数理解析研究所講究録
543巻 1985年 104-112

環のfibre productの応用

高知大理 小駒哲司 (Tetsushi Ogoma)

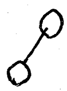
次の問を考える。

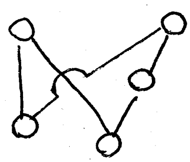
問 1. 環Aがuniversally catenaryであれば、Aはcodimension function, すなわち φ: Spec $A \longrightarrow \mathbb{Z}$ で $\varphi(\mathfrak{p})-\varphi(\mathfrak{q})=\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ ($\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{q}$) を満たすもの、をもつか?

この発端は次のことからである。よく知られているようにAがdualizing complexをもてば、Aは (1) universally catenary (2) codimension functionをもつ (3) canonical moduleをもつ (4) formal fibreがGorenstein (5) どんな有限生成A-algebra BについてもGorenstein locus Gor BがSpec BのZariski open setとなる、等が成立する。

逆に、localの場合には、本質的に(1),(3),(4)の性質をもてば、Aはdualizing complexをもつことを[3]で示した。これをlocalでない場合にも拡張したいわけであるが、この場合(4)の代わりに、(4)+(5)が必要となることはすぐわかるが

(1)の代わりに、(1)+(2)が本当に必要となるかというのが、この問である。

Aが local 又は domain の場合は、問1が肯定的であることはすぐわかる。反例が作れるとして、最も簡単なものと考えられるのは、素 ideal 鎖の内に右図を含むものであろう。但しここで  は、○が素 ideal で上が下を含みかつこの間には素 ideal が存在しないことを意味する。



もう一つの問を考えるのに、次の定義を思い出しておこう。

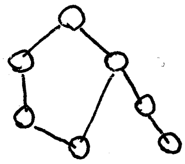
A-module M が local ring A の big Cohen Macaulay module とは、M-sequence $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n=\dim A$) が存在して、$M/(a_1,\ldots,a_n)M \neq 0$ となる時に言う。M-sequence になるかどうかということは、$a_1,\ldots,a_n$ の順序等にも依存するので、正確には M は $a_1,\ldots,a_n$ について big Cohen Macaulay module ということになる。

さて、M が balanced big Cohen Macaulay A-module (b.b.C-M A-module と略す) であるとは、M が A のどんな system of parameters (s.o.p と略す) についても、big Cohen Macaulay module となる時に言う。

問 2.（R.Y. Sharp [6, Problem 3.11, P246]）

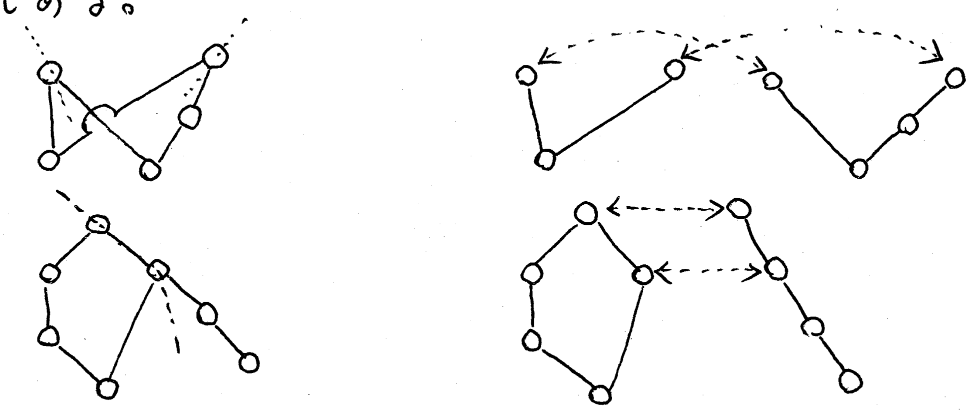
A を local ring，M を b.b. C-M A-module とする。素 ideal $\mathfrak{q}$ がある M-sequence $a_1, \ldots, a_r$ について，$\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}\, M/(a_1, \ldots, a_r)M$ となるとしよう。このとき局所化 $M_{\mathfrak{q}}$ は b.b. C-M $A_{\mathfrak{q}}$-module となるか？

A が catenary domain の場合には，肯定的であることを，Sharp 自身が示している [5, (4.3) Theorem]。もし反例があるとすれば，次のような素 ideal 鎖を持つ環が最も簡単なものであろう。



以上のような例を，今まで知られている例を使って，統一的に作れないか，というのが本稿の主題であるが，一般論の詳細は他稿に譲り，例の構成を中心にして話を進めよう。

さて，素朴なアイデアは，下図のように切り離した２つの環から，同一視によって元の環を構成できないか，ということである。



ここで参考になった事柄は、2つの平面が交わるvarietyは2つの平面を交差線で同一視したものと考えられるが、函数環の方で見れば、それは交差線で定義されるSpecのclosed set上の素idealを同一視していることに他ならない。そして、この同一視は函数環においてはfibre productで得られるという事実である。

そこでfibre productについて思い出してみよう。category $\mathcal{C}$ において、与えられた2つのmorphism $A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_0 \xleftarrow{\varphi_2} A_2$ に対し、可換図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\ A_2 \arrow[r, "\varphi_2"] & A_0 \end{tikzcd}$$

がfibre productであるとは

任意の可換図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\ A_2 \arrow[r, "\varphi_2"] & A_0 \end{tikzcd}$$

について、morphism $X \longrightarrow A$ がただ一つ存在して

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, dashed] \arrow[ddr] & & A_1 \arrow[dd] \\ & A \arrow[ur] \arrow[d] & \\ & A_2 \arrow[r] & A_0 \end{tikzcd}$$

が可換となるときに言う。

$\mathcal{C}$ が環(単位元をもつ可換環)のcategoryの場合には、fibre product A は直積 $A_1 \times A_2$ の部分環として

$$A = \{ (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2 \mid \varphi_1(a_1) = \varphi_2(a_2) \} \cdots (*)$$

で与えられることはよく知られている。これを $A_1 \times_{A_0} A_2$ と書く。

以下、記号を常に次の意味で使うことにする。環準同型の

可換図式
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & A_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\ A_2 \arrow[r, "\varphi_2"] & A_0 \end{tikzcd}$$
について、$\Phi = \varphi_1 \circ p_1 = \varphi_2 \circ p_2$,

$C = \varphi_1(A_1) \cap \varphi_2(A_2) \subseteq A_0$

$\mathfrak{a}_i = \mathrm{Ker}\,\varphi_i \quad (i=1,2)$

$V_0 = \{\Phi^{-1}(\mathfrak{q}) \mid \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}\, C\}$, $V_i = \{p_i^{-1}(\mathfrak{q}) \mid \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}\, A_i,\ \mathfrak{q} \not\supseteq \mathrm{Ker}\,\varphi_i\}$ $(i=1,2)$ とおく。

定理1. Aが fibre product $A_1 \times_{A_0} A_2$ であれば、次のことが成立する。

$\mathrm{Spec}\, A = V_0 \cup V_1 \cup V_2$ であり、V_0 は closed set であって $\mathrm{Spec}\, C$ に同型である。$\mathrm{Spec}\, A - V_0$ は $\mathrm{Spec}\, A$ の open set V_1 と V_2 の disjoint union でありかつ V_i は $\mathrm{Spec}\, A_i$ の $\mathfrak{a}_i$ で定義される open set とも同一視される。一方 $V_0 \cup V_i \simeq \mathrm{Spec}\, p_i(A)$ でありかつ $p_i(A) = A_i \times_{A_0} C = \varphi_i^{-1}(C)$ とも表わされる。$(i=1,2)$

証明については、key Lemma が次のものであることのみを述べるに止める。詳細は[4]を見て下さい。

補題 $A = A_1 \times_{A_0} A_2$, Fが flat な A-algebra であれば、次が成立。

$$F = A_1 \otimes_A F \times_{A_0 \otimes_A F} A_2 \otimes_A F$$

系 定理1において、φ_1, φ_2 が共に全射であれば、$\mathrm{Spec}\, A$ は $\mathrm{Spec}\, A_1$ と $\mathrm{Spec}\, A_2$ を closed set $\mathrm{Spec}\, A_0$ ではり合わせたものである。

本稿の例の構成には直接必要ではないが、fibre product の noether性について、参考の為に次の結果を挙げておく[4]。

定理 2.　A_1 と A_2 が noether 環であれば、$A_1 \times_{A_0} A_2$ が noether環となる必要十分条件は次の2つである。

(1)　$C = \varphi_1(A_1) \cap \varphi_2(A_2)$ が noether 環

(2)　$\mathfrak{a}_1/\mathfrak{a}_1^2$ と $\mathfrak{a}_2/\mathfrak{a}_2^2$ が共に finite C-module.

例 1.　codimension function を持たない universally catenary ring。

$(R, \mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1)$ を semilocal domain で、局所化 $R_{\mathfrak{m}_1}$, $R_{\mathfrak{n}_1}$ の次元がそれぞれ m と n $(m>n)$ の正則局所環となり、剰余環が同型 $R/\mathfrak{m}_1 = R/\mathfrak{n}_1 = K$ となるものとしよう。存在は、永田[1, Example 2] により知られている。

$(S, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}_2)$ を K上の多項式環 $K[x_1,\ldots,x_s]$ $(s \geq 1)$ の2つの極大 ideal での局所化で、$S/\mathfrak{m}_2 = S/\mathfrak{n}_2 = K$ となるような semilocal ring とする。したがって $\dim S_{\mathfrak{m}_2} = \dim S_{\mathfrak{n}_2} = s$。

さて、自然な環準同型 $\varphi_1 : R \longrightarrow R/(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{n}_1) = K \times K$ と $\varphi_2 : S \longrightarrow S/(\mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{n}_2) = K \times K$ を $\varphi_1^{-1}(K \times 0) = \mathfrak{m}_1$, $\varphi_1^{-1}(0 \times K) = \mathfrak{n}_1$, $\varphi_2^{-1}(K \times 0) = \mathfrak{m}_2$, $\varphi_2^{-1}(0 \times K) = \mathfrak{n}_2$ となるように定義する。そのとき、φ_1 と φ_2 の fibre product A は

2つの極大 ideal $\mathfrak{m}$ と $\mathfrak{n}$ をもつ semi-local ring であることが定理1からわかる。$\mathfrak{m}$ は $\mathfrak{m}_1$ と $\mathfrak{m}_2$ をはり合わせたものであり、$\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{n}_1$ と $\mathfrak{n}_2$ をはり合わせたものである。

A はそれぞれ $P_1 : A \longrightarrow R$ と $P_2 : A \longrightarrow S$ の核に対応する2つの minimal prime $\mathfrak{p}_1$ と $\mathfrak{p}_2$ を持ち、$A/\mathfrak{p}_1 = R$, $A/\mathfrak{p}_2 = S$ となることもわかる。よって、特に A は universally catenary である。

さて、今仮りに codimension function $\varphi : \operatorname{Spec} A \longrightarrow \mathbb{Z}$ が存在したと仮定しよう。$\varphi - \varphi(\mathfrak{p}_1)$ を考えることにより、$\varphi(\mathfrak{p}_1) = 0$ としてよい。すると、$A/\mathfrak{p}_1 = R$ であることから $\varphi(\mathfrak{m}) = \operatorname{ht} \mathfrak{m}_1 = m$, $\varphi(\mathfrak{n}) = \operatorname{ht} \mathfrak{n}_1 = n$ である。一方、$A/\mathfrak{p}_2 = S$ であることから、$\varphi(\mathfrak{p}_2) = \varphi(\mathfrak{m}) - \operatorname{ht} \mathfrak{m}_2 = m - s$ であるが、他方 $\varphi(\mathfrak{p}_2) = \varphi(\mathfrak{n}) - \operatorname{ht} \mathfrak{n}_2 = n - s$ でもなければならない。これは、$m > n$ であることに矛盾する。

例 2　　Sharp の問題の反例

$(R, \mathfrak{m})$ を $\dim R = 3$ の local domain で、長さ2の saturated chain $0 \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$ をもつものとする。このような環 R の存在は知られている。[3, §III]　今、$\varphi_1 : R \longrightarrow R/\mathfrak{p} = A_0$ を自然な準同型、$\varphi_2 : A_0[[x, y]] \longrightarrow A_0$ を A_0-準同型で、$\varphi_2(x) = \varphi_2(y) = 0$ で定義されるものとする。

このとき、φ_1とφ_2のfibre product Aを考えれば、射影 $p_1: A \longrightarrow R$, $p_2: A \longrightarrow A_0[[x, y]] = A_2$ の核にそれぞれ対応する素ideal $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ が A の minimal prime 全体となることが定理1よりわかる。

今、A-module Mを、$M = K(\mathfrak{q}_1) \oplus A/\mathfrak{q}_2$ $\left(K(\mathfrak{q}_1) = A_{\mathfrak{q}_1}/\mathfrak{q}_1 A_{\mathfrak{q}_1}\right)$ とおけば、Mは b.b.C-M A-module となる。実際 $A/\mathfrak{q}_2 = A_0[[x, y]] = A_2$ は3次元 Cohen Macaulay ring で、A のどの system of parameters の $A/\mathfrak{q}_2$ における像も $A/\mathfrak{q}_2$ の s.o.p となるから、$A/\mathfrak{q}_2$ は有限生成 b.b.C-M A-module である。一方、$z\ (\in A)$ が A の s.o.p の一部となれば、z は $K(\mathfrak{q}_1)$ の regular element でありかつ $K(\mathfrak{q}_1)/zK(\mathfrak{q}_1) = 0$ となる。よって M は b.b.C-M A-module となる。

今、A の ideal $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2$ について、$A/\mathfrak{p} = A_0$ であるから、$\mathfrak{p}$ は A の素ideal である。さて、$b \in \mathfrak{z} - 0$ について $(*)$ の表示で、$a_1 = (b, x)$, $a_2 = (0, y)$ とおけば、$a_1, a_2 \in A$ であって、これらは M-regular sequence となる。また

$$M/(a_1, a_2)M = K(\mathfrak{q}_1)/bK(\mathfrak{q}_1) \oplus A_2/(x, y)A_2 = A_0$$

であるから、$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A M/(a_1, a_2)M$ もわかる。

一方、$\mathfrak{p}$ における局所化 $M_{\mathfrak{p}} = K(\mathfrak{q}_1) \oplus A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}_2 A_{\mathfrak{p}}$ を考えると、$a_2 = (0, y)$, $a_1 = (b, x)$ は $A_{\mathfrak{p}}$ の s.o.p となるけれど、a_2 は $M_{\mathfrak{p}}$ の regular element ではない。すなわ

ち $M_{\mathfrak{p}}$ は、b.b. C-M $A_{\mathfrak{p}}$-module でない。

REFERENCES

[1] M. Nagata, Local rings, John Wiley, New York (1962).

[2] T. Ogoma, Non-catenary pseudo-geometric normal rings, Japan J. Math. 6 (1980) 147-163

[3] T. Ogoma, Existence of dualizing complexes, J. Math. Kyoto Univ. 24 (1984) 27-48

[4] T. Ogoma, Fibre products of Noetherian Rings and their applications, to appear in Math. Proc. Camb. Phil. Soc.

[5] R. Y. Sharp, A cousin complex characterization of balanced big Cohen Macaulay modules, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 90 (1981) 229-238

[6] R. Y. Sharp ed., Commutative Algebra: Durham 1981, London Math. Soc. Lect. Notes 72.