

Hankel 作用素と ordered group 上の Hardy 空間

北大教養 中路貴彦 (Takahiko Nakazi)

抽象的 Hardy 空間で定義される compact Hankel 作用素を調べる。それは almost periodic function の Hardy 空間で compact Hankel 作用素は零しかないという新しい結果を与える。

Hankel-type 作用素。 A を compact Hausdorff 空間 X 上の関数環とする。 X 上の連続関数全体のなす関数環を $C(X)$ と書く。 $\varphi \in C(X)$ について、 $S_{\varphi}f = \varphi f + A$, $f \in A$ は Hankel-type 作用素と呼ばれる。 全ての $\varphi \in C(X)$ について、 S_{φ} が弱 compact のとき、 A は tight であるという。 Cole と Gamelin [1] は tight である関数環を研究した。 disc 環は tight であるが big disc 環は tight ではない。

Big disc 環。 disc 環とは単位円周 T 上で、 z^n ($n > 0$) と 1 で生成される関数環である。 big disc 環とは $T \times T$ 上

で、 $Z^n W^m$ ($n\alpha + m\beta > 0$) と 1 で生成される関数環である。ここで β/α は無理数とする。disc 環で成り立つ多くの重要な結果が、big disc 環では成立しないかまたは形を変えて成立しても新しいアイデアなしにはその結果を得られないという意味で、big disc 環は興味ある。

Hankel 作用素。 τ_0 を関数環 A 上の乗法的線形汎関数とし、 m を τ_0 の表現測度とする。 $\varphi \in L^\infty(m)$ について、Hankel 作用素 H_φ を

$$H_\varphi f = \varphi f + H^2(m), \quad f \in H^2(m)$$

で定義する。ここで抽象的 Hardy 空間 $H^2(m)$ は A の $L^2(m)$ での閉包である。 A が disc 環で m が正規 Lebesgue 測度するとき、 $H^2(m)$ は Hardy 空間であり H_φ は古典的 Hankel 作用素である。このとき、 H_φ が compact である必要十分条件は $\varphi \in H^\infty(m) + C(X)$ となる。これは Hartman (1958年) の定理である。 A が big disc 環のときはどうかという問題は自然であるが、次の定理は H_φ が compact である必要十分条件は $\varphi \in H^\infty(m)$ を示している。これは disc 環のときと著しく異なる。定理は筆者が Iowa 大学を訪問した時に、Curto、Muhly、Xia 氏と共同研究したもので、[2] に詳しく述べられている。

定理 m が Σ_0 の一意な表現測度のときに、compact Hankel 作用素は零だけである必要十分条件は Σ_0 の Gleason part は Σ_0 だけであることである。

証明 について。 $B = \{ \varphi \in L^\infty(m) : H_\varphi \text{ は compact} \}$ とすると、 B は $L^\infty(m)$ の一様ノルム閉部分環で $H^\infty(m)$ を含む。 $B = H^\infty(m)$ となることは compact Hankel 作用素は零だけと同じことである。 $f \in H^\infty(m)$ を定数ではない unimodular 関数として、 $[H^\infty(m), \bar{f}]$ を $H^\infty(m)$ と \bar{f} で生成される一様ノルム閉部分環とすると、

$$B \subset [H^\infty(m), \bar{f}]$$

となる。この段階で、disc 環の場合の $B = H^\infty(m) + C(X)$ は $f = z$ として簡単に得られる。 Σ_0 の Gleason part が Σ_0 だけであるとして、 $B = H^\infty(m)$ を示したい。 $H^\infty(m)$ が $L^\infty(m)$ で極大な *弱閉部分環とする。big disc 環はこの場合である。このとき、

$\psi, \bar{\psi} \in B$ かつ $|\psi| = 1$ ならば、 $\|\psi + H^\infty(m)\| < 1$ を示すことができる。これは disc 環では決して起らない現象である。何故なら $\psi = z$ としてみると、 $\|z + H^\infty(m)\| = 1$ となるからである。上の現象は $f \in H^\infty(m)$ を定数ではない unimodular 関数とすると、不変部分空間 $fH^2(m)$ は $H^2(m)$

で infinite codimension をもつということから生じる。上の現象より $B = H^{\infty}(m)$ が導びかれる。 $H^{\infty}(m)$ が $L^{\infty}(m)$ の極大な $*$ 弱閉部分環とならないとき、上の結果と Kallenborn と König の結果を使って示すことができる。König 等の結果とは、 D を $L^{\infty}(m)$ の任意の $H^{\infty}(m)$ を含む $*$ 弱閉部分環とすると、 $L^{\infty}(m)$ から $D \cap \bar{D}$ への conditional expectation は D 上で乗法的になるというもので、これは [4] で筆者によって残された問題に答えている。

Bounded analytic almost periodic function。 Γ を実数 R の subgroup として、離散的位相を入れる。 $f(z) = \sum c_j e^{it_j z}$ ($0 < t_j \in \Gamma$) とすると、 f は上半平面で bounded analytic (almost) periodic function となる。 Γ が整数 Z のとき、 f は periodic になる。 G を Γ の compact dual group とする。 Γ が R で普通の位相で稠密なとき、 $\Gamma \cong Z$ かつ $G \cong T$ となる。 Γ が R で稠密なとき、 G は R の compactification となる。bounded analytic (almost) periodic function を G 上でとらえるために、 $F = \sum c_a X_a$ ($0 \leq a \in \Gamma$) を考える。ここで X_a は G 上の character である。 Γ が R で稠密なとき、 F を R に制限して、上半平面に拡大すると、bounded almost periodic function が得られる。 $A(G)$ を

上の形の F の G 上の一様ノルム閉包とすると、関数環となる。big disc 環では、 (n, m) を $n\alpha + m\beta$ と写す $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ から \mathbb{R} の subgroup への order preserving isomorphism があるので、 $A(G)$ の一つのタイプである。

Ordered group. Γ を任意の離散 abelian group、 G をその compact dual group とする。 Γ_+ を Γ に含まれる semigroup で、 $\Gamma_+ \cup (-\Gamma_+) = \Gamma$ かつ $\Gamma_+ \cap (-\Gamma_+) = \{0\}$ とすると、 Γ_+ は Γ に order を与え、 Γ は ordered group と呼ばれる。 $A(G) = \{f \in C(G) : \hat{f}(\gamma) = 0 \quad \gamma < 0\}$ とすると、 $A(G)$ は G 上の関数環となる。almost periodic function の所で現われた $A(G)$ は Γ が \mathbb{R} の subgroup という特殊なときである。 σ を G 上の Haar 測度とすると、 σ は Σ_0 の一意な表現測度となる。ここで $\Sigma_0(f) = \hat{f}(0)$ $f \in A(G)$ とする。Cole と Gamelin [1] は $A(G)$ が tight である必要十分条件は Γ が \mathbb{Z} であることを示した。上の定理は、零でない compact Hankel 作用素が存在する必要十分条件は Γ の中に最小の positive な元が存在することであると云っている。

付則. $H^\infty(d\sigma)$ を bounded analytic function の T 上

境界値とする。これは disc 環 A の $L^\infty(\partial D)$ での $*$ 弱閉包と一致する。 $H^\infty(\partial D)$ の極大イテアル空間は単位円板を一つの Gleason part として含む。しかしそれ以外にも、多くの極大イテアル空間の点 τ_0 が存在する。 τ_0 の表現測度は一意であるから上の定理が適用できる。筆者と Curto, Muhly 氏は更に多変数の Hankel 作用素を調べた。それは [3] に詳しく書かれている。

参考文献

1. B. Cole and T. Gamelin, Tight uniform algebras and algebras of analytic functions, J. Functional Analysis 46 (1982), 158-220.
2. R. Curto, P. Muhly, T. Nakazi and J. Xia, Hankel operators and uniform Algebras, to appear in Archiv Der Math..
3. R. Curto, P. Muhly and T. Nakazi, Uniform algebras, Hankel operators and invariant subspaces, to appear in IX Conference in Operator Theory.
4. R. Kallenborn and H. König, An invariant subspace theorem in the abstract Hardy algebra theory, Arch. ^{Der} Math. 39 (1982), 51-58.