

$U(1,2)$  と  $U(3)$  における Hecke 作用素の  
跡の交代和

東大・理 古内春隆 (Harutaka Koseki)

互いに他の inner form であるようなふたつの代数群の  
保型形式の間の Langlands 対応の問題に関して、伊吹山氏と  
橋本氏は、具体的で接近しやすいと思われるひとつめの枠組を  
導入され、 $Sp(2, \mathbb{R})$  とその compact twist の場合に ‘次元の  
交代和の比較定理’ を得られた ([1], [2], [3]). ここでは  
 $U(1,2)$  と  $U(3)$  に対し、類似物と思われる ‘Hecke 作用素の  
跡の交代和の関係式’ について報告する。

1. 設定

$F$  を虚 2 次体とし、 $F/\mathbb{Q}$  に関する次のふたつの 3 次 Hermite  
行列を考える：

$$H_1 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}.$$

我々の対象は、 $\mathbb{Q}$  上定義されたふたつの reductive 群  $G_1, G_2$   
である、それらの  $\mathbb{Q}$ -有理点の群は次式で与えられる：

$$G_i(\mathbb{Q}) = \{ g \in GL(3, F) \mid {}^t \bar{g} H_i g = H_i \} \quad (i=1, 2).$$

Landherr の古典的定理より、\$F\$ を固定したときの 3 次エーテリ群の \$\mathbb{Q}\$ 上の同型類はこれらを代表とする 2 個のみであることがわかる。また、\$G\_1\$ と \$G\_2\$ は \$\mathbb{Q}\$ の任意の有限素点上において同型である。そこで同型

$$\Theta_L : G_{1,L} \xrightarrow{\sim} G_{2,L}, \quad \Theta_L(g) = \vartheta_L^{-1} g \vartheta_L$$

を列 \$\{\Theta\_L\}\_{L \neq \infty}\$ を固定する。ここで \$\vartheta\_L\$ は、適当な条件を満足する \$GL(3, F \otimes\_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\_L)\$ の元である。

実 reductive 群 \$G\_{1,\infty}\$ は連結であって、対称領域

$$\mathcal{D} = \{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid 2R_e(z) - |w|^2 > 0 \}$$

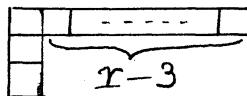
に対する作用 \$g \langle z \rangle\$ とスカラーラー値保型因子 \$j(g, z)\$ が

$$g \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = j(g, z) \begin{pmatrix} {}^t(g \langle z \rangle) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (g \in G_{1,\infty}, z \in \mathcal{D})$$

により定まる。整数 \$\kappa > 4\$ と \$G\_{1,A} = G\_{1,A\_f}\$ の両コンパクト部分群 \$U\_{1,f}\$ に対し、\$U\_{1,f}\$ に関する weight \$\kappa\$ の正則 cusp form の空間 \$\widetilde{S}\_x(U\_{1,f})\$ を次のように定義する：

$$\widetilde{S}_x(U_{1,f}) = \left\{ f : G_{1,A} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \text{(i) 左 } G_1(\mathbb{Q}) \text{ 右 } U_{1,f} - \text{ 不变,} \\ \text{(ii) } G_{1,\infty} \text{ への制限は } j(g, z)^{\pm} \text{ を保型因子として} \\ \text{正則,} \quad \text{(iii) 有界} \end{array} \right\}.$$

同じ整数 \$\kappa\$ に対し、コンパクト群 \$G\_{2,\infty}\$ の表現 \$\rho = \rho\_x\$ を、その Young 図式が



となるものとする。 $\rho$  の表現空間  $M$  は  $\frac{1}{2}(I-1)(I-2)$  次元であり、このような対応  $\pi \leftrightarrow \rho$  により、 $G_{1,\infty}$  と  $G_{2,\infty}$  の上の軌道積分の間によい関係式が成立することになる。この  $\rho$  と  $G_{2,+} = G_{2,A+}$  の商コンパクト部分群  $U_{2,+}$  に対し、 $U_{2,+}$  に関する ‘weight  $\rho$ ’ の保型形式の空間  $\widetilde{G}_\rho(U_{2,+})$  を

$$\widetilde{G}_\rho(U_{2,+}) = \left\{ f : G_{2,A} \longrightarrow M \mid \begin{array}{l} \text{(i) 左 } G_2(\mathbb{Q}) \text{ 右 } U_{2,+} \\ \text{不变, (ii) } f(gg_\infty) = \rho(g_\infty)^{-1} f(g) \quad \forall g_\infty \in G_{2,\infty} \end{array} \right\}$$

により定める。

上の状況において、 $G_{i,+}$ 、 $U_{i,+}$  に関する Hecke 環を  $\mathcal{L}(G_{i,+}, U_{i,+})$  とし、 $\varphi_i \in \mathcal{L}(G_{i,+}, U_{i,+})$  [resp.  $\varphi_2 \in \mathcal{L}(G_{2,+}, U_{2,+})$ ] を定める  $\widetilde{G}_\pi(U_{1,+})$  上 [resp.  $\widetilde{G}_\rho(U_{2,+})$  上] の Hecke 作用素を  $T_i(\varphi_{i,+})$  [resp.  $T_2(\varphi_{2,+})$ ] と書くこととする。周知の Selberg trace formula により、次の跡の積分表示を得る：

$$\begin{aligned} & \text{trace}(T_i(\varphi_{i,+})) \\ &= \int_{G_i(\mathbb{Q}) \backslash G_{i,A}} \sum_{\sigma \in G_i(\mathbb{A})} (\varphi_{i,\infty} \otimes \varphi_{i,+})(\bar{g} \sigma g) dg \quad (i=1,2). \end{aligned}$$

ここで  $\varphi_{1,\infty}$  は  $G_{1,\infty}$  上の weight  $r$  の Bergman 核、 $\varphi_{2,\infty}$  は  $\rho^{-1}$  の trace とする。（測度、normalization については省略する。）

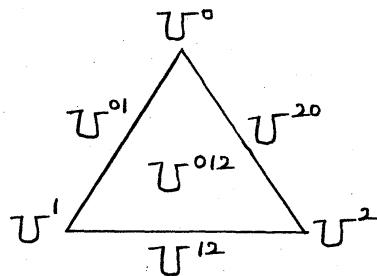
## 2. 結果

以下,  $(\frac{F/\alpha}{p}) = +1$  なる  $\mathbb{Q}$  の有限素点  $p$  をひとつ固定す

る. 従って,

$$G_{1,p} \cong G_{2,p} \cong GL(3, \mathbb{Q}_p).$$

$GL(3, \mathbb{Q}_p)$  の standard parahoric subgroups を  $U^\tau$  ( $\tau = 0, 1, 2, 01, 12, 20, 012$ ) と書く. これらの包含関係は下図のようになる:



ここで  $U^0 = GL(3, \mathbb{Z}_p)$ ,  $U^{01} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & p* \\ * & * & p* \\ * & * & * \end{pmatrix} \right\} \cap U^0$ ,  $U^{012} = \left\{ \begin{pmatrix} * & p* & p* \\ * & * & p* \\ * & * & * \end{pmatrix} \right\} \cap U^0$  ( $* \in \mathbb{Z}_p$ ) で,  $U^0$  と  $U'$  と  $U^2$ ,  $U^{01}$  と  $U^{12}$  と  $U^{20}$  はそれぞれ共役な部分群であり, また  $U^{012}$  は Iwahori subgroup である. 先程, 同型により,  $G_{i,p}$  の開コンパクト部分群  $U_{i,p}^\tau$  が各々に対し定まる. ただし  $\mathcal{H}_p(U_{1,p}^\tau) = U_{2,p}^\tau$  とする.

さらに各々に対し,  $G_{i,+}$  の開コンパクト部分群  $U_{i,+}^\tau$  を,

$$U_{i,+}^\tau = \overline{\prod_{l+p} U_{i,l} \times U_{i,p}^\tau} \quad (i=1, 2)$$

で定める. ここに  $U_{i,l}$  は  $G_{i,l}$  ( $\tau$  によらず) の開コンパクト部分群で  $\mathcal{H}_p(U_{1,l}) = U_{2,l}$  を満たすものとする.

次に Hecke 環  $L(G_{i,+}, U_{i,+}^\tau)$  の元  $f_{i,+}^\tau$  を次の形のもととする:

$$\mathcal{G}_{i,f}^{\tau} = \bigotimes_{l \neq p} \mathcal{G}_{i,l} \otimes \mathcal{G}_{i,p}^{\tau} \quad (i=1,2).$$

ここに  $\mathcal{G}_{i,l} \in \mathcal{L}(G_{i,l}, U_{i,l})$  ( $l \neq p$ ) であり,  $\mathbb{H}_l^*(\mathcal{G}_{2,l}) = \mathcal{G}_{1,l}$  とする. また  $\mathcal{G}_{i,p}^{\tau}$  は  $U_{i,p}^{\tau}$  の特性関数とする.

各  $\mathcal{G}_{i,f}^{\tau}$  は,  $\mathbb{G}_x(U_{1,f}^{\tau})$  ( $i=1$ ) もしくは  $\mathbb{G}_p(U_{2,f}^{\tau})$  ( $i=2$ ) 上に Hecke 作用素  $T_i(\mathcal{G}_{i,f}^{\tau})$  を定めるが, 我々の結果は,

定理  $\forall r > 4$  に対し 次の関係式が成立する:

$$\sum_{\tau} \varepsilon(\tau) \text{trace}(T_1(\mathcal{G}_{1,f}^{\tau})) = \sum_{\tau} \varepsilon(\tau) \text{trace}(T_2(\mathcal{G}_{2,f}^{\tau}))$$

ただし,

$$\varepsilon(\tau) = \begin{cases} +1 & \cdots \tau = 0, 1, 2, 012 \\ -1 & \cdots \tau = 01, 12, 20 \end{cases}.$$

さて, 伊吹山・橋本両氏の,  $S_p(2, \mathbb{R})$  との compact twist に関する比較定理においては, ふたつの  $\mathbb{Q}$ -groups は無限素点とある 1 個の有限素点で同型でなく, その唯一個の有限素点において parahoric subgroups に関する交代和が導入されている. ところが我々の  $G_1$  と  $G_2$  はすべての有限素点で同型なのであるから, ど二かの有限素点で交代和をとるという必要はないのではないかとも思われよう. 実際, 別の定式化(たとえば表現論的な定式化)によつてより‘自然’な比較定理が得られる可能性はあると思うが, 現在のところよくわからない. しかし, 我々がここに述べてきたような方向で比較しようとするときには, 次のことと示すことがで

きる：

命題  $G_{i,f}$  の両コンパクト部分群  $U_{i,f} = \prod_{l \neq \infty} U_{i,l}$  ( $i=1, 2$ ) で  $\mathbb{A}_f$  上において  $\mathbb{H}_e(U_{1,l}) = U_{2,l}$  をみたすものが、任意に与えられたとき、次、(i), (ii) をみたす  $\mathcal{L}(G_{i,f}, U_{i,f})$  の元  $\varphi_{i,f} = \bigotimes_{l \neq \infty} \varphi_{i,l}$  ( $i=1, 2$ ) が存在する。

(i)  $\mathbb{A}_f$  上において  $\mathbb{H}_e^*(\varphi_{2,l}) = \varphi_{1,l}$ .

(ii)  $\text{trace}(T_1(\varphi_{1,f})|_{\mathcal{G}_p(U_{1,f})}) \neq \text{trace}(T_2(\varphi_{2,f})|_{\mathcal{G}_p(U_{2,f})})$

となるような  $\varphi > 4$  が無限個存在する。

### 3 証明の方針

定理の証明で主に用いるのは、以下の二ことである：

(1)  $G_{1,\infty}$  と  $G_{2,\infty}$  上の軌道積分の間の関係式。

(2)  $G_{1,\infty}$  における Selberg 原理。

(iii)  $G_{1,p} \cong G_{2,p} \cong GL(3, \mathbb{Q}_p)$  の上の ‘Steinberg型’ 軌道積分がある範囲の共役類上で消えていること。

(二)  $G_i(\mathbb{Q})$  のひとつずつ stable conjugacy class に含まれる共役類の記述。

(i)  $G_i$  の trace formulaにおいて、半単純でない元の寄与 ( $\lim_{s \downarrow 0}$  つきの表示) から (ii) の軌道積分が ‘くくり出せる’ こと。

ここでは (ii) についてのみ、簡単に触れておくことにする。

我々の群 $G_i$ においては、stable conjugacy & conjugacyは一致しない。Langlands [5] の序文にあるように、こうような場合、trace formula の比較には、 $GL(n)$ と simple algebra の場合などには見られない新しい困難があると考えられる。それは、半单纯元に対するなら、local な軌道積分の商、関係式から global な trace の商、関係式が直ちには出てこないという困難である。

我々の場合、(二)の知識を使えてこれを見なおすことができる。 $f(x)$ を F 係数、3 次、monic で  $f(0) \neq 0$  かつ‘相反型’の多項式とし、簡単のため  $f(x)$  は separable とする。こうとき

$$C_i(f(x))_{\alpha} = \left\{ g \in G_i(\mathbb{Q}) \mid g \text{ の固有多項式は } f(x) \right\}$$

とし、 $\sim_{\alpha}$  で  $G_i(\mathbb{Q})$ -共役による同値を表わす。また  $v$  の各素点  $v$  において  $C_i(f(x))_v, \sim_v$  を同様に定義する。こうときよく知られているように、自然な写像

$$C_i(f(x))_{\alpha}/\sim_{\alpha} \longrightarrow \prod_v C_i(f(x))_v/\sim_v$$

は injective であるが、もちろん surjective ではなく、その像は (i) adelic な条件、および (ii) 各  $v$  における不变量のすべての  $v$  をわたる積が 1 という形の product formula 型の条件の両者によって特徴づけられる。ここで容易にわかることは、上に述べた困難をひきおこしているのは (ii) の product

formulaだということである。

ところが、 $f(x)$ が  $F$  上既約の場合、この product formula 型の条件は出てこない、である。従ってそのような  $f(x)$  に 対応する寄与については、local な(1)から直ちに global な関係式を得ることができる。

では、 $f(x)$  が  $F$  上可約の場合はどうかと言うと、この仮定から  $C_i(f(x))_P$  が (1) の ‘消える’ 型になることがわかる。つまりこのような  $f(x)$  に対応する寄与は 0 になる。ここで  $P$  が  $(F/\mathbb{Q}) = + \pm$  なる素点であるため、‘ $P$  で交代和をとる’ という操作は、共役類の寄与を消す働きが大きくなる。話がうまくいき、たのである。

詳細については [4] を参照して下さい。

### 文献

- [1] T. Ibukiyama, On symplectic Euler factors of genus two, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA, 30 ('84)
- [2] —————, On relations of dimensions between automorphic forms of  $Sp(2, \mathbb{R})$  and its compact twist  $Sp(2)$  (I), Bonn. Math.
- [3] T. Ibukiyama and K. Hashimoto, ————— (II), Bonn. Math.

- [4]. H. Koseki, On a comparison of trace formulas  
for  $GU(1,2)$  and  $GU(3)$ , to appear.
- [5]. R. P. Langlands, Stable conjugacy; definitions and  
lemmas, Canad. J. Math. 31 ('79).