数理解析研究所講究録
544巻 1985年 12-21

行列環における positivity と positive map の集合の構造について

新潟大 理 富山 淳
Jun Tomiyama

§1. はじめに. 行列環は非可換な代数系の出発点になっている. そこでこの環における positivity の意味を可換な C^* 環(連続関数環)のそれと対比して考え直し, そのあと n 次行列環 M_n 上の positive map のつくる凸錐の重層構造の一部を解析するのが本稿の目的である.

先ず可換な system の特性は, その中の各元の独立性にあるように思われる. 従ってそこでの positivity は各元のもつ属性と考えてよいであろう. これに対して非可換な M_n では, その中の元はすべて独立に動けるわけではないので, そこでの positivity は通常のそれだけでは十分でないと考えられる. 例えば相互に依存する system として, partial isometry v をもとにする同値な projection p, q を考えると $\{p, q, v\}$ は M_n の広い意味での元であるとみることができる. そして v^* も加えてこれを M_n 上の 2×2 行列元と考えれば ($\begin{bmatrix} p & v^* \\ v & q \end{bmatrix}$ の形), それは

M_n の"virtual"な positive 元とみてよいであろう. 行列環の positivity とはこれらすべての order の M_n の virtual 元の positivity を考慮に入れねばならない重層構造をもつと考えるのが自然であろう. 従って M_n 上の positive map とはこのような重層構造とどのようにかかわっているかが問題になり、各 order k についての k-positive map の概念が定義されている。今 M_n 上の linear map τ について $\tau(k)$ を

$$\tau(k) : [a_{ij}] \in M_k(M_n) \longrightarrow [\tau(a_{ij})] \in M_k(M_n)$$

と定めて、すべての k について $\tau(k)$ が positive map のとき τ を completely positive map と呼ぶ。しかし M_n での上の様な重層構造は次の意味で n で saturate されている。すなわち

"M_n 上においては τ が n-positive であれば、completely positive である".

以上から M_n 上の positive map のつくる凸錐は n 重構造をもつことになるが各層のつみ重なり工合については殆んど何もわかっていないというのが現状である。各層に所属する固有な写像（k-positive で $k+1$-positive ではない）についても単発的な例が出ているだけなので、ここでは M_n に固有な写像, σ : identity, θ : 転置写像 $\tau_0(x) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(x)1_n$
をもとにこの n 重構造の一断面を考えてみる。これらは単位元を単位元に写すいわゆる unital map である。

§2. σ, θ と τ_0 の幾何学的関係. 先ず σ と τ_0 は明らかに completely positive $=$ n-positive map である. これに対して θ は positive map であるが 2-positive にもならないことが知られている([ ]), すなわち最下層の写像である. そしてこれらを結ぶ線分について次の結果が得られる. [ ].

定理 1. $\tau = \lambda\tau_0 + (1-\lambda)\sigma$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ とする. このとき $1 \leq k \leq n$ について

(i) τ が k-positive になるのは $0 \leq \lambda \leq 1 + \dfrac{1}{nk-1}$ のとき.

(ii) τ が k 次の Schwartz の不等式をみたすのは

$1 \leq k \leq n-1$ のときは $0 \leq \lambda \leq 1 + \dfrac{1}{nk}$ のとき

$k = n$ のときは $0 \leq \lambda \leq 1 + \dfrac{1}{n^2-1}$ のとき

ここで τ が k 次の Schwartz の不等式をみたすとは, M_n の任意の k 個の元の組 $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ についてブロック行列の不等式

$$[\tau(a_i^* a_j)] \geq [\tau(a_i)^* \tau(a_j)]$$

が成り立つことをいう. 上の定理は τ_0 と σ の関係について次のことを意味している. 今 M_n 上の positive map の集合を底辺に"ただの positive map"の層を考え, 頂上に n-positive map

の層をおいた山にたとえると、τ_0の側に延張した線は非常になだらかなslopeを画いている。すなわち各k $(1\leq k\leq n-1)$について半開区間$\left[1+\frac{1}{n(k+1)-1}, 1+\frac{1}{nk-1}\right]$に属する$\lambda$についての写像は$k$-positiveでかつ$(k+1)$-positiveでない層をつくっている。また$(n-1)$-positive mapの層の端の点

$$\tau(x)=\frac{1}{n^2-n-1}(\mathrm{Tr}(x)1_n-x)$$

はChoi[ ]ではじめて示された、n-positiveでなくて$(n-1)$-positiveな写像の例の正規化にほかならない。Choiは更に[ ]において2-positiveでなくてSchwartzの不等式をみたす例を示しているが、それは又次定理(ii)上のparameterの一点としてあらわれるばかりではなく、定理1ではλが$\left(1+\frac{1}{n(k+1)-1}, 1+\frac{1}{nk}\right]$の数のとき対応する$\tau$は$(k+1)$-positiveではなくとも$k$次のSchwartzの不等式をみたす例になっている。尚$(k+1)$-positiveなunital mapは常にk次のSchwartzの不等式をみたしている。τ_0の側とは反対にθの側はいわば完全な"絶壁"をなっている。そこではparameterを少しでものばせば、τはもはやpositive mapにもならないわけである。

以下の2定理は上の様な観点から吟味されるべきものである。

定理2. $\tau=\lambda\tau_0+(1-\lambda)\theta$ $(-\infty<\lambda<\infty)$とする。このとき$1\leq k\leq n$について次のことが成り立つ。

(i) Tがk-positiveになるのは$k=1$か$2\leq k\leq n$のときに従ってλが　$0\leq\lambda\leq 1+\frac{1}{n-1}$　か　$1-\frac{1}{n+1}\leq\lambda\leq 1+\frac{1}{n-1}$　のとき

(ii) Tがk次のSchwartz不等式をみたすのは$k=1$か$2\leq k\leq n$のときに従ってλが　$1-\frac{1}{\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{4}}}\leq\lambda\leq 1+\frac{1}{n-1}$　か又は　$1-\frac{1}{n+1}\leq\lambda\leq 1+\frac{1}{n-1}$　のとき.

すなわちこのときは線分はplain positiveとn-positiveの2つの階層からしかなり立っていず次元の高いときはT_0, θの間は絶壁に近いともいえる. 前にのべた[ ]の例は上定理で$n=2$, $\lambda=\frac{1}{2}$の場合として表れている.

定理3. $T=\lambda\sigma+(1-\lambda)\theta$ $(-\infty<\lambda<\infty)$とする. このとき次のことが成り立つ

(i) Tがpositiveになるのは$0\leq\lambda\leq 1$のとき.またk-positive $(2\leq k\leq n)$になるのは$\lambda=1$のときのみ.

(ii) Tがk次のSchwartzの不等式をみたすのは$\lambda=1$のときのみである.

さてk-positive mapとl-positive mapを結べばその間のmapは最小$\min(k,l)$のpositivityはもつが線分の工合によっては中間のmapのpositivityがk, lいずれよりも大きくなる

ることがある．つまりこのとき両者は positive map の山の反対側の斜面に位置してるわけである．このような例はたとえば Choi の map（又はその正規化）と θ を結ぶ線分上に表れ，このとき線分のある区間は n-positive map になる（[ ]参照）．

§3. 定理の証明とあとがき．上の結果の positivity の判定には次のことを用いる．「もし $\{f_{ij}\}_k$ を M_n の任意の matrix unit の k 個次の部分とすると，M_n 上の linear map τ が k-positive になるのは block matrix $[\tau(f_{ij})]_1^k$ が常に positive になるときである」．この判定法が上の三つの写像に特に有効なのは block matrix $[f_{ij}]_k$ は次の性質をもつゆえである．

$[f_{ij}]_k$ は $M_k(M_n)$ の（1次元の）projection p をとり

(*) $[f_{ij}]_k = kp$ とかける．また $[\theta(f_{ij})]_k$ は selfadjoint な partial isometry であるから，$k \geq 2$ のときは 2 つの直交する projection q_1, q_2 の差としてかける．

他の場合も同様なので定理1の証明のみ示してみると，上の判定法によって $[\tau(f_{ij})]_k$ を考えればよいから

$$[\tau(f_{ij})]_k = \frac{\lambda}{n}1 + (1-\lambda)kp$$
$$= \left\{\frac{\lambda}{n} + (1-\lambda)k\right\}p + \frac{\lambda}{n}(1-p).$$

よってこれが positive になるのは

$$\frac{\lambda}{n} + (1-\lambda)k \geq 0 \quad かつ \quad \frac{\lambda}{n} \geq 0$$

これから(i)が出てくる. (ii)は実質的には $1\leq k\leq n-1$ のときのみ問題であるからそのときを考えると先ず $(a_1, a_2, \cdots a_k)$ について $Tr(a_i)=0$ $(i=1,2,\cdots,k)$ としてよいことがわかる.

このとき

$$
\begin{aligned}
&[\tau(a_i^* a_j)]_k - [\tau(a_i)^* \tau(a_j)]_k \\
&= \lambda\{[\tau_0(a_i^* a_j)]_k - [\tau_0(a_i)^* \tau_0(a_j)]_k\} \\
&+ (1-\lambda)\{[\sigma(a_i^* a_j)]_k - [\sigma(a_i)^* \sigma(a_j)]_k\} \\
&+ \lambda(1-\lambda)[(\tau_0-\sigma)(a_i)^*(\tau_0-\sigma)(a_j)]_k \\
&= [(\lambda\tau_0 + \lambda(1-\lambda)\sigma)(a_i^* a_j)]_k
\end{aligned}
$$

であるから(i)のときのようにして計算すれば

$$\frac{\lambda}{n}\geq 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\lambda}{n}+\lambda(1-\lambda)k\geq 0 \qquad \text{i.e.}\quad 0\leq\lambda\leq 1+\frac{1}{nk}$$

のとき map $\lambda\tau_0+\lambda(1-\lambda)\sigma$ は k-positive であるから上の行列は非負である. すなわち Schwartz の不等式がなりたつ.

逆に不等式がなりたつときは $a_i=f_{ni}$ をとると

$$[\tau(a_i^* a_j)]_k - [\tau(a_i)^* \tau(a_j)]_k = [(\lambda\tau_0+\lambda(1-\lambda)\sigma)(f_{ij})]_k$$

となり $\lambda\tau_0+\lambda(1-\lambda)\sigma$ の k-positivity から λ の範囲が出てくる.

証明了

上の議論は M_n の positive map の集合の"山容"をかいま見させてくれるが上記判定法は一般の map には適用し難く前述の様に全体像の解明にはほど遠い. しかし $n\geq 3$ の場合には組織

的な解明への第一歩とも言えると思う. 2×2の行列環については Woronowicz[ ] により次のように positive map の構造が示されている. すなわち, k-positive map に対して map

$$\tau(k)_\theta : [a_{ij}] \in M_k(M_n) \longrightarrow [\tau(a_{ji})] \in M_k(M_n)$$

が positive のとき τ を k-copositive map と呼ぶことにすると, この positivity について平行な議論が出来 M_n においては completely copositive と n-copositive が一致する. 更に n-copositive map の構造も決定出来.

"M_2 においては任意の positive map は completely positive map (= 2-positive map) と completely copositive map (= 2-copositive map) の和になる".

$n \geq 3$ のときにはこの結果は成り立たないことが知られているが, その反例 (例えば [ ] 参照, 1つの例のみ) の理論的な背景はわからず従って重構造が三層以上になると何故このような現象が起るのかが判然としないでいる.

尚上の我々の結果と同様にして殆んどを co-positivity の立場から考えてみると, 例えば T_0 と σ との関係で n-positive にならない map はすべて入ってその範囲で completely copositive になっており他の場合も含めて, 分解の問題については新しい材料を与えてはくれない. しかし completely copositive map の代表的な例である transpose map θ は plain positive であるが, 上

の解析を通じてわかることは M_n の positive map には completely positive でかつ completely copositive であるという非常に「強い」クラスもあることである．したがって２つの positivity はある意味では対照的でないわけである．

文　献

1. M. D. Choi, Positive linear maps on C^*-algebras, Canad. J. Math., 24 (1972), 520 − 529
2. ———, Some assorted inequalities for positive linear maps on C^*-algebras, J. Operator theory 4 (1980), 271 − 285
3. E. Størmer, Decomposable positive maps on C^*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 86 (1982), 402 − 404
4. T. Takasaki & J. Tomiyama, On the geometry of positive maps in matrix algebras, Math. Zeit., 184 (1983), 101 − 108
5. J. Tomiyama, On the transpose map of matrix algebras Proc. Amer. Math. Soc., 88 (1983), 635 − 638
6. ———, On the geometry of positive maps in matrix algebras II, to appear in Linear Algebra Appl.

7. S. L. Woronowicz, Positive maps of low dimensional matrix algebras, Rep. Math. Phys., 10 (1976), 165-183.
8. D. E. Evans, Positive linear maps on operator algebras, Comm. Math. Phys., 48 (1976), 15-22