数理解析研究所講究録
543巻 1985年 92-103

アルティン局所環上の加群の長さについて

都立大・理　石川武志 (Takeshi Ishikawa)

Rをアルティン局所環，$\mathfrak{m}$をその極大イデアルとする。Rが Gorenstein環 であるためには，Rの任意のイデアル$\mathfrak{a}$に対して　$\ell(\mathfrak{a}) + \ell(0:\mathfrak{a}) = \ell(R)$ が成り立つことが必要十分であることは，よく知られている（c.f. [1]）。こゝで，アルティンR-加群Mに対して $(0:M)$はその Annihilator，$\ell(M)$ はMの長さを表わす。さて，多くの場合，$\ell(\mathfrak{a}) + \ell(0:\mathfrak{a}) \geq \ell(R)$ であるが，このことは一般に成立する訳ではない。では，どの様なときこれが成立するのだろうか？この問題をあつかうのには，$\ell(R/0:\mathfrak{a})/\ell(\mathfrak{a}) \leq 1$　かどうかを考える方が都合がよいので，次の様に定義する。

<u>定義</u>　アルティンR-加群Mに対して

$$t(M) = t_R(M) = \begin{cases} \ell(R/0:M)/\ell(M) & (M \neq 0) \\ 1 & (M = 0) \end{cases}$$

$T(M) = T_R(M) = \sup_N t(N)$，こゝでNはMの部分加群すべてを動く，とする。

以下，Rをアルティン局所環，$\mathfrak{m}$をその極大イデアルとする。又R-加群は有限生成R-加群を意味するものとし，R-加群Mの Socle を $\mathrm{Soc}(M) = (0 :_M \mathfrak{m})$，Mの type を $r(M) = \ell(0 :_M \mathfrak{m})$ で表わし，$\mu(M)$はMの極小生成系の元の個数を表わすものとする。

§1. $t(M)$，$T(M)$の上限，下限.

まず，次のことが成り立つことは明らかであろう。

(1.1) Proposition

(1) $\mathfrak{m}M = 0 \Rightarrow t(M) = 1/r(M) \leqq 1$.

(2) Mが cyclic $\Rightarrow t(M) = 1$.

これから直ちに

(1.2) Corollary

$$\mathfrak{m}^2 = 0 \Rightarrow T(R) = 1.$$

$t(M)$，$T(M)$の上限，下限について，次が成り立つ。

(1.3) Theorem

R-加群$M \neq 0$に対して

(1) $1/r(M) \leqq t(M) \leqq r(M)$，従って

(2) $1 \leqq T(M) \leqq r(M)$

(証明)

(2)は(1)より明らかだから(1)を示せばよい。$E = E(R/\mathfrak{m})$を$R/\mathfrak{m}$の injective envelope とすると，[2]より，

$M \hookrightarrow E^{\nu(M)}$ で $R/0:M \hookrightarrow Hom_R(M,M) \hookrightarrow Hom_R(M,E)^{\nu(M)}$ 従って，$\ell(R/0:M) \leqq \nu(M)\cdot \ell(Hom_R(M,E))$ を得る。又[2]より $\ell(M)=\ell(Hom_R(M,E))$ だから，$t(M) \leqq \nu(M)$ が得られる。一方，$M \cong Hom_R(R/0:M, M) \hookrightarrow Hom_R(R/0:M, E)^{\nu(M)}$ より同様にして $1/\nu(M) \leqq t(M)$ が得られる。 //

又，上の Theorem に於て，等号の成立に関して，次が成り立つ。

(1.4) <u>Theorem</u>

R-加群 $M \neq 0$ に対して，次の条件は同値である。

(1) $T(M) = \nu(M)$

(2) $\nu(M) = 1$

(3) すべての R-部分加群 N に対して，$t(N) = 1$.

(証明)

(1)を仮定すると，ある部分加群 N があって，$t(N) = \nu(M)$ であるから，(1.3)の証明と同様に，$R/0:N \hookrightarrow Hom_R(N,N) \hookrightarrow Hom_R(N,M) \hookrightarrow Hom_R(N,E)^{\nu(M)}$ であり，両端の加群の長さを比較して，$R/0:N \cong Hom_R(N,E)^{\nu(M)}$ を得るが，R は局所環だから，$\nu(M)=1$ でなければならない。次に $\nu(M)=1$ とすると，任意の部分加群 $N \neq 0$ に対して $\nu(N)=1$ であり従って(1.3)より $t(N)=1$，従って又 $T(M)=1=\nu(M)$ で(1)及び(3)が成立する。又，(3)を仮定すれば，

$t(\mathrm{Soc}(M)) = 1/r(M)$ だから $r(M) = 1$ でなければならない。//

こゝで，$M=R$ とおけば，はじめに述べた classical result が得られる。即ち．

(1.5) Corollary

R が Gorenstein i.e. $r(R) = 1$

$\Longleftrightarrow$

任意のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して $l(\mathfrak{a}) + l(0:\mathfrak{a}) = l(R)$

次に上の Theorem の不等式は，ある意味で best possible であることを示そう。

(1.6) Proposition

任意の整数 $r \geqq 2$ と任意の小さな実数 $e > 0$ に対して，$r(R) = r$ で $r - e < T(R) < r$ となるアルティン局所環 R が存在する。

(証明)

K を体，$X_i^{(k)}$, Y_i ($i = 1, \cdots, n$, $k = 1, \cdots, r$) を不定文字とし，$R = K[X_i^{(k)}, Y_i \mid 1 \leqq i \leqq n, 1 \leqq k \leqq r]/I = K[x_i^{(k)}, y_i \mid 1 \leqq i \leqq n, 1 \leqq k \leqq r]$，こゝで $I = (X_i^{(k)} \mid 1 \leqq i \leqq n, 1 \leqq k \leqq r)^2 + (Y_i \mid 1 \leqq i \leqq n)^2 + (X_i^{(k)} Y_j \mid 1 \leqq i \neq j \leqq n, 1 \leqq k \leqq r) + (X_i^{(k)} Y_i - X_j^{(k)} Y_j \mid 1 \leqq i, j \leqq n, 1 \leqq k \leqq r)$ とする。R は $\mathfrak{m} = (x_i^{(k)}, y_i \mid 1 \leqq i \leqq n, 1 \leqq k \leqq r)$ を極大イデアルとする局

所環で, $\mathfrak{m}^2=(x_1^{(1)}y_1,\cdots,x_1^{(r)}y_1)$, $\mathfrak{m}^3=0$. 従って $\ell(R)=rn+n+r+1$ 。又 $(0:\mathfrak{m})=\mathfrak{m}^2$ だから $r(R)=r$ である。さて, $\mathfrak{a}=(y_1,\cdots,y_n)$ とすると, $0:\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$ で $\mathfrak{a}\mathfrak{m}=\mathfrak{m}^2$ だから $\ell(\mathfrak{a})=\ell(0:\mathfrak{a})=n+r$。故に $t(\mathfrak{a})=\dfrac{rn+1}{r+n}=r-\left(\dfrac{r^2-1}{r+n}\right)$, 従って n を十分大きくとれば求める Example が得られる。 //

§2. いつ $T(R)=1$ となるか?

R が Gorenstein なら $T(R)=1$ であるが, その逆は成立しない。

(2.1) Example

K を体, $X_1,\cdots,X_n$ を不定文字とし, $R=K[X_1,\cdots,X_n]/(X_1,\cdots,X_n)^m=K[x_1,\cdots,x_n]$ とする。任意の $f\in R$ に対して, ある k があって $(0:f)=(x_1,\cdots,x_n)^{m-k}$ が成り立つから, R の任意のイデアル $\mathfrak{a}=(f_1,\cdots,f_s)$ に対して, $(0:\mathfrak{a})=\bigcap_{i=1}^{s}(0:f_i)=(0:f_t)$ となる t がある。従って, $t(\mathfrak{a})=\ell(R/0:f_t)/\ell(\mathfrak{a})=\ell(Rf_t)/\ell(\mathfrak{a})\leqq 1$. 故に $T(R)=1$ 。しかし, 明らかに $n,m\geqq 2$ に対して R は Gorenstein ではない。 //

T. H. Gulliksen [3] は $r(R)\leqq 3$ ならば, 任意の忠実な R-加群 M に対して, $\ell(M)\leqq\ell(R)$ であることを示してい

る。彼のこの結果は，次の様に述べることができる。

(2.2) <u>Theorem</u> (Gulliksen)

R-加群 $M \neq 0$ に対して

$$\ell(R/0:M) \leqq 3 \Rightarrow t(M) \leqq 1.$$

こゝで，この結果の別証明(本質的には彼の証明と同じだが)を与えよう。まず

(2.3) <u>Lemma</u>

$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ を R-加群の完全系列とし，$t(M') \leqq 1$，$t(M'') \leqq 1$ とする。もし $t_{R/0:M}\left(\frac{0:M'}{0:M}\right) \geqq 1$ 又は $t_{R/0:M}\left(\frac{0:M''}{0:M}\right) \geqq 1$ ならば $t(M) \leqq 1$.

(証明)

L が $R/\mathfrak{a}$-加群なら $t_R(L) = t_{R/\mathfrak{a}}(L)$ だから，M は忠実と仮定してよい。そうすると $(0:M')(0:M'') = 0$ であるから $0:M' \subseteq 0:(0:M'')$，$(0:M'') \subseteq 0:(0:M')$ であり従って $t(0:M')$ 又は $t(0:M'') \geqq 1$ の仮定から $\ell(0:M') + \ell(0:M'') \leqq \ell(R)$ である。従って $\ell(M) - \ell(R) = \ell(M') + \ell(M'') - \ell(R) \geqq (\ell(M') + \ell(0:M') - \ell(R)) + (\ell(M'') + \ell(0:M'') - \ell(R))$。故に，$t(M') \leqq 1$，$t(M'') \leqq 1$ より $t(M) \leqq 1$ が得られる。 //

この Lemma から直ちに

(2.4) Corollary

$\mu(M)=2$ とし $\{m_1, m_2\}$ を M の極小生成系とするとき，$i=1, 2$ のいずれかに対して $t_{R/0:M}\left(\frac{0:m_i}{0:M}\right) \geqq 1$ なら，$t(M) \leqq 1$ である。

(定理の証明)

まず，M は忠実と仮定してよい。そこでもし主張が正しくないとすると，$\ell(M)$ が最小の反例 M をとることができる。このとき，任意の部分加群 $M' \neq 0$ に対して，$(0:M') \neq 0$ $(0:M/M') \neq 0$。$\{m_1, \cdots, m_d\}$ を M の極小生成系とし，M_i を m_i 以外の m_j すべてで生成される部分加群とする。このとき，すべての i について $(0:(M_i+mM)) \neq 0$ で

$$\bigoplus_{i=1}^{d} (0:(M_i+mM)) \subseteq (0:mM) = (0:m)$$

従って，$d \leqq 3$ がわかる。$d=1$ なら (1.1) より $t(M)=1$. $d=2$ のときは，$t(R) \leqq 3$ だから $\ell(0:(M_i+mM))$ $i=1, 2$ のいずれかは 1 であり，$t(0:M_1)$ 又は $t(0:M_2)=1$ となる。従って，(2.4) より $t(M) \leqq 1$．故に $d=3$ でこのとき

$$\bigoplus_{i=1}^{3} (0:(M_i+mM)) = (0:mM) = (0:m)$$

であり，$(0:m)M = \sum_{i=1}^{3}(0:(M_i+mM))M = \sum_{i=1}^{3}(0:(M_i+mM))m_i$ $= \left(\sum_{i=1}^{3}(0:(M_i+mM))\right)m = (0:M)m$，ここで $m = m_1+m_2+m_3$．極小生成系をとりかえて，$m=m_1$ としてよいから，

次の完全系列を得る。

$$0 \longrightarrow (0:(Rm_1+\mathfrak{m}M)) \longrightarrow (0:\mathfrak{m}M) \xrightarrow{m_1} (0:\mathfrak{m})M \longrightarrow 0$$

こゝで $(0:(M_2+\mathfrak{m}M)) \oplus (0:(M_3+\mathfrak{m}M)) \subsetneqq (0:(Rm_1+\mathfrak{m}M))$ だから $\ell(0:(Rm_1+\mathfrak{m}M)) \geqq 2$，従って $\ell((0:\mathfrak{m})M)=1$．そこで，もし $(0:\mathfrak{m})M = \mathrm{Soc}(M)$ が示されれば，(1.3)より $t(M)=1$ となり，矛盾が導かれ，証明が完了する。もし $\mathrm{Soc}(M)=(0:\mathfrak{m})M \oplus N$，$N \neq 0$ とすると，Mのとり方から $(N:M)\neq 0$ だから ある $r \neq 0 \in R$ があって $0 \neq rM \subseteqq N \subseteqq \mathrm{Soc}(M)$。従って $r\mathfrak{m}M=0$ 故に $r\mathfrak{m}=0$。故に $0 \neq rM \subseteqq (0:\mathfrak{m})M \cap N = 0$．これは矛盾，従って $N=0$．これで定理の証明は終った。 //

この結果から次の二つの場合に $T(R)=1$ となることがわかる。

(2.5) <u>Proposition</u>

$\ell(R) \leqq 6 \Rightarrow T(R)=1$

(証明)

$\mathfrak{a} \in R$ のイデアルとする。$\ell(0:\mathfrak{m})=1$ ならよいから，$\ell(0:\mathfrak{m}) \geqq 2$ とする．従って $\ell(0:\mathfrak{a}) \geqq 2$．又，$\mathfrak{m}\mathfrak{a}=0$ なら (1.1) より $t(\mathfrak{a}) \leqq 1$ だから $\mathfrak{m}\mathfrak{a} \neq 0$ としてよい。そうすると $\ell(0:\mathfrak{m}\mathfrak{a}) \leqq 5$，従って $r(R/0:\mathfrak{a}) = \ell(0:\mathfrak{m}\mathfrak{a}/0:\mathfrak{a}) \leqq 3$，故に (2.2) より $t(\mathfrak{a}) \leqq 1$ //

(2.6) Proposition

$\mu(\mathfrak{m}) \leqq 3$, $\mathfrak{m}^2 M = 0 \Rightarrow t(M) \leqq 1$.

従って

$\mu(\mathfrak{m}) \leqq 3$, $\mathfrak{m}^3 = 0 \Rightarrow T(R) = 1$.

(証明)

前半を示せばよい。(1.1)より $\mathfrak{m}M \neq 0$ としてよい。このとき $(0:\mathfrak{m}M) = \mathfrak{m}$, $(0:M) \supseteqq \mathfrak{m}^2$, 従って $l(R/0:M) = l\left(\frac{0:\mathfrak{m}M}{0:M}\right) \leqq l(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \mu(\mathfrak{m}) \leqq 3$. 故に(2.2)より $t(M) \leqq 1$. //

$\mu(\mathfrak{m}) = 4$ のとき，次が成り立つ。

(2.7) Proposition

$\mu(\mathfrak{m}) = 4$, $\mathfrak{m}^3 = 0 \Rightarrow T(R) \leqq 5/4$

(証明)

$\mathfrak{a}$ を $t(\mathfrak{a}) = T(R) > 1$ となるイデアルとすると $\mathfrak{a}\mathfrak{m} \neq 0$, $\mathfrak{a}\mathfrak{m}^2 = 0$ だから，次の完全系列を得る。

$$0 \longrightarrow \frac{0:\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}^2} \longrightarrow \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} \longrightarrow \frac{0:\mathfrak{a}\mathfrak{m}}{0:\mathfrak{a}} \longrightarrow 0$$

もし $\mathfrak{m}^2 \subsetneqq 0:\mathfrak{a}$ なら $l(R/0:\mathfrak{a}) = l(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) - l\left(\frac{0:\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}^2}\right) \leqq 3$ であり(2.2)より $t(\mathfrak{a}) \leqq 1$ となるから $0:\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^2$ で，$t(\mathfrak{a}) = l(R/\mathfrak{m}^2)/l(\mathfrak{a}) = 5/l(\mathfrak{a})$。一方，もし $\mathfrak{a}\mathfrak{m} \subsetneqq \mathfrak{a} \cap (0:\mathfrak{m})$ なら $a \in \mathfrak{a} \cap (0:\mathfrak{m})$ で $a \notin \mathfrak{a}\mathfrak{m}$ なる a がある。a を $\mathfrak{a}$ の極小生成系の一つとして $\mathfrak{a} = Ra + \mathfrak{a}'$ とすると

$(0:\mathfrak{a}) = (0:\mathfrak{a}')$ であり $t(\mathfrak{a}) < t(\mathfrak{a}')$ となるから, $\mathfrak{a}\mathfrak{m} = \mathfrak{a} \cap (0:\mathfrak{m}) = \mathrm{Soc}(\mathfrak{a})$。従って (1.3) より $\ell(\mathfrak{a}\mathfrak{m}) \geqq 2$. 又, (1.1) より $\mu(\mathfrak{a}) \geqq 2$. 故に $\ell(\mathfrak{a}) = \mu(\mathfrak{a}) + \ell(\mathfrak{a}\mathfrak{m}) \geqq 4$, 従って $t(\mathfrak{a}) \leqq 5/4$. //

上のことから, $T(R) > 1$ となる例で, できる限り「小さい」ものを作るとすれば, $\ell(R) = 7$, $\mathfrak{m}^3 = 0$, $\mu(\mathfrak{m}) = 4$ でなければならない。この様な例は実際に存在する。

(2.8) <u>Example</u> (S. Endo)

K を体, X, Y, Z, W を不定文字とし, $R = K[X,Y,Z,W]/(X^2, Y^2, Z^2, W^2, XZ, XW, YZ, YW) = K[x,y,z,w]$ とすると, $\mathfrak{m} = (x,y,z,w)$, $\mathfrak{m}^2 = (xy, zw)$, $\mathfrak{m}^3 = 0$ で, $\ell(R) = 7$. $\mathfrak{a} = (x+z, y+w)$ とすると $\mathfrak{a}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2 = (0:\mathfrak{a})$ で $\ell(\mathfrak{a}) = 4$, $\ell(0:\mathfrak{a}) = 2$. 従って $t(\mathfrak{a}) = 5/4$. 故に (2.7) より $T(R) = 5/4$. //

§3. <u>おわりに</u>

T を不定文字とし, $R[t] = R[T]/(T^2)$ とする。このとき, $T(R) \leqq T(R[t])$ であることは容易にわかる。

(3.1) <u>Problem</u>

$T(R) \lneqq T(R[t])$ となる例は存在するか?

筆者は，いくつかの例についてあたってみたが，その様な例を見つけることはできなかった。(2.8)の例についても，$T(R) = T(R[x])$ である。

一般に，ネーター局所環$(R, \mathfrak{m})$に対しても，$T(R) = \sup T(R/\mathfrak{q})$，ここで$\mathfrak{q}$は$R$のパラメータ・イデアルすべてを動く，として$T(R)$を定義しよう。このとき，

(3.2) <u>Problem</u>

(1) $T(R) = T(R[[X]])$?

(2) $T(R) < \infty$?

これに関して，Goto-Suzuki [4]によれば，Rのtype $t(R) = \sup_{\mathfrak{q}} (R/\mathfrak{q})$は$\dim R \leqq 3$のときは有限であり，従って$T(R) < \infty$であることはわかるが，$\dim R \geqq 4$では，Goto-Suzukiは$t(R) = \infty$となることがあることを示しているが，上の$T(R)$についてはどうであろうか？

最后に，

(3.3) <u>Problem</u>

$T(R) = 1$となる局所環Rをcharacterizeせよ。

この場合，RをCohen-Macaulayと仮定して考える

のが自然であろう。この様なものを考えることは，Gorenstein と Cohen-Macaulay の間をうめるものとして，意味のないことではないと思うのだが….

References

1 W.Gröbner, Über Irreduzible Ideale in Kommutative Ringen, Math. Ann., 110(1934).

2 E.Matlis, Injective modules over noetherian rings, Pacific J. Math., 8(1958).

3 T.H.Gulliksen, On the length of faithful modules over Artinian local rings, Math. Scand.,31(1972).

4 S.Goto-N.Suzuki, Index of reducibility of parameter ideals in a local ring, J.Algebra, 87(1984).

5 T.Ishikawa, On the length of modules over Artinian local rings, Tokyo J. Math., in press.