_g(V,p) \leqq$ Cohen-Macaulay type である。

<u>証明.</u> $\psi:(\tilde V, A) \longrightarrow (V,p)$ を resolution, ω_V と $\omega_{\tilde V}$ をそれぞれ, V と $\tilde V$ の dualizing sheaf とする。non-degenerate $\mathbb{C}$-bilinear pairing $\langle\ ,\ \rangle : R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V}) \times \omega_V/\psi_*(\omega_{\tilde V}) \longrightarrow \mathbb{C}$ を, 関係式 $\langle \alpha, \gamma\beta\rangle = \langle \gamma\alpha, \beta\rangle$ for $(\alpha;\beta,\gamma) \in R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V} \times \omega_V/\psi_*\omega_{\tilde V} \times \mathcal{O}_V$ が成立するように, <u>構成</u>できる (Serre [9], Laufer [6])。 ゆえに任意の ideal $I \subseteq \mathcal{O}_V$

に対して，次の duality が容易に確められる。

$$\{\alpha \in R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V} \mid \mathfrak{m}\cdot\alpha = 0\} \xleftrightarrow[\text{dual}/\mathbb{C}]{} \left(\omega_V/\psi_*(\omega_{\tilde V})\right) / \mathfrak{m}\cdot\left(\omega_V/\psi_*(\omega_{\tilde V})\right).$$

さて，$p_g(V,p) = p_a(V,p)$ ならば $\mathfrak{m}\cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V} = 0$ である（2.4）。上の duality により，$p_g(V,p) = \dim R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V}) = \dim \left(\omega_V/\psi_*(\omega_{\tilde V})\right)/\mathfrak{m}\cdot\left(\omega_V/\psi_*(\omega_{\tilde V})\right) = \dim \omega_V/\mathfrak{m}\omega_V + \psi_*(\omega_{\tilde V}) \leqq \dim \omega_V/\mathfrak{m}\omega_V$ = Cohen-Macaulay type. 証終

これは、命題（1.3）[3]，定理（2.16）[15]，定理B [16]，[7] などの研究の延長線上にある命題である。

例（2.6）（渡辺敬一先生による）$p_g - p_a$ = Cohen-Macaulay type となるような例をあげておく。genus g の curve X 上の line bundle $[-\alpha\cdot P] \longrightarrow X$；$P$ は X 上の一点，α は自然数，の zero-section をつぶして得られる特異点 (V,p) は Spec $R = V$，$R = \bigoplus_{n\geqq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(n\alpha P))T^n$ と書くことができる（[8]，[1]，参）。R の canonical module K_R は [2]，[13] により

$$K_R = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H^0(X, K_X\otimes\mathcal{O}_X(k\alpha P))T^k$$ と書け，

$p_g(V,p)$ は $p_g(V,p) = \sum_{k\geqq 0} \dim H^1(\mathcal{O}_X(k\alpha P))$ と書ける[8]。

$\alpha \geqq 2g+1$ ならば，$H^1(X, \mathcal{O}_X(n\alpha P)) = 0$　$n \geqq 1$，

$H^0(X, K_X\otimes\mathcal{O}_X(m\alpha P)) = 0$　$m \leqq -1$，そして，

$H^0(X, K_X) \otimes H^0(X, \mathcal{O}_X(n\alpha P)) \longrightarrow H^0(X, K_X \otimes \mathcal{O}_X(n\alpha P))$ は上射 for $n \geqq 1$ である。ゆえに，この時，$p_g = p_a =$ Cohen-Macaulay type $=$ genus of X である。

p_a はその定義により，resolution $\psi : (\tilde{V}, A) \longrightarrow (V, p)$ における例外集合 $A = \bigcup_{j=1}^{m} A_j$ の intersection matrix $(A_i \cdot A_j)$ によって決定できる数である。一方 p_g は $(A_i \cdot A_j)$ では決まらない。だが，特異点が good $\mathbb{C}^*$-action を持つ場合には，$R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ の m-adic filtration が，次の形で制限されることがわかる。

<u>定理 (2, 7)</u> (V, p) を 2 次元正規特異点であって good $\mathbb{C}^*$-action を持つとする。その時，任意の resolution $\psi : (\tilde{V}, A) \longrightarrow (V, p)$ に対して，次の不等式が成立する。

$$\dim\left(R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} / m R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} \right) \leqq p_a(V, p).$$

証明を述べる前に，すでに得られているこのノートの中の結果と組みあわせて，次の事が得られますことに注意しよう。

good $\mathbb{C}^*$-action を持つ特異点について，

(1) $m R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} = 0 \iff p_a(V, p) = p_g(V, p)$

(2) $p_a(V, p) = 0 \iff p_g(V, p) = 0$.

(3) $p_a(V,p) = 1 \iff \dim R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} / m \cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} = 1$

$\iff L(V,p) = p_g(V,p)$ かつ $p_g \neq 0$.

ただし，(2)は $\mathbb{C}^*$-actionの条件なしで，すでにM. Artinによって証明されている。

筆者には，"上のm-adic filtrationと p_a の直接対応"は興味深い事に思える。そして，$\mathbb{C}^*$-actionの存在の仮定しない場合に定理が成立するかどうかは，次に解くべき本質的な問題である。

<u>定理(2.7)の証明の概略</u>．次の命題を証明抜きで使おう。

<u>命題(2.8)</u>　2次元正規特異点(V,p)と非自明なpartial resolution $\psi:(\tilde{V},A) \longrightarrow (V,p)$であって，$\tilde{V}$が高々有理特異点しか持たないものを考えよ。この時，

(1) $$p_a(V,p) = \max\left\{ 1-\chi(\mathcal{O}_{\tilde{V}}/\mathcal{I}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{I}: \text{coherent ideal sheaf of } \mathcal{O}_{\tilde{V}} \\ \text{s.t. } \mathcal{I} \neq \mathcal{O}_{\tilde{V}},\ \mathrm{supp}(\mathcal{O}_{\tilde{V}}/\mathcal{I}) \subseteq A \end{array} \right\}$$

(2) 更に，右辺の $\mathcal{I}$ としてdivisorialなものに制限しても等号が成立する。

さて，我々は $\mathbb{C}^*$-actionを特異点の一般論([1]，[8]，[13] [14])により，curve X とその上の $\mathbb{Q}$-Weil divisor D を

用いて，　$R=\bigoplus_{k\geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(\llcorner kD \lrcorner))T^k$，$\mathrm{Spec}\, R = V$，

とあらわす。更に，partial resolution ψ を

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V} = \mathrm{Spec}\,(\bigoplus_{k\geq 0} \mathcal{O}_X(\llcorner kD \lrcorner)T^k) & \xrightarrow[\psi]{} & \mathrm{Spec}\, R \\ \cup & & \\ X & & \end{array}$$

として構成する。ここで，$|\psi^{-1}(p)| = X$ であり，$\tilde{V}$ は cyclic quotient singularity（特に rational singularity）を持つのみである。$D(m, \psi) = r_m \cdot X$，$r_m \in \mathbb{N}$ と書くと，

$\mathcal{O}_{\tilde{V}}(-r_m X) = \bigoplus_{k\geq r_m} \mathcal{O}_X(\llcorner kD \lrcorner)T^k$ が成立する（Remark (1.5)(ii) [14]）。そこで，次の完全列を見よ。

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to \psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}(-r_m X)) & \to & \psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) & \to & \psi_*(\mathcal{O}_{D(m,\psi)}) \\ \| & & \| & & \\ m & & \mathcal{O}_V & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \to R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}(-r_m X)) & \xrightarrow{h} & R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) & \to & R^1\psi_*(\mathcal{O}_{D(m,\psi)}) \to 0 \\ \| & & \| & & \\ \bigoplus_{k\geq r_m} H^1(X, \mathcal{O}_X(\llcorner kD \lrcorner)) & \to & \bigoplus_{k\geq 0} H^1(X, \mathcal{O}_X(\llcorner kD \lrcorner)) & & \end{array}$$

これより，h は単射であり，$\psi_*(\mathcal{O}_{D(m,\psi)}) \cong \mathbb{C}$ である。

ゆえに，$p_a(V, p) \geq 1 - \chi(\mathcal{O}_{D(m,\psi)}) = \dim H^1(\mathcal{O}_{D(m,\psi)})$

$= R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} / m \cdot R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}})$　である。　$\psi' : (V', A') \to (V, p)$

を任意の resolution とすると，$R^1\psi'_*(\mathcal{O}_{V'}) = R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ であることは標準的な議論で従う。　　　証明終

参考文献.

[1] M. Demazure: Anneaux gradués normaux, preprint.

[2] S. Goto, Kei-i. Watanabe: On graded rings I, J. Math. Soc. Japan vol. 30., 179 — 213 (1978).

[3] F. Hidaka, Kei-i. Watanabe: Normal Gorenstein surfaces with ample anti-canonical divisor, Tokyo J. Math. 4., 319 — 330 (1981).

[4] 樋口, 吉永, 渡辺(公): 多変数複素解析入門, 森北出版株式会社 . 1980.

[5] S. Itho: Analytically unramified local ring について, 可換環論シンポジウム報告集(第5回) 71—76 (1984).

[6] H. B. Laufer: On rational singularities. Amer. J. Math., 94. (1972) 597 — 608.

[7] S. Ohyanagi, E. Yoshinaga: A criterion for 2-dimensional normal singularities to be weakly elliptic. Science rep. of Yokohama National Univ. Ser II, vol 26, 5—7 (1979).

[8] H. Pinkham: Normal surface singularities with $\mathbb{C}^*$-action. Math. Ann. 227, 183 — 193 (1977).

[9] J. P. Serre: Un théorème de dualité. Comm.

Math. Helv. 29, 9–26 (1955).

[10] M. Tomari : A p_g-formula and elliptic singularities. preprint. R.I.M.S. No 458.

[11] ________ ：幾何種数の計算公式と楕円型特異点について（総合報告，その他），1984年3月．数理研シンポジウム"多様体の特異点の最近の成果"講究録．

[12] P. Wagreich : Elliptic singularities of surfaces, Amer. J. Math. 92, 419–454 (1970).

[13] Kei-ichi Watanabe : Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings. Nagoya. Math. J vol 83 (1981) 203–211.

[14] ____________ : Rational singularities with k^*-action in "Commutative algebra" Proc. Trento. Conf. edited by. S. Greco and G. Valla. 339–351. Lecture Note. Pure and applied Math. No 84 (1983). Marcel Dekker.

[15] Kimio Watanabe : On plurigenera of normal isolated singularities I. Math. Ann. 250, 65–94 (1980).

[16] S.S.-T. Yau : On maximally elliptic singularities Trans. A.M.S. 257, 269–329 (1980).