数理解析研究所講究録
544巻 1985年 22-38

正定値作用素の平均に関連した不等式

富山大 理　久保文夫 (Fumio Kubo)
北大応電研　安藤 毅 (Tsuyoshi Ando)

§1. 非負定値作用素の算術平均と調和平均．　ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の非負定値な有界線型作用素を以下簡単に非負定値作用素と呼びます。非負定値作用素の算術平均と調和平均とを次式で定義します：

$$a(A, B) = (A+B)/2, \quad h(A, B) = 2(A:B).$$

但し $A:B$ は並列和と呼ばれる演算で次式で定義されます：

$$A:B = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [(A+\varepsilon I)^{-1} + (B+\varepsilon I)^{-1}]^{-1}.$$

本講演では，この2つの平均を組合わせて作られるある型の平均の間の不等式について述べます．先ず算術平均と調和平均についての基本的で良く知られた性質を復習しておきます：　$m = a$ 又は h とすると

(対称性)　$m(A, B) = m(B, A)$,

(凹　性)　$m(A+B, C+D) \geq m(A, C) + m(B, D)$,

(同次性)　$C^* m(A, B) C \leq m(C^*AC, C^*BC)$

及び

$$\alpha\cdot m(A,B) = m(\alpha A, \alpha B) \qquad (\forall\alpha>0),$$

（半連続性）　$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} m(A+\varepsilon I, B+\varepsilon I) = m(A,B)$,

（正規性）　$m(A,A) = A$,

（双対性）　$h(A,B) = a(A^{-1}, B^{-1})^{-1}$　（A, B：可逆）.

次に算術平均はそれ自身線型演算のみで単純なものですが，調和平均に対しては一種の準線型化と言うべき極値問題の解としての表現があります：

$$\langle h(A,B)z|z\rangle = 2\inf\{\langle Ax|x\rangle + \langle By|y\rangle : z = x+y\}$$

及び

$$h(A,B) = \max\left\{X \geqq 0 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 2A-X & X \\ X & 2B-X \end{bmatrix} \geqq 0 \text{ on } \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\right\}.$$

また，これらの平均は次のように一種の functional calculous と言うべき表現も持ちます：　$h(t) = 2t/(t+1)$　$(t\geqq 0)$ とすると，

$$h(A,B) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} B_\varepsilon^{1/2}\, h(B_\varepsilon^{-1/2} A B_\varepsilon^{-1/2})\, B_\varepsilon^{1/2} \quad (\text{但し } B_\varepsilon = B+\varepsilon I).$$

§2. 平均の不等式.　非負定値作用素の算術及び調和の平均に対しても，正数の平均と同様の不等式が成立ちます.

定理. $A, B \geqq 0 \Rightarrow a(A,B) \geqq h(A,B)$　で特に

$a(A,B) = h(A,B) \Leftrightarrow A = B$.

この算術−調和間の不等式の部分の証明には数の場合と同様いくつかのアプローチができます．　3つほど挙げてみましょう．

(その1)．調和平均の凹性不等式で $C=B,\ D=A$ と置くと $h(A+B, B+A) \geqq h(A,B)+h(B,A)$ を得て正規性，対称性を用いれば $A+B \geqq 2h(A,B)$ を得る．　///

(その2)．調和平均の極値表現で $x=y=z/2$ が $x+y=z$ を満していることより，

$$\langle h(A,B)z|z\rangle \leqq 2\left\{\langle A\tfrac{z}{2}|\tfrac{z}{2}\rangle + \langle B\tfrac{z}{2}|\tfrac{z}{2}\rangle\right\} = \langle a(A,B)z|z\rangle$$

を得る．　///

(その3)．逆を持つ非負定値作用素 A, B に対して

$A \geqq B \iff {}^{\forall}x, y \in \mathcal{H};\ \langle Ax|x\rangle + \langle B^{-1}y|y\rangle \geqq 2|\langle x|y\rangle|$ である．

半連続性より A, B の可逆性を仮定しても十分であるから，$a \geqq h$ を示すには $\langle a(A,B)x|x\rangle + \langle a(A^{-1},B^{-1})y|y\rangle \geqq 2|\langle x|y\rangle|$ $(x,y\in\mathcal{H})$ を示せば良い事がわかる．（双対性 $h(A,B)^{-1} = a(A^{-1},B^{-1})$ を用いた．）然るにこれは自明な不等式 $A \geqq A,\ B \geqq B$ の同値条件

$$\langle Ax|x\rangle + \langle A^{-1}y|y\rangle \geqq 2|\langle x|y\rangle|$$

及び $\qquad (x, y \in \mathcal{H})$

$$\langle Bx|x\rangle + \langle B^{-1}y|y\rangle \geqq 2|\langle x|y\rangle|$$

の重ね合わせである．　///

等号条件も凹性を用いて A, B が可逆であるとしてよく，functional calculous 的に証明できます．

§3. 対称関数平均.　スカラーの平均の理論はいろいろな方向へ拡張されます.　中でも変数の数をシンメトリーを要求して2以上に増すことは自然です.　スカラー・多変数の算術・調和平均の間の不等式の証明にも，その対称性に注目したアプローチがあり，対称式の比を取ってできる平均の概念が与えられています．これを対称関数平均と呼びます．　3変数の場合は次の3つです;

$$(\alpha+\beta+\gamma)/3 \geq \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha+\beta+\gamma} \geq \frac{3\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha} \quad (= 3(\alpha^{-1}+\beta^{-1}+\gamma^{-1})^{-1}).$$

さて非負定値作用素に対する対称関数平均の定義は，$\frac{\alpha\beta+\alpha\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} = (\alpha^{-1}+(\beta+\gamma)^{-1})^{-1} = \alpha:(\beta+\gamma)$ から暗示されます．以下，n個の非負定値作用素の組 $\vec{A}=(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ に対し A_iを除いた組を $\vec{A}(i)$ と書くことにします。n変数の算術平均

$$T_{1n}(\vec{A}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} A_i \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

から帰納的に

$$T_{kn}(\vec{A}) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{n-k+1} A_i : \frac{1}{k-1} T_{k-1\, n-1}(\vec{A}(i)) \right\}$$

$$(2 \leq k \leq n, \quad n=2,3,\cdots)$$

によって定義される平均をT-平均と呼びます.　また $\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\beta+\gamma} = \alpha+\beta:\gamma$ から暗示される平均はP-平均と呼ばれ，調和平均

$$P_{nn}(\vec{A}) = \Pi_{i=1}^{n}:(nA_i) = (nA_1):(nA_2):\cdots:(nA_n)$$

$$(n=1, 2, \cdots)$$

から帰納的に

$$P_{km}(\vec{A}) = \Pi_{i=1}^{n} : \{k A_i + (n-k) P_{k\,n-1}(\vec{A}(i))\}$$

$$(1 \leq k \leq n-1,\ n = 2, 3, \cdots)$$

と定義されます. この2つの平均 $T_{k,n}(\vec{A})$ と $P_{kn}(\vec{A})$ とは $\vec{A}$ が正数の組であるならば (k次対称式)/(k-1次対称式) を正規化した対称関数平均に帰着します. $m = T_{kn}$ 又は P_{kn} に対しても2変数の作用素平均の場合と同様の基本的性質が成立ちます.

(対称性) $\forall n$次置換σに対し $m(\vec{A}) = m(\vec{A}_\sigma)$ 但し $\vec{A}_\sigma = (A_{\sigma(i)})_{i=1}^{n}$

(凹 性) $m(\vec{A} + \vec{B}) \geqq m(\vec{A}) + m(\vec{B})$ 但し $\vec{A}+\vec{B} = (A_i + B_i)_{i=1}^{n}$

(同次性) $C^* m(\vec{A}) C \leqq m(C^* \vec{A} C)$ 但し $C^*\vec{A}C = (C^* A_i C)_{i=1}^{n}$

(半連続性) $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} m(\vec{A}_\varepsilon) = m(\vec{A})$ 但し $\vec{A}_\varepsilon = (A_i + \varepsilon I)_{i=1}^{n}$

(正規性) $m(A, A, \cdots, A) = A$

(双対性) $P_{kn}(\vec{A}) = T_{n-k+1\,n}(\vec{A}^{-1})^{-1}$ 但し 各 A_i は可逆とし, $\vec{A}^{-1} = (A_i^{-1})_{i=1}^{n}$.

また帰納的な定義のし方から, 簡単に次の不等式が示されます.

$$\begin{array}{ccccc} T_{1n} & \geqq & T_{kn} & \geqq & T_{nn} \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ P_{1n} & \geqq & P_{kn} & \geqq & P_{nn} \\ \text{(arithmetic)} & & & & \text{(harmonic)} \end{array} \quad (1 \leq k \leq n,\ n = 1, 2, \cdots)$$

先に述べたようにスカラーの場合には $T_{kn} = P_{kn}$ ですが, 作用素の場合には一般にこの2つは等しくありません. 数値例を挙げます.

$$\vec{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow T_{23}(\vec{A}) = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{3}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{2}{7} \end{bmatrix},\ P_{23}(\vec{A}) = \begin{bmatrix} \frac{20}{31} & \frac{3}{31} \\ \frac{3}{31} & \frac{4}{31} \end{bmatrix}.$$

ここで $T_{23} - P_{23} = \frac{1}{434}\begin{bmatrix} 30 & 9 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} \geqq 0$ に注意します。この事実が一般的に成立つと予想されます:

> Conjecture
>
> $$T_{km} \geqq P_{km} \quad (2 \leqq k \leqq m-1,\ m = 3, 4, \cdots)$$

単純に帰納的定義に戻っても1ステップ戻すと係数が合わなくなり証明できません。またスカラーの場合等しいという事実から、functional calculous 型の証明は無理がありそうです。凹性を用いる証明は次の例から不可能です: (i) もし

(*) $P_{km}(T_{km}(A_{11}, \cdots, A_{1m}), T_{km}(A_{21}, \cdots, A_{2m}), \cdots, T_{km}(A_{m1}, \cdots, A_{mm}))$

$\geqq T_{km}(P_{km}(A_{11}, \cdots, A_{m1}), P_{km}(A_{12}, \cdots, A_{m2}), \cdots, P_{km}(A_{1m}, \cdots, A_{mm}))$

が成立つとすると $A_{ij} = A_{i+j-1}$ (添字は mod $m+1$) とおけば $a \geqq k$ の"その1"と同様にして $T_{km} \geqq P_{km}$ を得るはずです。

(ii) 然るにこの"凹性"不等式は成立しません。なぜならもし(*)が成立てば、"A_{ij} が全て正のスカラーなら $T_{k,m} = P_{k,m}$" より (*) の等号が常に成立つことになりますが、これは $A_{ij} = 3(i-1)+j$ ですら成立たない等式です。従って極値表現を用いた証明が残ります。双対性から次の Subconjecture に帰着されます:

> Subconjecture 1. $\vec{A} = (A_1, \cdots, A_m)$ が全て可逆の時、
>
> $$\langle T_{km}(\vec{A})x|x\rangle + \langle T_{m-k+1\,m}(\vec{A}^{-1})y|y\rangle \geqq 2|\langle x|y\rangle| \quad (x, y \in \mathcal{H})$$

§4 Reduction. $T_{k,n}$ の帰納的定義と並列和の極値表現を用いると Subconjecture 1 の左辺は

$$\langle T_{k,n}(\vec{A})x \mid x\rangle + \langle T_{n-k+1\,n}(\vec{A}^{-1})y \mid y\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \inf_{x_i \in \mathcal{H}} \left\{ \frac{1}{n-k+1}\langle A_i(x+x_i) \mid x+x_i\rangle + \frac{1}{k-1}\langle T_{k-1\,n-1}(\vec{A}(i))x_i \mid x_i\rangle \right\}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \inf_{y_j \in \mathcal{H}} \left\{ \frac{1}{k}\langle A_j^{-1}(y+y_j) \mid y+y_j\rangle + \frac{1}{n-k}\langle T_{n-k\,n-1}(\vec{A}(j)^{-1})y_j \mid y_j\rangle \right\}$$

$$= \vdots$$

$$= \Bigg[\frac{1}{n-k+1}\cdot\frac{1}{(k-1)!}\sum_{i=1}^{n}\Bigg\{ (k-1)!\,\langle A_i(x+x_i) \mid x+x_i\rangle$$

$$+ \sum_{\ell=2}^{k-1}(k-\ell)! \sum_{i_1,\cdots i_{\ell-1}\,:\,\text{互に相異}\neq i} \langle A_i(x_{i_1\cdots i_{\ell-1}} + x_{i_1\cdots i_{\ell-1}i})$$

$$\mid x_{i_1\cdots i_{\ell-1}} + x_{i_1\cdots i_{\ell-1}i}\rangle$$

$$+ \sum_{i\neq i_1,\cdots,i_{k-1}} \langle A_i x_{i_1\cdots i_{k-1}} \mid x_{i_1\cdots i_{k-1}}\rangle \Bigg\}$$

$$+ \frac{1}{n-k+1}\,\frac{1}{(n-k)!}\sum_{j=1}^{n}\Bigg\{ (n-k)!\,\langle A_j^{-1}(y+y_j) \mid y+y_j\rangle$$

$$+ \sum_{\ell=2}^{n-k}(n-k+1-\ell)! \sum_{j_1\cdots j_{\ell-1}\,:\,\text{互に相異}\neq j} \langle A_j^{-1}(y_{j_1\cdots j_{\ell-1}} + y_{j_1\cdots j_{\ell-1}j})$$

$$\mid y_{j_1\cdots y_{j_{\ell-1}}} + y_{j_1\cdots j_{\ell-1}j}\rangle$$

$$+ \sum_{j\neq j_1,\cdots j_{n-k}} \langle A_j^{-1} y_{j_1\cdots j_{n-k}} \mid y_{j_1\cdots j_{n-k}}\rangle \Bigg\} \Bigg]$$

の添え字付きベクトル全てに対する infimum, と書き下せます. この展開の最初の段階で現れるダミーベクトル(以下添え字付ベクトル又はその和の形のものをこう呼ぶ)を level 1, 次の帰納段階で現れるものを level 2

などのように呼びます: (A_1 に属するダミーに対して)

$$\begin{cases} x+x_1 & \text{-- level 1} \\ x_2+x_{21},\ x_3+x_{31}, \cdots, x_4+x_{41}, & \cdots \text{ level 2} \\ x_{23}+x_{231},\ x_{24}+x_{241}, \cdots & \cdots \text{ level 3} \\ \vdots & \end{cases}$$

このようにして現れるダミーのレベル数は $T_{k,n}$ に対しては k で
ダミーベクトルの総数は A_1 についてのものだけで

$$comb(k,n) := 1+(n-1)+(n-1)(n-2)+\cdots+(n-1)(n-2)\cdots k$$

となります. ここではダミーベクトルの並べ方に一定の順序(標準順序)を決めておきます. T_{34} のダミーの例のみで十分と思われます:

$$\begin{array}{lll}
x+x_1 \cdots\cdots\cdots\cdots & \text{level 1.} & \\
\quad x_2+x_{21} \cdots\cdots & & \\
\qquad \left.\begin{array}{l} x_{23} \\ x_{24} \end{array}\right\} \text{level 3} & & \\
\quad x_3+x_{31} \cdots\cdots & & \left.\right\} \text{level 2} \\
\qquad \left.\begin{array}{l} x_{34} \\ x_{32} \end{array}\right\} \text{level 3} & & \\
\quad x_4+x_{41} \cdots\cdots & & \\
\qquad \left.\begin{array}{l} x_{42} \\ x_{43} \end{array}\right\} \text{level 3} & &
\end{array}$$

$A_2, \cdots, A_n$ についてのダミーベクトルの標準順序はこれを cyclic に回して作ったものとします.

Subconjecture 1 は大雑把に言って

$$\inf_{z_i, w_j \in \mathcal{H}} \sum_{i=1}^{m} \langle A z_i | z_i \rangle + \sum_{j=1}^{m} \langle A^{-1} w_j | w_j \rangle$$

の和の形をしています. この値が $\vec{A}$ に independent な $2|\langle x|y\rangle|$ で下から押えられる為には $\vec{A}$ を動かして

$$\inf_{\exists A^{-1}} \sum_{i=1}^{m} \langle A z_i | z_i \rangle + \sum_{j=1}^{m} \langle A^{-1} w_j | w_j \rangle$$

を求めることに帰着しますが，これは Flanders により既に解かれており，値は行列 $G = [\langle z_i | w_j \rangle]_{i=1\ j=1}^{m\ \ m}$ の trace-norm $\|G\|_1 = \mathrm{tr}((G^*G)^{\frac{1}{2}})$ です． このような行列を Gram 行列と呼びます．

M_1 を A_1 について現れるダミーベクトル x….. と A_1^{-1} について現れるダミーベクトル y….. から作られる Gram 行列とします．添え字をサイクリックに回すと A_2, A_2^{-1} についての Gram 行列 $M_2, \cdots$ A_m, A_m^{-1} についての Gram 行列 M_m が得られます．各ダミーベクトルには $\sqrt{n-k+1}\sqrt{(k-1)!}$, $\sqrt{k}\sqrt{(n-k)!}$ を掛けておきますと Subconjecture1 は次の問題に帰着します． 三角不等式から少し強くしておきます．

> Subconjecture 2
>
> $$\left\| \sum_{i=1}^{m} M_i \right\|_1 \geq 2k(n-k+1) |\langle x | y \rangle|$$

$M = \sum_{i=1}^{m} M_i$ の trace-norm を求めるには，duality

$$\|M\|_1 = \sup_{\|S\|_\infty \leq 1} |\mathrm{tr}(S^* M)|$$

を用い，次のような行列（スキャッタリング行列）S の存在を確認することになります．

> Subconjecture 3.
>
> $\exists S$; $\mathrm{tr}(S^* M) = 2k(n-k+1) \|S\|_\infty |\langle x | y \rangle|$

（S は $\mathrm{comb}(k, n) \times \mathrm{comb}(n-k+1, n)$ 行列です．）

§5. スキャッタリング行列の構成. ダミーベクトルはそれぞれ対称に含まれているので，スキャッタリング行列はダミーベクトルを一つも含まないように構成できます.

i) Mの要素の内で $\langle x|y\rangle$ を含んでいる要素は $(1,1)$のもののみなので S_{11} は不定ですが，要素を整数又は$\sqrt{\text{整数}}$の形に保っておくため，

$$S_{11}=\sqrt{(n-1)!/(n-k)!}\cdot\sqrt{(n-1)!/(k-1)!}$$

と定めます.

ii) level 1 で現れる y のダミーベクトル y_i は symmetric に現れており，M では $\langle x|\Sigma y_i\rangle$ の形をしています 従ってダミーベクトルを消去するには

$$S_{11}\langle x|\Sigma y_i\rangle+S_{21}\langle x|\Sigma y_i\rangle+S_{2+\mathrm{comb}(k,n-1),1}\langle x|\Sigma y_i\rangle+\cdots$$
$$\cdots+S_{\mathrm{comb}(k,n),1}\langle x|\Sigma y_i\rangle=0$$

を既知の S_{11} を除いて symmetric に解きます:

$$S_{21}=S_{2+\mathrm{comb}(k,n-1),1}=\cdots=S_{\mathrm{comb}(k,n),1}=-\sqrt{(n-2)!/(n-k)!}\cdot\sqrt{(n-2)!/(k-1)!}$$

以下同様に level の低いダミーから順に また xのダミーについても level の低いものから順に symmetric に解きます. 解は S_{11} を決めれば unique に決まり, symmetry の結果 $\mathcal{S}$ は次のような形をしています:

$$\mathcal{S}=\begin{bmatrix} s_{11} & \vec{a} & \vec{a} & \cdots & \vec{a} \\ \vec{b} & c_0 & c_{n-2} & \cdots & c_1 \\ \vec{b} & c_1 & c_0 & \cdots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{b} & c_{n-2} & c_{n-1} & \cdots & c_0 \end{bmatrix}\in M_{\mathrm{comb}(k,n),\,\mathrm{comb}(n-k+1,n)}.$$

また各ブロックは次のようなサイズの行列です.

$$C_i \in M_{comb(k,n-1),\,comb(n-k,n-1)} \quad (i=0,1,\cdots,n-2)$$

$$\vec{a} \in M_{1,\,comb(n-k,n-1)}$$

$$\vec{b} \in M_{comb(k,n-1),\,1}.$$

この時 C_0 は $T_{k-1,n-1} \geqq P_{k,n-1}$ という弱い不等式を証明する時現われるスキャッタリング行列のスカラ倍です.

このようにして得られた対称関数平均の不等式は次の通りです.

定理 $T_{2n} \geqq P_{2n}$ $(n \geqq 3)$

$T_{n-1,n} \geqq P_{n-1,n}$ (〃)

(後半は duality による.)

定理 $T_{2n} \geqq P_{n-1,n}$ $(n \geqq 3)$

$T_{2n} \geqq P_{n-2\,n}$ $(n \geqq 4)$

$T_{3n} \geqq P_{n-1\,n}$ (〃)

$T_{2n} \geqq P_{n-3,n}$ $(n \geqq 5)$

$T_{3n} \geqq P_{n-2\,n}$ (〃)

$T_{4n} \geqq P_{n-1,n}$ (〃)

$T_{2n} \geqq P_{n-4,n}$ $(n \geqq 6)$

$T_{3n} \geqq P_{n-3\,n}$ (〃)

$T_{4n} \geqq P_{n-2\,n}$ (〃)

$T_{5n} \geqq P_{n-1\,n}$ (〃)

§6 スキャッタリング行列を求めるプログラム例. ここでは $\Pi_{23} \geq P_{23}$ を求めるプログラムを掲載する. nが小さい時にはこの様にプログラムを分割することは時間のロスになるが, この方法はnが大きくてスキャッタリング行列そのものすらCPUに記憶させられない時でも, ディスクメモリを用いることで実行できる.

最初のプログラム (AOCT01&3.BAS) は ダミーベクトル, その係数, 及びスキャッタリング行列の要素を設定する initializing program である. G# は S_{ij} を求める為のスイッチの役を果たす.

第2以下が $\langle x|y\rangle$, $\langle x|\sum_{i=1}^{n} y_i\rangle$, ・・・ の係数に対応する S_{ij} を求めるプログラムである. 文番号 250－300 を次々に入れ替えることで $\langle \sum_{i=1}^{n} x_i | y\rangle$ に対応する S_{ij} が得られる. (AOCT3&3－AOCT4&3). 最後は $\sum\langle x_i|y_i\rangle$, $\sum\langle x_{i+1}|y_i\rangle$ ・・・ を求めるために少し 225番が入り, 990番が変更される. これらのダミーベクトルの内積の和は (0|0), (1|0), ・・・ のように表示されている.

この一連のプログラムはわかり易く・組み易くする為にダミーベクトルの表示を無駄使いしてあるが, 実際にはもっと少いディスクスペースで十分である. (この場合は 256 使用, $\Pi_{27} \geq P_{27}$ なら 398,336 使用だが, $\Pi_{27} \geq P_{27}$ は短縮すれば 190,592 で済む). 使用機材は東芝の PA 7020, TBASIC/MS-DOS である.

プログラム例.

```
AOCT01&3.BAS
100 'This is the 1ST programm of "AOCTOBE3.BAS" for T(2,3)********************
200 CLS:CLEAR:PRINT "start = ";TIME$
210 R=2:N=3:D1=1+(N-1):X=1+1:DIM X(X)
220 K=2:    D2=1+(N-1):Y=1+1:DIM Y(Y):D=D1*D2
300 OPEN "GRA23&23.DT3" AS #1 LEN=18
310 FIELD #1,4 AS C$,2 AS X1$,2 AS X2$,2 AS Y1$,2 AS Y2$,2 AS G$,4 AS S$
400 'x+x1*********************************************************************
410 Z=0:GOSUB 1010:X(1)=-1:X(2)=1:C1=1:Z=Z+1
420 W=0:GOSUB 600
440 GOSUB 500
490 CLOSE:PRINT TIME$:END
500 'x2,x3********************************************************************
510 FOR J1=2 TO N:K1=J1
520 GOSUB 1010:X(2)=K1:C1=1:Z=Z+1
525 W=0:GOSUB 600
590 NEXT J1:RETURN
600 'y+y1*********************************************************************
610 GOSUB 1020:Y(1)=-1:Y(2)=1:C2=1:W=W+1:C=C1*C2:G=0:S=0
620 GOSUB 2000:NUM%=D2*(Z-1)+W:PUT #1,NUM%
630 PRINT C,X(1);X(2),Y(1);Y(2),G,S
640 GOSUB 700
650 RETURN
700 'y2,y3********************************************************************
710 FOR JJ1=2 TO N:KK1=JJ1
720 GOSUB 1020:Y(2)=KK1:C2=1:W=W+1:C=C1*C2:G=0:S=0
730 GOSUB 2000:NUM%=D2*(Z-1)+W:PUT #1,NUM%
740 PRINT C,X(1);X(2),Y(1);Y(2),G,S
760 NEXT JJ1:RETURN
1000 'Initializing Subroutin******************************************************
1010 FOR I=1 TO X:X(I)=0:NEXT I:RETURN
1020 FOR I=1 TO Y:Y(I)=0:NEXT I:RETURN
1990 'Denumeration (LSET)*********************************************************
2000 LSET C$=MKS$(C):LSET X1$=MKI$(X(1)):LSET X2$=MKI$(X(2))
3000 LSET Y1$=MKI$(Y(1)):LSET Y2$=MKI$(Y(2))
4000 LSET G$=MKI$(G):LSET S$=MKS$(S):RETURN
```

```
AOCT02&3.BAS
100 'This is the 2nd programm of "AOCT02&3.BAS" for T(2,3)********************
110 CLS:CLEAR:PRINT "start = ";TIME$
120 R=2:N=3:D1=1+(N-1):X=1+1:DIM X(X)
130 K=2:    D2=1+(N-1):Y=1+1:DIM Y(Y):D=D1*D2
140 PRINT "C","X1 X2","Y1 Y2"," G"," S"
150 PRINT "____________________________________________________"
210 OPEN "GRA23&23.DT3" AS #1 LEN=18
220 FIELD #1,4 AS C$,2 AS X1$,2 AS X2$,2 AS Y1$,2 AS Y2$,2 AS G$,4 AS S$
230 FOR Z=1 TO D1:FOR W=1 TO D2:NUM%=D2*(Z-1)+W
240 GET #1,NUM%:GOSUB 1010
250 '******************************** <x1y>
260 IF X1=-1 AND Y1=-1 THEN S=N-1:G=1
270 GOSUB 2010:PUT#1,NUM%
280 '********************************
980 PRINT C,X1;X2,Y1;Y2,G,S
990 NEXT W:NEXT Z:CLOSE:END
1000 'Eenumeration (CVI/CVS)******************************************************
1010 C=CVS(C$)
1020 X1=CVI(X1$)
1030 X2=CVI(X2$)
1040 Y1=CVI(Y1$)
1050 Y2=CVI(Y2$)
1060 G=CVI(G$)
1070 S=CVS(S$):RETURN
2000 'Denumeration (LSET)*********************************************************
2010 LSET C$=MKS$(C)
2020 LSET X1$=MKI$(X1)
2030 LSET X2$=MKI$(X2)
2040 LSET Y1$=MKI$(Y1)
2050 LSET Y2$=MKI$(Y2)
2060 LSET G$=MKI$(G)
2070 LSET S$=MKS$(S):RETURN
```

AOCT03&3.BAS

```
250 '********************************** <x10)
260 IF X1<>-1 OR Y2=0 THEN GOTO 980
270 IF G=0 THEN G=-1:T=T+1
280 IF G=1 THEN SUM=SUM-S*SQR(C)
290 GOSUB 2010:PUT #1,NUM%
300 '**********************************
```

AOCT04&3.BAS

```
250 '********************************(0;y)
260 IF X2=0 OR Y1<>-1 THEN GOTO 980
270 IF G=0 THEN G=-1:T=T+1
280 IF G=1 THEN SUM=SUM-S*SQR(C)
290 GOSUB 2010:PUT #1,NUM%
300 '*********************************
```

AOCTO 5&3.BAS

```
210 OPEN "GRA23&23.DT3" AS #1 LEN=18
220 FIELD #1,4 AS C$,2 AS X1$,2 AS X2$,2 AS Y1$,2 AS Y2$,2 AS G$,4 AS S$
225 FOR A=0 TO N-1
226 PRINT "(";A;"; 0 ) = ";TIME$
230 SUM=0:T=0:FOR Z=1 TO D1:FOR W=1 TO D2:NUM%=D2*(Z-1)+W
240 GET #1,NUM%:GOSUB 1010
245 ML=X2-Y2:GOSUB 6010:UU=ML
250 '*********************************(0;0)
260 IF X2=0 OR Y2=0 THEN GOTO 980
265 IF UU<>A THEN GOTO 980
270 IF G=0 THEN G=-1:T=T+1
280 IF G=1 THEN SUM=SUM-S*SQR(C)
290 GOSUB 2010:PUT #1,NUM%
300 '*********************************
990 NEXT W: NEXT Z: GOSUB 7000: NEXT A: CLOSE: END
```

結果の印刷用プログラムと結果

```
SCAT23PR.BAS
100 'This is the programm for printing the scattering matrix of T(2,3)*********
110 CLEAR
120 R=2:N=3:D1=1+(N-1):X=1+1:DIM X(X)
130 K=2:    D2=1+(N-1):Y=1+1:DIM Y(Y):D=D1*D2:DIM S(D1,D2)
500 'SCAT2323.DT3*****scattering matrix data***********************************
510 OPEN "SCAT2323.DT3" FOR INPUT AS #1
520 FOR I=1 TO D1:FOR J=1 TO D2:INPUT #1,S(I,J):NEXT J:NEXT I
530 CLOSE
540 FOR I=1 TO D1:FOR J=1 TO D2:LPRINT S(I,J),:NEXT J:LPRINT :NEXT I
550 END
 2              -1              -1
-1              -1               2
-1               2              -1
```

$\mathrm{T}_{36} \geqq \mathrm{P}_{36}$ (26×86)

	1	2	3				7				11				15			18
1	$20\sqrt{3}$	-12	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
2	$-4\sqrt{6}$	$-12\sqrt{2}$	6	-2	-2	-2	6	-2	-2	-2	6	-2	-2	-2	6	-2	-2	-2
3	$\sqrt{6}$	$3\sqrt{2}$	6	-2	-2	-2	-4	3	3	-2	-4	3	-2	3	-4	-2	3	3
	$\sqrt{6}$	$3\sqrt{2}$	-4	-2	3	3	6	-2	-2	-2	-4	3	3	-2	-4	3	-2	3
	$\sqrt{6}$	$3\sqrt{2}$	-4	3	-2	3	-4	-2	3	3	6	-2	-2	-2	-4	3	3	-2
	$\sqrt{6}$	$3\sqrt{2}$	-4	3	3	-2	-4	3	-2	3	-4	-2	3	3	6	-2	-2	-2
7	$-4\sqrt{6}$	$6\sqrt{2}$	6	-2	-2	-2	-6	4	4	-2	-6	4	-2	4	-6	-2	4	4
	$\sqrt{6}$	$-3\sqrt{2}$	-2	-2	2	2	-4	2	2	0	6	-10	1	3	6	1	3	-10
	$\sqrt{6}$	$-3\sqrt{2}$	-2	2	-2	2	6	3	-10	1	-4	2	0	2	6	1	-10	3
	$\sqrt{6}$	$-3\sqrt{2}$	-2	2	2	-2	6	-10	3	1	6	3	1	-10	-4	0	2	2
11	$\sqrt{6}$	$3\sqrt{2}$	0	0	0	0	-2	1	1	0	-2	1	0	1	-2	0	1	1
12	$-4\sqrt{6}$	$6\sqrt{2}$	-6	-2	4	4	6	-2	-2	-2	-6	4	4	-2	-6	4	-2	4
	$\sqrt{6}$	$-3\sqrt{2}$	6	1	3	-10	-2	-2	2	2	-4	2	2	0	6	-10	1	3
	$\sqrt{6}$	$-3\sqrt{2}$	6	1	-10	3	-2	2	-2	2	6	3	-10	1	-4	2	0	2
	$\sqrt{6}$	$3\sqrt{2}$	-2	0	1	1	0	0	0	0	-2	1	1	0	-2	1	0	1
16	$\sqrt{6}$	$-3\sqrt{2}$	-4	0	2	2	-2	2	2	-2	6	-10	3	1	6	3	1	-10
17	$-4\sqrt{6}$	$6\sqrt{2}$	-6	4	-2	4	-6	-2	4	4	6	-2	-2	-2	-6	4	4	-2
	$\sqrt{6}$	$-3\sqrt{2}$	6	-10	1	3	6	1	3	-10	-2	-2	2	2	-4	2	2	0
	$\sqrt{6}$	$3\sqrt{2}$	-2	1	0	1	-2	0	1	1	0	0	0	0	-2	1	1	0
	$\sqrt{6}$	$-3\sqrt{2}$	-4	2	0	2	6	1	-10	3	-2	2	-2	2	6	3	-10	1
21	$\sqrt{6}$	$-3\sqrt{2}$	6	3	1	-10	-4	0	2	2	-2	2	2	-2	6	-10	3	1
22	$-4\sqrt{6}$	$6\sqrt{2}$	-6	4	4	-2	-6	4	-2	4	-6	-2	4	4	6	-2	-2	-2
	$\sqrt{6}$	$3\sqrt{2}$	-2	1	1	0	-2	1	0	1	-2	0	1	1	0	0	0	0
	$\sqrt{6}$	$-3\sqrt{2}$	-4	2	2	0	6	-10	1	3	6	1	3	-10	-2	-2	2	2
	$\sqrt{6}$	$-3\sqrt{2}$	6	3	-10	1	-4	2	0	2	6	1	-10	3	-2	2	-2	2
26	$\sqrt{6}$	$-3\sqrt{2}$	6	-10	3	1	6	3	1	-10	-4	0	2	2	-2	2	2	-2

	19																35
1	-12	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
2	$6\sqrt{2}$	-6	4	4	-2	-6	4	-2	4	-6	-2	4	4	6	-2	-2	-2
3	$3\sqrt{2}$	-2	1	1	0	-2	1	0	1	-2	0	1	1	0	0	0	0
	$-3\sqrt{2}$	-4	2	2	0	6	-10	1	3	6	1	3	-10	-2	-2	2	2
	$-3\sqrt{2}$	6	3	-10	1	-4	2	0	2	6	1	-10	3	-2	2	-2	2
	$-3\sqrt{2}$	6	-10	3	1	6	3	1	-10	-4	0	2	2	-2	2	2	-2
7	$-12\sqrt{2}$	6	-2	-2	-2	6	-2	-2	-2	6	-2	-2	-2	6	-2	-2	-2
	$3\sqrt{2}$	6	-2	-2	-2	-4	3	3	-2	-4	3	-2	3	-4	-2	3	3
	$3\sqrt{2}$	-4	-2	3	3	6	-2	-2	-2	-4	3	3	-2	-4	3	-2	3
	$3\sqrt{2}$	-4	3	-2	3	-4	-2	3	3	6	-2	-2	-2	-4	3	3	-2
11	$3\sqrt{2}$	-4	3	3	-2	-4	3	-2	3	-4	-2	3	3	6	-2	-2	-2
12	$6\sqrt{2}$	6	-2	-2	-2	-6	4	4	-2	-6	4	-2	4	-6	-2	4	4
	$-3\sqrt{2}$	-2	-2	2	2	-4	2	2	0	6	-10	1	3	6	1	3	-10
	$-3\sqrt{2}$	-2	2	-2	2	6	3	-10	1	-4	2	0	2	6	1	-10	3
	$-3\sqrt{2}$	-2	2	2	-2	6	-10	3	1	6	3	1	-10	-4	0	2	2
16	$3\sqrt{2}$	0	0	0	0	-2	1	1	0	-2	1	0	1	-2	0	1	1
17	$6\sqrt{2}$	-6	-2	4	4	6	-2	-2	-2	-6	4	4	-2	-6	4	-2	4
	$-3\sqrt{2}$	6	1	3	-10	-2	-2	2	2	-4	2	2	0	6	-10	1	3
	$-3\sqrt{2}$	6	1	-10	3	-2	2	-2	2	6	3	-10	1	-4	2	0	2
	$3\sqrt{2}$	-2	0	1	1	0	0	0	0	-2	1	1	0	-2	1	0	1
21	$-3\sqrt{2}$	-4	0	2	2	-2	2	2	-2	6	-10	3	1	6	3	1	-10
22	$6\sqrt{2}$	-6	4	-2	4	-6	-2	4	4	6	-2	-2	-2	-6	4	4	-2
	$-3\sqrt{2}$	6	-10	1	3	6	1	3	-10	-2	-2	2	2	-4	2	2	0
	$3\sqrt{2}$	-2	1	0	1	-2	0	1	1	0	0	0	0	-2	1	1	0
	$-3\sqrt{2}$	-4	2	0	2	6	1	-10	3	-2	2	-2	2	6	3	-10	1
26	$-3\sqrt{2}$	6	3	1	-10	-4	0	2	2	-2	2	2	-2	6	-10	3	1

$T_{36} \geq P_{36}$ (cont. 4)

		52															
1	-12	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
2	$6\sqrt{2}$	-6	4	-2	4	-6	-2	4	4	6	-2	-2	-2	-6	4	4	-2
3	$-3\sqrt{2}$	6	-10	1	3	6	1	3	-10	-2	-2	2	2	-4	2	2	0
	$3\sqrt{2}$	-2	1	0	1	-2	0	1	1	0	0	0	0	-2	1	1	0
	$-3\sqrt{2}$	-4	2	0	2	6	1	-10	3	-2	2	-2	2	6	3	-10	1
6	$-3\sqrt{2}$	6	3	1	-10	-4	0	2	2	-2	2	2	-2	6	-10	3	1
7	$6\sqrt{2}$	-6	4	4	-2	-6	4	-2	4	-6	-2	4	4	6	-2	-2	-2
	$3\sqrt{2}$	-2	1	1	0	-2	1	0	1	-2	0	1	1	0	0	0	0
	$-3\sqrt{2}$	-4	2	2	0	6	-10	1	3	6	1	3	-10	-2	-2	2	2
	$-3\sqrt{2}$	6	3	-10	1	-4	2	0	2	6	1	-10	3	-2	2	-2	2
11	$-3\sqrt{2}$	6	-10	3	1	6	3	1	-10	-4	0	2	2	-2	2	2	-2
12	$-12\sqrt{2}$	6	-2	-2	-2	6	-2	-2	-2	6	-2	-2	-2	6	-2	-2	-2
	$3\sqrt{2}$	6	-2	-2	-2	4	3	3	-2	-4	3	-2	3	-4	-2	3	3
	$3\sqrt{2}$	-4	-2	3	3	6	-2	-2	-2	-4	3	3	-2	-4	3	-2	3
	$3\sqrt{2}$	-4	3	-2	3	-4	-2	3	3	6	-2	-2	-2	-4	3	3	-2
16	$3\sqrt{2}$	-4	3	3	-2	-4	3	-2	3	-4	-2	3	3	6	-2	-2	-2
17	$6\sqrt{2}$	6	-2	-2	-2	-6	4	4	-2	-6	4	-2	4	-6	-2	4	4
	$-3\sqrt{2}$	-2	-2	2	2	-4	2	2	0	6	-10	1	3	6	1	3	-10
	$-3\sqrt{2}$	-2	2	-2	2	6	3	-10	1	-4	2	0	2	6	1	-10	3
	$-3\sqrt{2}$	-2	2	2	-2	6	-10	3	1	6	3	1	-10	-4	0	2	2
21	$3\sqrt{2}$	0	0	0	0	-2	1	1	0	-2	1	0	1	-2	0	1	1
22	$6\sqrt{2}$	-6	-2	4	4	6	-2	-2	-2	-6	4	4	-2	-6	4	-2	4
	$-3\sqrt{2}$	6	1	3	-10	-2	-2	2	2	-4	2	2	0	6	-10	1	3
	$-3\sqrt{2}$	6	1	-10	3	-2	2	-2	2	6	3	-10	1	-4	2	0	2
	$3\sqrt{2}$	-2	0	1	1	0	0	0	0	-2	1	1	0	-2	1	0	1
26	$-3\sqrt{2}$	-4	0	2	2	-2	2	2	-2	6	-10	3	1	6	3	1	-10

53																67
12	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$6\sqrt{2}$	-6	-2	4	4	6	-2	-2	-2	-6	4	4	-2	-6	4	-2	4
$-3\sqrt{2}$	6	1	3	-10	-2	-2	2	2	-4	2	2	0	6	-10	1	3
$-3\sqrt{2}$	6	1	-10	3	-2	2	-2	2	6	3	-10	1	-4	2	0	2
$3\sqrt{2}$	-2	0	1	1	0	0	0	0	-2	1	1	0	-2	1	0	1
$-3\sqrt{2}$	-4	0	2	2	-2	2	2	-2	6	-10	3	1	6	3	1	-10
$6\sqrt{2}$	-6	4	-2	4	-6	-2	4	4	6	-2	-2	-2	-6	4	4	-2
$-3\sqrt{2}$	6	-10	1	3	6	1	3	-10	-2	-2	2	2	-4	2	2	0
$3\sqrt{2}$	-2	1	0	1	-2	0	1	1	0	0	0	0	-2	1	1	0
$-3\sqrt{2}$	-4	2	0	2	6	1	-10	3	-2	2	-2	2	6	3	-10	1
$-3\sqrt{2}$	6	3	1	-10	-4	0	2	2	-2	2	2	-2	6	-10	3	1
$6\sqrt{2}$	-6	4	4	-2	-6	4	-2	4	-6	-2	4	4	6	-2	-2	-2
$3\sqrt{2}$	-2	1	1	0	-2	1	0	1	-2	0	1	1	0	0	0	0
$-3\sqrt{2}$	-4	2	2	0	6	-10	1	3	6	1	3	-10	-2	-2	2	2
$-3\sqrt{2}$	6	3	-10	1	-4	2	0	2	6	1	-10	3	-2	2	-2	2
$-3\sqrt{2}$	6	-10	3	1	6	3	1	-10	-4	0	2	2	-2	2	2	-2
$-12\sqrt{2}$	6	-2	-2	-2	6	-2	-2	-2	6	-2	-2	-2	6	-2	-2	-2
$3\sqrt{2}$	6	-2	-2	-2	-4	3	3	-2	-4	3	-2	3	-4	-2	3	3
$3\sqrt{2}$	-4	-2	3	3	6	-2	-2	-2	-4	3	3	-2	-4	3	-2	3
$3\sqrt{2}$	-4	3	-2	3	-4	-2	3	3	6	-2	-2	-2	-4	3	3	-2
$3\sqrt{2}$	-4	3	3	-2	-4	3	-2	3	-4	-2	3	3	6	-2	-2	-2
$6\sqrt{2}$	6	-2	-2	-2	-6	4	4	-2	-6	4	-2	4	-6	-2	4	4
$-3\sqrt{2}$	-2	-2	2	2	-4	2	2	0	6	-10	1	3	6	1	3	-10
$-3\sqrt{2}$	-2	2	-2	2	6	3	-10	1	-4	2	0	2	6	1	-10	3
$-3\sqrt{2}$	-2	2	2	-2	6	-10	3	1	6	3	1	-10	-4	0	2	2
$3\sqrt{2}$	0	0	0	0	-2	1	1	0	-2	1	0	1	-2	0	1	1

$T_{36} \geqq \tilde{P}_{36}$

(cont.-2)

70 86

1	12	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
2	$6\sqrt{2}$	6	-2	-2	-2	-6	4	4	-2	-6	4	-2	4	-6	-2	4	4
3	$-3\sqrt{2}$	-2	-2	2	2	-4	2	2	0	6	-10	1	3	6	1	3	-10
	$-3\sqrt{2}$	-2	2	-2	2	6	3	-10	1	-4	2	0	2	6	1	-10	3
	$-3\sqrt{2}$	-2	2	2	-2	6	-10	3	1	6	3	1	-10	-4	0	2	2
6	$3\sqrt{2}$	0	0	0	0	-2	1	1	0	-2	1	0	1	-2	0	1	1
7	$6\sqrt{2}$	-6	-2	4	4	6	-2	-2	-2	-6	4	4	-2	-6	4	-2	4
	$-3\sqrt{2}$	6	1	3	-10	-2	-2	2	2	-4	2	2	0	6	-10	1	3
	$-3\sqrt{2}$	6	1	-10	3	-2	2	-2	2	6	3	-10	1	-4	2	0	2
	$3\sqrt{2}$	-2	0	1	1	0	0	0	0	-2	1	1	0	-2	1	0	1
11	$-3\sqrt{2}$	-4	0	2	2	-2	2	2	-2	6	-10	3	1	6	3	1	-10
12	$6\sqrt{2}$	-6	4	-2	4	-6	-2	4	4	6	-2	-2	-2	-6	4	4	-2
	$-3\sqrt{2}$	6	-10	1	3	6	1	3	-10	-2	-2	2	2	-4	2	2	0
	$3\sqrt{2}$	-2	1	0	1	-2	0	1	1	0	0	0	0	-2	1	1	0
	$-3\sqrt{2}$	-4	2	0	2	6	1	-10	3	-2	2	-2	2	6	3	-10	1
16	$-3\sqrt{2}$	6	3	1	-10	-4	0	2	2	-2	2	2	-2	6	-10	3	1
17	$6\sqrt{2}$	-6	4	4	-2	-6	4	-2	4	-6	-2	4	4	6	-2	-2	-2
	$3\sqrt{2}$	-2	1	1	0	-2	1	0	1	-2	0	1	1	0	0	0	0
	$-3\sqrt{2}$	-4	2	2	0	6	-10	1	3	6	1	3	-10	-2	-2	2	2
	$-3\sqrt{2}$	6	3	-10	1	-4	2	0	2	6	1	-10	3	-2	2	-2	2
21	$-3\sqrt{2}$	6	-10	3	1	6	3	1	-10	-4	0	2	2	-2	2	2	-2
22	$-12\sqrt{2}$	6	-2	-2	-2	6	-2	-2	-2	6	-2	-2	-2	6	-2	-2	-2
	$3\sqrt{2}$	6	-2	-2	-2	-4	3	3	-2	-4	3	-2	3	-4	-2	3	3
	$3\sqrt{2}$	-4	-2	3	3	6	-2	-2	-2	-4	3	3	-2	-4	3	-2	3
	$3\sqrt{2}$	-4	3	-2	3	-4	-2	3	3	6	-2	-2	-2	-4	3	3	-2
26	$3\sqrt{2}$	-4	3	3	-2	-4	3	-2	3	-4	-2	3	3	6	-2	-2	-2