数理解析研究所講究録
546巻 1985年 63-78

総実代数体（特に実2次体）のゼータ函数について

岐阜大教育　畑田一幸（Kazuyuki Hatada）

序.

Kを総実代数体，$\mathcal{O}_K$をKの整数環，$g=[K:\mathbb{Q}]$，h_Kを$\mathcal{O}_K$の類数，d_KをKの絶対判別式，pで素数を表し，R_pをKのp進regulator，$\zeta_K(s)$をKのDedekindゼータ函数とする。nで1以上の有理整数を表す。ヘッケ，ジーゲル，クリンゲン，新谷等の定理によって，(i)：$\zeta_K(1-n)\in\mathbb{Q}$ 及び，(ii)：$\zeta_K(1-2n)\neq 0$ が知られている。(i)の性質は Kの任意の部分ゼータ函数に対しても成立する。$K=\mathbb{Q}$の時，ベルヌーイ数$\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$を用いて，$\zeta_{\mathbb{Q}}(1-n)=-B_n/n$ と書ける。von Staudtの定理により，$\mathrm{ord}_p(\zeta_{\mathbb{Q}}(2-p))=-1$である。この性質は，$p$進及び標数$p$の モジュラー形式の理論において基本的である。我々は 次の問題を考えたい。

<u>問題1</u>. Kのみに 依存する正の定数c_Kで 次の性質 “ ”を持つものが存在するか？

"c_K より大きなすべての素数pに対して，$\mathrm{ord}_p(\zeta_K(2-p))<0$ が成立する。"

さて，$\zeta_K(s,1)$を $\mathrm{Re}\, s>1$ において $\sum_{\mathfrak{a}} |N_{\mathbb{Q}}^K(\mathfrak{a})|^{-s}$（ここで $\mathfrak{a}$ は (0)でない単項整ideal$(\subset \mathcal{O}_K)$全体を動くとする）で定義されるゼータ函数とする。同様に$\zeta_K(s,1^+)$を $\mathrm{Re}\, s>1$ において $\sum_{\mathfrak{a}} |N_{\mathbb{Q}}^K(\mathfrak{a})|^{-s}$（ここで，$\mathfrak{a}$は総正な元で生成される単項整ideal$(\subset \mathcal{O}_K)$全体を動くとする）で定義されるゼータ函数とする。我々は，問題1の$\zeta_K(s)$を$\zeta_K(s,1)$ (resp. $\zeta_K(s,1^+)$)でおきかえた問題を 問題2A (resp. 問題2B)と呼ぶことにする。

Remark 1. $p \nmid (2g)$ とせよ。すると次が成立する。

$$\mathrm{ord}_p(\zeta_K(2-p)) = -1 \quad \text{if } \mathrm{ord}_p(\zeta_K(2-p))<0.$$

よって $p \nmid (2g)$ の時，次は同値になる。

$$\mathrm{ord}_p(\zeta_K(2-p))<0 \iff p \nmid (\zeta_K(2-p)/\zeta_{\mathbb{Q}}(2-p)).$$

Remark 2. あるKとpに対して，問題1 or 2A or 2Bが肯定的な答を持つならば，そのKとpに対してレオポルド予想：$R_p \neq 0$ が成立する。

問題1，2A，2Bを解くのは難しそうである。我々は主定理として，Kが実2次体の場合に，$\mathrm{ord}_p(\zeta_K(2-p))<0$ なる為のcriteriaを与える。§1の定理1を参照下さい。

この定理1を用いてcomputerによって次の結果を得た。

結果1. $K=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ とする。この時，次が成立する。

$$\mathrm{ord}_p(\zeta_K(2-p))=-1 \quad \textit{for every odd prime } p\leqq 533101.$$

この結果は，問題1が肯定的な答を持つと推測する場合のひとつの根拠を与える。

異なった観点より，我々は問題1に関して，computer による別の実験を更に行なった。簡単にする為，実2次体Kとして $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の場合を扱う。$\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $u_0=0$, $u_1=1$ かつ漸化式 $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ $(n\geqq 0)$ で定義される Fibonacci 数列とする。数列 $\{r_p\}_{p:\text{素数}\ p\neq 5}$ を次の様に定める。

$$\begin{cases} r_p=(u_{p-1}\text{ を }p^2\text{ で割った時の余り}) & \text{if } p\equiv\pm 1 \pmod 5,\\ r_p=(u_{p+1}\text{ を }p^2\text{ で割った時の余り}) & \text{if } p\equiv\pm 2 \pmod 5.\end{cases}$$

次の問題を考えたい。

問題3. 数列 $\{r_p/p^2\}_{p:\text{素数},\ p\neq 5}$ は 区間 $[0,1)$ で *at random* に分布しているか？

もし問題3が肯定的答を持つならば，$\mathrm{ord}_p(\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(2-p))\geqq 0$ をみたす素数 p が稀ではあるが無限個存在する可能性が非常に高くなる。(← Serre に依る。) それ故，我々は 問題3 について，ワイルの一様分布定理を用いて，computer によって，分布に関する数値 data を求めた。それを見ると，問題

3の答が肯定的である可能性があり，しかもその様に感じられる。しかし，目下の所 そのdataからその断定するのは難しい。

我々は問題3を次の問題と比較する。
“数列 $\{(2^{p-1}-1)/p^2\}_{p:\text{奇素数}}$ は $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ においてat randomに分布しているか？”

我々は これに関しても computer により数値data を得た。

数列 $\{\gamma_p/p^2\}_{p\neq 5}$ と $\{(2^{p-1}-1)/p^2\}_{p\neq 2}$ の $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ における分布に関する我々の数値dataを Odlyzko 及び Zagier に見せた所，彼等の意見のoutlineは次の如し。それらのdataは，$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ における一様分布仮説に矛盾するものではなく，むしろ一様分布性を示唆する様に感ぜられる。しかしこの表を見てその様な断定をする事は非常に難しい事である。

この講演の詳細は，筆者のpreprint [1] に書きました。

なお，Appendix として，この講演においては述べなかった事ですが，この問題 1，2A，2B と　　関連する我々が以前に得た結果を，一部付け加えました。

§1. 結果と方法。

$K/\mathbb{Q}$ を任意の総実Abel拡大，$g=[K:\mathbb{Q}]$，fを

$K/\mathbb{Q}$ の conductor, $\mathfrak{P}$ を K の素 ideal で p をわりきるもの, r を $\mathfrak{P}|p$ に関する residue class degree とする。$p \nmid (2f)$ と仮定。次の2つの定義（レホポルドによる）から始める。

<u>定義1.</u> "Fermat quotient mod p": $A \in \mathcal{O}_K$ with $(p, A) = 1$ に対して, $Q_p(A) \equiv (A^{p^r-1} - 1)/p \pmod p$ を A の Fermat quotient mod p という。（ここで, $(A^{p^r-1} - 1)/p \in \mathcal{O}_K$ である事に注意されたい。）

<u>定義2.</u> "K の residue class regulator (mod p) : $R^{(p)} \pmod p$".

$$R^{(p)} \pmod p \equiv \pm \det\left[\left(Q_p(\sigma_i v_j)\right)_{\substack{1 \leq i \leq g-1 \\ 1 \leq j \leq g-1}}\right] \pmod p.$$

ここで, $\{v_1, v_2, \cdots, v_{g-1}\}$ は $\mathcal{O}_K^*$ のひとつの基本単数系で, $\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_g\} = Gal(K/\mathbb{Q})$ とする。

まず次の結果が得られる。

<u>命題1.</u> $p \nmid (2fgh_K)$ と仮定すると, 次は同値になる。

$$R^{(p)} \not\equiv 0 \pmod p \Leftrightarrow p \nmid (\zeta_K(2-p)/\zeta_{\mathbb{Q}}(2-p)).$$

さて, $\hat{G}(K/\mathbb{Q})$ で $Gal(K/\mathbb{Q})$ の dual group $Hom(Gal(K/\mathbb{Q}), \mathbb{C}^*)$ を表す。ここでは $\hat{G}(K/\mathbb{Q})$ の元を, conductor が f を割る様な原始的ディリクレ指標

と通常の如く対応させて考える。

命題2. $p \nmid (2f)$ と仮定すると次は互いに同値になる。

$p \nmid (\zeta_K(2-p)/\zeta_{\mathbb{Q}}(2-p))$

$\Longleftrightarrow$ G.C.D.$(p, B_{p-1,\chi}) = 1$ for every primitive non-trivial $\chi \in \hat{G}(K/\mathbb{Q})$.

$\Longleftrightarrow$ G.C.D.$(p, L_p(1,\chi)) = 1$ for every primitive non-trivial $\chi \in \hat{G}(K/\mathbb{Q})$.

ここで, $L_p(s,\chi)$ は p 進L函数を, $B_{n,\chi}$ は一般化されたベルヌーイ数を表すとする。

さて Kを実2次体: $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_K})$ で, ε を Kの基本単数 >1 とする。ε' で ε の $\mathbb{Q}$ 上の共役を表す。整数列 $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $y_n = (\varepsilon^n - \varepsilon'^n)/(\varepsilon - \varepsilon')$ で定める。これは次と同値。$y_0 = 0$, $y_1 = 1$ and $y_{n+2} = (\varepsilon+\varepsilon')y_{n+1} - \varepsilon\cdot\varepsilon' y_n$ $(n \geqq 0)$. (Note: $\varepsilon+\varepsilon' \in \mathbb{Z}$ and $\varepsilon\cdot\varepsilon' = \pm 1$). mを任意の正の有理整数とする。次の補題を得る。

補題1. 数列 $\{y_n \pmod m\}_{n=0}^{\infty}$ は最初の項から始まる循環数列である。

(よって次の定義が可能になる。)

定義3. $k(m) =$ 数列 $\{y_n \pmod m\}_{n=0}^{\infty}$ の最小の循環節の長さ。

以上の記号の下で我々の得た定理は次のとおり。

定理1. $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d_K})$ とする。$p \nmid (2d_K h_K(\varepsilon-\varepsilon')^2)$ と仮定する。この時，次は互いに同値になる。

$$\mathrm{ord}_p(\zeta_K(2-p))<0.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y_{p-1} \not\equiv 0 \pmod{p^2} & \text{if } p\mathcal{O}_K=\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2, \\ y_{p+1} \not\equiv 0 \pmod{p^2} & \text{if } p\mathcal{O}_K \text{ is prime in } \mathcal{O}_K. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad k(p) \neq k(p^2).$$

Remark 3. $p \nmid (2d_K(\varepsilon-\varepsilon')^2)$ ならば 次が成立する。

$p \mid y_{p-1}$ if $p\mathcal{O}_K=\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$. $p \mid y_{p+1}$ if $p\mathcal{O}_K$ is prime in $\mathcal{O}_K$.

特に $K=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ とする。この時 数列 $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ は序文で定義した Fibonacci 数列 $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ になる。$d_K=5$, $h_K=1$, $\varepsilon=(1+\sqrt{5})/2$. 次では $k(m)$ で $\{u_n \pmod{m}\}_{n=0}^{\infty}$ の最小循環節の長さを表す事とする。

定理1の系. $p\neq 2$ かつ $p\neq 5$ の時，次は互いに同値である。

$$\mathrm{ord}_p(\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(2-p))<0.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} u_{p-1} \not\equiv 0 \pmod{p^2} & \text{if } p\equiv \pm 1 \pmod{5}, \\ u_{p+1} \not\equiv 0 \pmod{p^2} & \text{if } p\equiv \pm 2 \pmod{5}. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad k(p) \neq k(p^2).$$

Remark 4. $\mathrm{ord}_5(\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(2-5)) = -1$ である。

名大大型計算機センターの FACOM-M-200 を約1280分動かして次の結果を得た。

結果2. 任意の素数 $p \leqq 533101$ に対して,

$$\begin{cases} u_{p-1} \not\equiv 0 \pmod{p^2} & \text{if } p \equiv \pm 1 \pmod 5, \\ u_{p+1} \not\equiv 0 \pmod{p^2} & \text{if } p \equiv \pm 2 \pmod 5. \end{cases}$$

その computer の region size は 7168 KB。我々の computer program は, そのまま変更なしで, 時間と予算が許せば $p \leqq 3703674$ まで動く。

結果1は, 定理1の系と結果2より導かれる。

§2. Distribution of the Residues.

§1と別の観点から問題1を扱う。

我々は問題1が肯定的答を持つ可能性があると考える。結果1 for $K=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ は, その考え方を支持する様にみえる。

一方別の考え方 (Serre) がある。簡単にする為に, $K=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の場合を考える。xを正の実数とし, $S_1(x) = \{p \mid p$ は素数で, $p \nmid 10,\ p \leqq x,\ \mathrm{ord}_p(\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(2-p)) \geqq 0\}$

とおく。その考え方は次の様に主張する。“問題1の答は否定的であろうし，しかも $\#S_1(x)$は，『$\#S_1(x) \asymp \log\log x$』となりうるであろう”。ここで『　』の部分は，“$^\exists c_1>0$ and $^\exists c_2>0$ such that $c_1 \log\log x \leqq \#S_1(x) \leqq c_2 \log\log x$ for all sufficiently large x”を意味する。この考え方の根拠は，問題3が肯定的な答を持つであろうという予想である。

それ故我々は問題3について，computerを用いて数値実験を行なった。（問題3の答が肯定的になるのか否定的になるのか知り得る事を期待して試みた。）

Remark 5. 問題3は任意の実2次体 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d_K})$ に対して，次の問題3′の様に一般化される。記号は§1の通りとする。

問題3′. $\{y_{p-1}/p^2\}_{p:\text{素数 with}\left(\frac{d_K}{p}\right)=1} \cup \{y_{p+1}/p^2\}_{p:\text{素数 with}\left(\frac{d_K}{p}\right)=-1}$ は，$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ において，

at random に 分布しているか？

我々は次の定理を用いた。

定理（H. ワイル）　$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を任意の実数列とする。これが $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上で一様分布する条件と次は同値である。

任意の正整数 m に対して，$\lim_{N\to+\infty} N^{-1}\sum_{n=1}^{N} \cos(2\pi m x_n) =$

$\lim_{N\to+\infty} N^{-1}\sum_{n=1}^{N} \sin(2\pi m x_n) = 0$ が成立する。

さて整数 m に対して，$S(m,x) = (\pi(x)-1)^{-1}\sum_{p\leq x,\, p\neq 5} \sin(2\pi m \gamma_p/p^2)$，

$C(m,x) = (\pi(x)-1)^{-1}\sum_{p\leq x,\, p\neq 5} \cos(2\pi m \gamma_p/p^2)$ とおく。ここで

$\pi(x)$は x 以下の素数の個数を表す。ワイルの定理より，次は同値となる。“ 問題3が肯定的解を持つ $\Longleftrightarrow$ $\lim_{x\to+\infty} S(m,x) = \lim_{x\to+\infty} C(m,x) = 0$ for every integer $m\geqq 1$.” computer を用いて $S(m,x)$ と $C(m,x)$を，任意の $m\in[1,6]$ と 任意の $x\in[3, 22343]$ に対して計算した。その結果を表にまとめたが，それはここでは省略する。（その表については筆者の［1］に書きました。）その表を見ると一見一様分布である様に，x を大きくする時 $S(m,x)$ と $C(m,x)$ の数値が0に近く（0.01位迄）なっていく。しかし表を細かく見れば，$\lim_{x\to+\infty} S(m,x)$ と $\lim_{x\to+\infty} C(m,x)$ が存在するのか？ そして極限値を持つならばその値は0なのか？ 推測するのは困難である。（$\Leftarrow$ 特に，$S(3,x)$, $C(1,x)$, $C(2,x)$, $C(5,x)$ と $C(6,x)$ の値を見た場合。） しかし，$S(m,x)$ と $C(m,x)$ を もっと大きい数 x まで計算すれば，$S(m,x)$ と $C(m,x)$ は $x\to+\infty$ の時，0に収束する様に見えるかもしれない。目下の所，

問題3の答が肯定的か否定的か断定するのは我々には難しい。

序文で定めた数列 $\{\gamma_p\}_p$ に対して,

$$\begin{cases} \gamma_p \equiv 5^{-1/2}(\varepsilon^{p-1}-\varepsilon^{1-p}) \pmod{p^2} & \text{if } p\equiv \pm 1 \pmod 5, \\ \gamma_p \equiv 5^{-1/2}(\varepsilon^{p+1}-\varepsilon^{-1-p}) \pmod{p^2} & \text{if } p\equiv \pm 2 \pmod 5 \end{cases}$$

where $\varepsilon=(1+\sqrt{5})/2$, が成立する事に注意すると,

$\{\gamma_p/p^2 \pmod{\mathbb{Z}}\}_{p\nmid 10}$ は $\{(2^{p-1}-1)/p^2 \pmod{\mathbb{Z}}\}_{p\neq 2}$ と似ている事がわかる。よって問題3の類似として次の問題4を考える価値があると思われる。

<u>問題4.</u> $\{(2^{p-1}-1)/p^2 \pmod{\mathbb{Z}}\}_{p\neq 2}$ は, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上で at random に分布しているか?

この数列についても $S(m,x)=(\pi(x)-1)^{-1}\sum_{p\leq x,\, p\neq 2}\sin(2\pi m(2^{p-1}-1)/p^2)$ と $C(m,x)=(\pi(x)-1)^{-1}\sum_{p\leq x,\, p\neq 2}\cos(2\pi m(2^{p-1}-1)/p^2)$ を任意の $m\in[1,6]$ と任意の $x\in[3,27197]$ に対して, Computer で計算して表を作った。(その表はここでは省略します。筆者の [1] に書きました。) その表の数値は, $\{\gamma_p/p^2\}_{p\neq 5}$ の場合の $S(m,x)$ と $C(m,x)$ とよく似ており, 類似の特性を持っていると思われる。

$K=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ に対する問題1は, Open な

<u>問題5.</u> 集合 $\{p \mid \text{素数},\ p^2 \mid (2^{p-1}-1)\}$ は有限集合か?

と類似の問題と考えられる。D.H. Lehmer によって,

$p \leqq 6 \times 10^9$ の範囲で，$p^2 \mid (2^{p-1}-1)$ をみたす素数 p は 1093と3511のみである事が調べられている。

問題3の答が肯定的か否定的かを問わず，結果2をもっと大きな数迄計算するのは意義がある。もしその時，$\mathrm{ord}_q(\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(2-q)) \geqq 0$ をみたす素数 q がみつかればおもしろい。それを実行する時，問題5を大きな数迄検証する時と，同じtypeの計算上の困難さがある。

Remark 6: 問題3と問題4について，我々の数値data($S(m,x)$ と $C(m,x)$ に関する)から，どう判定すべきか，OdlyzkoとZagierに聞いた。

◎Zagierの意見の概略。我々のdataはrandomnessを示す程充分に速く0に近付いていく様だ。(この事を表から直接判断するのは困難だけれども。) 一方問題3と4に，証明を与える事は非常に難しいであろう。

⊙Odlyzkoの意見の概略。我々のdataは，分布がat randomであるという仮説と矛盾していない。(n個の，-1と$+1$の間に値をとるrandom numberが与えられた時，その和の期待値は $\sqrt{n}$ のorderである。我々のdataはこれに矛盾しない。)

Odlyzkoは，$\{(2^{p-1}-1)/p^2\}_{p \neq 2}$ の $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ における分布について別の計算を試みた。即，任意の $k \in [1, 100]$ に対して次の数 a_k を計算した。$a_k = \#\{p \mid p$ は素数，

$3 \leqq p \leqq 500000$, $\frac{k-1}{100} \leqq \frac{2^{p-1}-1}{p^2}$ の小数部分 $\lneqq \frac{k}{100}$ $\}$.
その表はここでは省略する。(cf. 筆者の[1]。) その表を一見すると $\{(2^{p-1}-1)/p^2\}_{p \neq 2}$ の分布は random の様に見える。しかしそれを確実に主張するにはもっと大きな数値まで計算する必要がありそうである。というのは、問題3と4の答が否定的かもしれないという弱い徴候があるから。それは次の様な推理である。Odlyzko は上記の $\{a_k\}_{k=1}^{100}$ の分散を計算した。 $\sum_{k=1}^{100} a_k = 41537$.

$$\sum_{k=1}^{100} (a_k - 415.37)^2 = 5.23 \times 10^4.$$

さてA個の球をB個の箱に at random に入れる時、分散の期待値は $A(B-1)/B$ である。今の場合、$A=41537$ で $B=100$ であるから、4.11×10^4 である。5.2 という数値は、4.1 より「非常に大」ではないけれども、少し大きい様に感じられる。よって問題3と4については、更に考察せねば答が肯定的になるか否定的になるか断定する事は困難である。

APPENDIX.

総実代数体 K の Dedekind ゼータ函数 $\zeta_K(s)$ の $s=1-n$ ($n \geq 1$ 有理整数)における値に関して以前(1979〜1980年)得た結果

(in Hatada [2]) ですが，上述の事と関連しますので，ここに一部分の結果だけですが，記そうと思います。

K：総実代数体，$\mathcal{O}_K$：Kの整数環，$g=[K:\mathbb{Q}]$，I_K：Kの non-zero な分数イデアル全体の作る乗法群，$P_K^+=\{(\alpha)\in I_K \mid \alpha$ はKの総正な元$\}$，$C_K^+=I_K/P_K^+$，$h_K^+=\#C_K^+$。$\{\mathfrak{c}(1), \mathfrak{c}(2), \cdots, \mathfrak{c}(h^+)\}$ を Kの整イデアルで C_K^+ の代表系とする。
$M_k(K, SL_2(\mathcal{O}_K), \mathbb{C})=\prod_{t=1}^{h^+} M_k(\mathfrak{c}(t), SL_2(\mathcal{O}_K), \mathbb{C})$
を *Hilbert modular vector forms of weight k* の空間 (cf. Hermann [3]) とする。$\{T_k'(\mathfrak{q})\}_{\mathfrak{q}:\text{素イデアル in } K}$ を $M_k(K, SL_2(\mathcal{O}_K), \mathbb{C})$ に作用するヘッケ作用素とする。pで任意奇素数を表す。今，$k=p-1$ とおく。この時，
$\{\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \cdots, \mathfrak{f}_{r_{p-1}}\}\subset M_{p-1}(K, SL_2(\mathcal{O}_K), \mathbb{C})$ を，ヘッケ作用素の同時固有 *vector form* の全体とする。今，
$\{\lambda_{\mathfrak{q},j}\}_{\mathfrak{q}:\text{素イデアル in } K}$ で，$\mathbb{C}\mathfrak{f}_j$ に作用する $\{T_{p-1}'(\mathfrak{q})\}_{\mathfrak{q}:\text{素イデアル in } K}$ の固有値の *system* を表すとする。特に $\mathfrak{f}_1$ として，
($\lambda_{\mathfrak{q},1}=1+N_{\mathbb{Q}}^{K}(\mathfrak{q})^{p-2}$ for every 素イデアル $\mathfrak{q}$ in $\mathcal{O}_K$) となる Eisenstein vector form を表す。$\zeta_K(s)$ で 通常のKの Dedekind ゼータ函数を表す。ここでは，$\mathfrak{P}$で，素イデアル $p\mathbb{Z}$ の $\bar{\mathbb{Q}}$ への ひとつの延長を表すとする。

この時，次が成立する。

定理(Theorem 1′ in Hatada [2]). 体Kのみに依存する正の数 m_K で次の性質を持つものが存在する。

『$p > m_K$ とせよ。もし, $M_{p-1}(K, SL_2(\mathcal{O}_K), \mathbb{C})$ において, 任意の整数 $y \in [2, \gamma_{p-1}]$ に対して,

$$\lambda_{\mathfrak{q}_y, y} \not\equiv 1 + N_{\mathbb{Q}}^{K}(\mathfrak{q}_y)^{p-2} \pmod{\mathfrak{P}}$$

をみたす素イデアル $\mathfrak{q}_y$ in $\mathcal{O}_K$ が存在するならば,

$$\mathrm{ord}_p\left(\zeta_K(1-n)\right) = -1 \text{ for every 整数 } n>0 \text{ with } n \equiv 0 \pmod{p-1},$$

が成立する。』

References

[1] K. HATADA: On values at negative integers of zeta functions of real quadratic fields. (preprint, 1983年(first version), 1984年(second version)).

[2] K. HATADA: A note on the denominators of values at negative integers of zeta functions

over totally real algebraic number fields.
(1979年～1980年) (unpublished manuscript).
[3] O. HERMANN: Über Hilbertsche Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerschen Productentwicklung. Math. Ann. 127, 357–400 (1954).