数理解析研究所講究録
546巻 1985年 1-16

SU(2,2) の Maass space について

東大・理　菅野 孝史
(Sugano Takashi)

§1. 背景と目的

2次，重さ k の Siegel 尖点形式 $F(Z)=\sum a_F(T)\mathbf{e}[\mathrm{tr}\,TZ]$ で，条件

$$a_F\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} = \sum_{\substack{d\mid(a,b,c)\\ d>0}} d^{k-1}\, a_F\begin{pmatrix} 1 & b/2r \\ b/2r & ac/r^2 \end{pmatrix}$$

を満たすもの全体のなす空間は Maass space と呼ばれ，Saito-Kurokawa lifting による（$SL_2(\mathbb{Z})$ に関する）重さ $2k-2$ の尖点形式の空間の像と一致することが知られている。(cf. [5], [3], [6], [1], [14])

[4] に於て、小嶋久祉氏は、Gauss 数体に関する符号 (2,2) のユニタリ群について、Maass space の類似を定義し，$\Gamma_0(4)$ に関する尖点形式との関係を調べ，その次元の評価を与えている。また、次元の決定，Hecke theory を調べることを，問題としてあげている。

このノートでは，一般の虚2次体の場合に，Maass space

の類似を定義し，その次元を求めるとともに，L関数の分解を調べることを目的とする。なお，ここで定義する空間は，小嶋氏のものとは少し異なり，それをある固有空間として含むものになっている。定義及び或る Jacobi (cusp) forms の空間との同型（定理1）は，[6]，[4]と全く同じ議論による。Jacobi form については，より一般的な状況―― $Sp(n+m)$ に於て，Levi 成分が $GL(m)\times Sp(n)$ となる *standard parabolic subgroup* の *unipotent radical* を $H_{n,m}$ と書くとき，$G_{n,m}=H_{n,m}\rtimes Sp(n)$ 上の保型形式という形 ―― で，佐武一郎先生により Lie 群のユニタリ表現論の立場から研究されている（[10]）。また，代数群上の保型形式の立場から（殊に，Hecke 環，L関数など）新谷卓郎先生により研究されている。今の場合（上の記号では $G_{1,2}$ にあたる）Jacobi forms の空間の次元は，村瀬篤氏との共同研究の結果（これは [10] で求められている Bergman 核を用いたもの），あるいはテータ関数を介して，よく知られている $SL_2(\mathbb{Z})$ に関するベクトル値尖点形式の次元公式によって求められる（定理2）。最後に，Hecke series の分母に対応するL関数が，Maass space に於いては定理1の同型で対応する Jacobi form のL関数で記述されることを見る（定理3）。

§2. Maass space

<u>1° SU(2,2) 上の保型形式・Maass space の定義</u>　K を判別式 D の虚 2 次体，$\mathfrak{o}$，$\mathfrak{d}$ をそれぞれ K の整数環，共役差積とする。$\mathbb{Q}$ 上の代数群 G を，その $\mathbb{Q}$－有理点が

$$G_{\mathbb{Q}} = \left\{ g \in GL_4(K) \;\middle|\; {}^t\bar{g}\begin{pmatrix} & 1_2 \\ -1_2 & \end{pmatrix} g = \mu(g)\begin{pmatrix} & 1_2 \\ -1_2 & \end{pmatrix},\ \det g = \mu(g)^2 \right\}$$

で与えられるもの（*direct similitudes* の群とよばれる cf. [12]）とし，部分代数群 G^1 を $G^1_{\mathbb{Q}} = G_{\mathbb{Q}} \cap SL_4(K)$ で定義する。G の実点の連結成分 G^+_∞ は，$I_{2,2}$ 型の既約有界対称領域 $\mathfrak{H} = \left\{ Z \in M_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; (2i)^{-1}(Z - {}^t\bar{Z}) > 0 \right\}$ に一次分数変換により作用する。すなわち，$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G^+_\infty$，$Z \in \mathfrak{H}$ のとき，$g\langle Z\rangle = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$。また，$J(g,Z) = \mu(g)^{-1} \times \det(CZ+D)$ は，$G^+_\infty \times \mathfrak{H}$ 上のスカラー値正則保型因子となる。$\Gamma = G^1_\infty \cap SL_4(\mathfrak{o})$，$k \geqq 1$ とし $\mathfrak{S}_k(\Gamma)$ で次の条件をみたす $\mathfrak{H}$ 上のスカラー値関数 F（Γ に関する重さ k の cusp form）の空間をあらわす。

i) F は $\mathfrak{H}$ 上正則，ii) $F(\gamma\langle Z\rangle) = J(\gamma, Z)^k F(Z)$ $\forall \gamma \in \Gamma$,

iii) $F(g\langle Z_0\rangle) J(g, Z_0)^{-k}$ は G^1_∞ 上有界 $\left(Z_0 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right)$.

$\mathfrak{S}_k(\Gamma)$ の元 F は，

$$(1)\quad F(Z) = \sum_{\substack{T = \begin{pmatrix} m & \alpha \\ \bar{\alpha} & n \end{pmatrix} > 0 \\ m, n \in \mathbb{Z},\ \alpha \in \mathfrak{d}^{-1}}} a_F(T)\, e[\operatorname{tr} TZ]$$

と Fourier 展開される。Fourier 係数が、条件

$$(2)\qquad a_F\begin{pmatrix} m & \alpha \\ \bar\alpha & n \end{pmatrix} = \sum_{\substack{r|m,\ r|n \\ r^{-1}\alpha\in\delta^{-1},\ r>0}} r^{k-1} a_F\begin{pmatrix} 1 & \alpha/r \\ \bar\alpha/r & mn/r^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}\forall m,n\in\mathbb{Z} \\ \forall\alpha\in\delta^{-1},\end{matrix}$$

を満たす元全体のなす $\mathfrak{S}_k(\Gamma)$ の部分空間を Maass space と呼び，$\mathcal{M}_k(\Gamma)$ と記す。

<u>2° Jacobi forms</u> $H_{\mathbb{Q}} = \{h = (u,v,z) \mid u,v\in K,\ z\in\mathbb{Q}\}$,
$G'_{\mathbb{Q}} = SL_2(\mathbb{Q})$ を

$$h=(u,v,z) \longmapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & z & v \\ & 1 & \bar v & 0 \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & u & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & -\bar u & 1 \end{array}\right),\quad g' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & a & & b \\ \hline & & 1 & \\ & c & & d \end{array}\right)$$

により G^1 の部分群と見て，$\underline{\underline{G}}' = H\cdot G'$ とおく．$Z = \{(0,0,z)\}$ は H 及び $\underline{\underline{G}}'$ の中心となる。演算は具体的には，

$$(u_1,v_1,z_1)(u_2,v_2,z_2) = (u_1+u_2,\ v_1+v_2,\ z_1+z_2+u_1\bar v_2+\bar u_1 v_2) ,$$

$$g^{-1}(u,v,z)g = (u',v',z') \qquad \text{ここで，} (u',v') = (u,v)g\ ,\ g\in G'$$
$$z' = z - \bar u v + \bar u' v'$$

で与えられる。$\mathfrak{D} = \{Z = (z, w_1, w_2)\in\mathbb{C}^3 \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ に $\underline{\underline{G}}'_\infty$ は，

$$\underline{\underline{g}}\langle Z\rangle = \left(g\langle z\rangle\ ,\ \frac{w_1}{j(g,z)} + u\cdot g\langle z\rangle + v\ ,\ \frac{w_2}{j(g,z)} + \bar u\cdot g\langle z\rangle + \bar v \right)$$

により作用する。但し，$\underline{\underline{g}} = (u,v,z)g$ ，$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ ，$g\langle z\rangle = \dfrac{az+b}{cz+d}$，
$j(g,z) = cz+d$ とおいた。自然数 r, k に対し次の $J_{r,k}(\underline{\underline{g}},Z)$ は $\underline{\underline{G}}'_\infty\times\mathfrak{D}$ 上のスカラー値正則保型因子を与える。

$$J_{r,k}(\underline{g}, Z) = j(g,z)^k\, \mathbf{e}\left[-r\left\{ z + u\bar{u}\, g\langle z\rangle + \frac{\bar{u}w_1 + uw_2 - cw_1w_2}{j(g,z)}\right\}\right].$$

$\underline{\Gamma}' = \Gamma \cap \underline{G}'_\infty = H_{\mathbb{Z}}\cdot\Gamma'$ （$\Gamma' = SL_2(\mathbb{Z})$） とおき，$\mathfrak{S}_{r,k}(\underline{\Gamma}')$ で次の条件をみたす，$\mathfrak{D}$ 上のスカラー値関数 f（weight k, index r の Jacobi cusp form と呼ぶべきもの）のなす空間をあらわす。

i) f は $\mathfrak{D}$ 上正則　，　ii) $f(\gamma\langle Z\rangle) = J_{r,k}(\gamma, Z)f(Z)$ $\forall \gamma \in \underline{\Gamma}'$,

iii) $f(\underline{g}\langle Z_0\rangle)J_{r,k}(\underline{g}, Z_0)^{-1}$ （$Z_0 = (i,0,0)$） は $\underline{G}'_\infty$ 上有界

$\mathfrak{S}_{r,k}(\underline{\Gamma}')$ の各元 f は，

$$(3)\quad f(z, w_1, w_2) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ \alpha\in\delta^{-1}}} a_f(n,\alpha)\, \mathbf{e}[nz + \bar{\alpha}w_1 + \alpha w_2]$$

と Fourier 展開される。尖点条件より，$\begin{pmatrix} r & \alpha \\ \bar{\alpha} & n\end{pmatrix}$ が正定値でなければ，$a_f(n,\alpha) = 0$ となる。

自然数 m に対し，Maass [6] にならって，線型写像 $\ell_r(m)$: $\mathfrak{S}_{r,k}(\underline{\Gamma}') \longmapsto \mathfrak{S}_{rm,k}(\underline{\Gamma}')$ を，

$$(4)\quad (\ell_r(m)f)(z, w_1, w_2) = m^{\frac{k-2}{2}} \sum_{S\in\Gamma'\backslash T'(m)} f|[\sqrt{m}^{-1}S]_{r,k}(z, \sqrt{m}\,w_1, \sqrt{m}\,w_2)$$

により導入しておく。　ここで $T'(m) = \{g \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det g = m\}$, $f \in \mathfrak{S}_{r,k}(\underline{\Gamma}')$ ，$f|[\underline{g}]_{r,k}(Z) = J_{r,k}(\underline{g}, Z)^{-1} f(\underline{g}\langle Z\rangle)$ （$\underline{g} \in \underline{G}'_\infty$） とおいた。

<u>3° Maass space と Jacobi forms</u>　$F\begin{pmatrix} \tau & w_1 \\ w_2 & z \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_k(\Gamma)$ を τ について Fourier 展開する：

(5)　$$F\begin{pmatrix} \tau & w_1 \\ w_2 & z \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(z, w_1, w_2)\, \mathbf{e}[m\tau] \quad .$$

これは Fourier 展開 (1) を用いれば，

$$F_m(z, w_1, w_2) = \sum_{n, \alpha} a_F\begin{pmatrix} m & \alpha \\ \bar{\alpha} & n \end{pmatrix} \mathbf{e}[nz + \bar{\alpha} w_1 + \alpha w_2]$$

と書かれる。

(6)　$F_r \in \mathfrak{S}_{r,k}(\underline{\Gamma}')$　，

(7)　$F \in \mathcal{M}_k(\Gamma) \Longleftrightarrow F_m = \ell_1(m) F_1 \quad \forall m$　，

は定義から直ちに確かめられる。次の定理によって，Maass space は，Jacobi cusp form の言葉で記述される。

<u>定理 1</u>　$F \longmapsto F_1$ により Maass space $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ は $\mathfrak{S}_{1,k}(\underline{\Gamma}')$ と同型となる。また，$\mathfrak{S}_{1,k}(\underline{\Gamma}')$ の元 f に対し

(8)　$$F(f)\begin{pmatrix} \tau & w_1 \\ w_2 & z \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} (\ell_1(m) f)(z, w_1, w_2)\, \mathbf{e}[m\tau]$$

は，これの逆対応を与える。

<u>証明</u>：(7) より，$F(f)$ が保型性をみたすことのみ証明すればよい。これは，Γ が $\left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$, $\begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix}$ 達で生成される（cf. [2], [8]）ことを考慮すれば容易にわかる。◢

<u>4° テータ関数との関係</u>　（この項は，定理 2 の別証を除いては必ずしも必要ではない。）$\mathfrak{S}_{r,k}(\underline{\Gamma}')$ の各元は，z を固定すると，テータ関数の空間

$$\vartheta_{r,z} = \left\{ \varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{正則，任意の } u, v \in \mathcal{O} \text{ に対し} \\ \varphi(w_1+uz+v,\, w_2+\bar{u}z+\bar{v}) = \mathbf{e}[-r(u\bar{u}z+\bar{u}w_1+uw_2)]\,\varphi(w_1,w_2) \end{array} \right\}$$

に属する。よく知られているように，$\mu \in r^{-1}\delta^{-1}$ に対し

$$\theta_\mu^{(r)}(z,w_1,w_2) = \sum_{l\in\mathcal{O}} \mathbf{e}[r\{N(l+\mu)z + \overline{(l+\mu)}\,w_1 + (l+\mu)w_2\}]$$

とおくと，$\{\theta_\mu^{(r)} \mid \mu \in r^{-1}\delta^{-1}/\mathcal{O}\}$ が $\vartheta_{r,z}$ の $\mathbb{C}$ 上のひとつの基底を与える。また各 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma'$ に対し，変換公式

$$\theta_\mu^{(r)}|[\gamma]_{r,1}(z,w_1,w_2) = \sum_{\nu\in r^{-1}\delta^{-1}/\mathcal{O}} M_{\mu,\nu}^{(r)}(\gamma)\cdot\theta_\nu^{(r)}(z,w_1,w_2),$$

(9)

$$M_{\mu,\nu}^{(r)}(\sigma) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(d)\,\delta_{\mu,d\nu}\,\mathbf{e}[abN(\mu)r] & \text{if } c=0, \\ \dfrac{1}{icr\sqrt{|D|}} \displaystyle\sum_{u\in\mathcal{O}/c\mathcal{O}} \mathbf{e}\left[\frac{r}{c}\{aN(u+\mu)-\mathrm{tr}(u+\mu)\bar{\nu}+dN(\nu)\}\right] & \text{if } c=0. \end{cases}$$

が成立し，$M^{(r)}=(M_{\mu,\nu}^{(r)})$ は $r^2|D|$ 次のユニタリ行列である（cf. [13]）。

一般に，$\Gamma'=SL_2(\mathbb{Z})$ の有限次元表現 χ に対し，$S_m(\Gamma',\chi)$ で $f(\gamma\langle z\rangle)=j(\gamma,z)^m\chi(\gamma)f(z)$ をみたす $\mathbb{C}^{\dim\chi}$ 値正則尖点形式のなす空間をあらわす。$(f_\mu)\in S_{k-1}(\Gamma',\overline{M^{(r)}})$ に $\sum_\mu f_\mu\cdot\theta_\mu^{(r)}$ を対応させることにより，同型

(10) $\quad S_{k-1}(\Gamma',\overline{M^{(r)}}) \cong \mathfrak{S}_{r,k}(\underline{\Gamma}')$

を得る。

$r=1$ のときを少し詳しくみておこう。$E=\{\varepsilon\in\mathcal{O}/\delta \mid N(\varepsilon)\equiv 1 \pmod D\}$ とおく。K で分岐する各素数 p に対し，$\varepsilon_p\in\mathcal{O}$ を，$\varepsilon_p\equiv 1 \bmod \delta_q$ （$\forall q\neq p$）かつ $\varepsilon_p\equiv\bar{\pi}_p/\pi_p \pmod{\delta_p}$

となるようにひとつ定めておく（ここで π_p は K_p のひとつの素元）。E は，ε_p 達で生成される $(2,\cdots,2)$ 型アーベル群である（rank は，D の素因子の個数）。またEの元としては，$-1=\prod_{p|D,\,\mathrm{ord}_p D=\mathrm{odd}} \varepsilon_p$ 。 E は $\vartheta_{1,\mathbb{Z}}$ に $\varphi=\sum_\mu a_\mu \theta_\mu^{(1)} \longmapsto \varphi|[\varepsilon]=\sum_\mu a_\mu \theta_{\varepsilon\mu}^{(1)}$ $(\varepsilon\in E)$ と作用し，この作用に関して固有空間に分解される： $\vartheta_{1,\mathbb{Z}}=\bigoplus_{\sigma\in\hat{E}} \vartheta_{1,\mathbb{Z}}^{[\sigma]}$ ， $\vartheta_{1,\mathbb{Z}}^{[\sigma]}=\{\varphi\in\vartheta_{1,\mathbb{Z}} \mid \varphi|[\varepsilon]=\sigma(\varepsilon)\varphi \text{ for } \forall\varepsilon\in E\}$ 。さて，各 σ 固有空間は Γ' stable で，$M^{(1)}=\bigoplus_{\sigma\in\hat{E}} M^{(1)[\sigma]}$ と分解される。この作用は $\mathfrak{S}_{1,k}(\underline{\Gamma}')$ にうつる。すなわち，f が (3) の Fourier 展開をもつとき，

(11) $\quad f|[\varepsilon](z,w_1,w_2)=\sum_{n,\alpha} a_f(n-N(\alpha)+N(\varepsilon\alpha),\varepsilon\alpha)\,\mathbf{e}[nz+\bar{\alpha}w_1+\alpha w_2]$

として E が $\mathfrak{S}_{1,k}(\underline{\Gamma}')$ に作用する。$\mathfrak{S}_{1,k}^{[\sigma]}(\underline{\Gamma}')$ で σ 固有空間をあらわせば，(10) の同型は，$S_{k-1}(\Gamma',\overline{M^{(1)[\sigma]}})\cong\mathfrak{S}_{1,k}^{[\sigma]}(\underline{\Gamma}')$ を導く。ここで空間が $\{0\}$ とならぬためには，$\sigma(-1)=(-1)^k$ が必要である。

<u>Remark</u>　(11) と全く同様にして，E は Maass space $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ にも作用する。$\mathcal{M}_k^{[\sigma]}(\Gamma)$ でその σ 固有空間をあらわせば，これは $\mathfrak{S}_{1,k}^{[\sigma]}(\underline{\Gamma}')$ と同型であり，$\mathcal{M}_k(\Gamma)=\bigoplus_{\sigma\in\hat{E}}\mathcal{M}_k^{[\sigma]}(\Gamma)$ 。とくに，σ が単位指標のとき，$\mathcal{M}_k^{[\sigma]}(\Gamma)$ は [4] で定義されている空間と一致する（$K=\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$）。また，$\mathfrak{S}_k(\Gamma)$ の元 F に対し，(10) を通して F_1 $(\in\mathfrak{S}_{1,k}(\underline{\Gamma}'))$ の $\theta_0^{(1)}$ の係

数を対応させる写像は，Oda [7] の特別な場合（SO(2,4)-case）となっている。

5° Maass space の次元

定理2 K を判別式 D の虚2次体，k を4以上の整数とする。このとき，Maass space の次元は次の式で与えられる。

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_k(\Gamma) = \frac{k-2}{6}\left[\frac{|D|}{4} + (-1)^k \begin{cases} 1 & \text{if } D \equiv 0 \pmod{4} \\ 1/4 & \text{if } D \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}\right]$$

$$+ \begin{cases} 0 & \text{if } D \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{1}{4}\cos\left(\frac{k+1}{2}\pi\right) e\left[\frac{1-D}{8}\right] & \text{if } D \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$$

$$+ \frac{\varepsilon}{3} + \frac{(-1)^{k+1}}{4} \times \begin{cases} 2 & \text{if } \operatorname{ord}_2 D = 2 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$+ \frac{-1}{4} \times \left[1 + \begin{cases} \displaystyle\sum_{d \mid D} 4h_d/w_d & \text{if } D \not\equiv 0 \pmod{8}, \\ \displaystyle\sum_{\substack{d \mid D \\ d \equiv 1\,(4)}} 4h_d/w_d + \sum_{\substack{d \mid D \\ d/8 \equiv D/8\,(4)}} 4h_d/w_d & \text{if } D \equiv 0 \pmod{8} \end{cases}\right].$$

最後の Σ において，d は虚2次体の判別式となるもののみを動き，h_d，w_d はそれぞれ $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の類数，単数群の位数をあらわす。また，$\varepsilon = 0, \pm 1$ は次の表で与えられる。

D \ k (mod 6)	0	1	2	3	4	5
$\left(\frac{D}{3}\right) = 1$	0	−1	0	1	0	0
$\left(\frac{D}{3}\right) = -1$	−1	0	0	0	1	0
$\left(\frac{D}{3}\right) = 0$	0	0	−1	1	1	−1

.

証明には少し異なる2つの方法がある。

(i) (村瀬篤氏との共同研究) $G_{1,m}$ の Jacobi cusp forms の次元については，[10] で求められている Bergman 核関数を用いて，Selberg trace formula によって，直接求めることができる (計算は一変数の場合と基本的には同じ)。とくに，$m=2$ として $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{S}_{1,k}(\Gamma')$ を知る。

(ii) (10) の同型を使って，ベクトル値の場合の一変数保型形式の次元公式 (cf. [11] 定理2.9) に代入して得られる。書き下す際，$M^{(1)}$ の具体的表示 (9) を用いる。

Remark　全く同じ手法で，E の指標 σ に対し，σ 固有空間 $\mathcal{M}_k^{[\sigma]}(\Gamma)$ の次元が計算される。すなわち，(ii) の手法においては $\dim_{\mathbb{C}} S_{k-1}(\Gamma', \overline{M^{(1)[\sigma]}})$ を求めれば良いし，(i) の手法においては，次節でみるように $\varepsilon_p\,(\in E)$ の作用が $\underline{\underline{G}}'$ の Hecke 環の元 $\varphi_{0,p}$ の作用に他ならぬことから，$\mathrm{trace} \prod_{p|S} \varphi_{0,p}$ (S は D の約数) の計算から求まる。

§3. L関数

1° G の Hecke 環　$G_{\mathbb{Q}}^{+} = \{ g \in G_{\mathbb{Q}} \mid \mu(g) > 0 \}$ とおき，$\mathcal{H}$ で組 $(G_{\mathbb{Q}}^{+}, \Gamma)$ で定まる Hecke 環をあらわす。G の強近似定理により，$\mathcal{H}$ は制限テンソル積 $\bigotimes_p \mathcal{H}_p$ に分解する。ここで $\mathcal{H}_p$ は，$G_p = G_{\mathbb{Q}_p}$ と $U_p = G_p \cap GL_4(\mathcal{O}_p)$ できまる Hecke 環。

$\mathcal{H}_p$ については，Satake同型により完全に記述されている（cf. [9]）。今，生成元と関係式の形で具体的に書いておく。

$$C_{0,p}=\begin{cases} U_p\cdot \mathrm{diag}(p,p,p,p)\cdot U_p & \text{if } p\nmid D, \\ U_p\cdot \mathrm{diag}(\pi_p, p\pi_p^{-1}, p\bar{\pi}_p^{-1}, \bar{\pi}_p)\cdot U_p & \text{if } p\mid D, \end{cases}$$

$$C_{1,p}=U_p\cdot \mathrm{diag}(p,p,1,1)\cdot U_p ,$$

$$C_{2,p}=U_p\cdot \mathrm{diag}(p^2,p,1,p)\cdot U_p ,$$

また，$K_p=\mathbb{Q}_p\oplus\mathbb{Q}_p$ のとき，$\pi_p=(p,1)$ とし，$C_{3,p}=U_p\cdot\mathrm{diag}(p\pi_p,\bar{\pi}_p,\bar{\pi}_p^{-1},\bar{\pi}_p)\cdot U_p$，$C_{4,p}=\overline{C_{3,p}}$ とおく（混乱のおそれのない時には，$C_{i,p}$ を単に C_i と書く）。$\mathcal{H}_p$ の構造は次の通り。

$$(12)\quad \mathcal{H}_p=\begin{cases} \mathbb{C}[C_0,C_0^{-1},C_1,C_2] & \text{if } \left(\frac{K}{p}\right)=-1 \text{ or } 0, \\ \quad \text{ここで, } C_0,C_1,C_2 \text{ は } \mathbb{C} \text{上独立.} & \\ \mathbb{C}[C_0,C_0^{-1},C_1,C_2,C_3,C_4] & \text{if } \left(\frac{K}{p}\right)=1, \\ \quad \text{ここで, } C_0,C_1,C_2,C_3 \text{ は } \mathbb{C} \text{上独立で,} & \\ \quad (C_2+(p+1)(p^2+1)C_0)^2=C_0\{C_3C_4+(p+1)C_1(C_3+C_4)+(p+1)^2C_1^2\}. & \end{cases}$$

L関数の定義のため，$\mathcal{H}_p$-係数多項式 $P_p(T)$ を導入する。

$$(13)\quad P_p(T)=\begin{cases} \{1-C_1p^{-2}T+(C_2+(p^3+p^2-p+1)C_0)p^{-3}T^2-C_0C_1p^{-2}T^3+C_0^2T^4\} \\ \quad \times(1-C_0T^2) & \text{if } \left(\frac{K}{p}\right)=-1, \\ \{1-C_1p^{-2}T+(C_2+(p^2+p+1)C_0)p^{-3}T^2-C_0(C_3+C_4+2C_1)p^{-3}T^3 \\ \quad +(C_2+(p^2+p+1)C_0)C_0p^{-3}T^4-C_1C_0^2p^{-2}T^5+C_0^3T^6\} & \text{if } \left(\frac{K}{p}\right)=1, \\ \{1-(C_1-(p^2-1)C_0)p^{-2}T+(C_2-(p-1)C_0C_1+(p^3+p^2-p+1)C_0^2)T^2 \\ \quad -(C_1-(p^2-1)C_0)C_0^2p^{-2}T^3+C_0^4T^4\}\times(1-C_0T) & \text{if } \left(\frac{K}{p}\right)=0. \end{cases}$$

これは（基本的には）G_p の *local* Hecke *series* の分母に他ならない。すなわち，

(14) $$\sum_{m=0}^{\infty} T(m)(p^{-2}T)^m = P_p(T)^{-1}(1-p^{-2}c_0^e T^2)(1-c_0^e T^2),$$

ここで，$T(m) = \{g \in G_p \cap M_4(\mathcal{O}_p) \mid \mathrm{ord}_p\, \mu(g) = m\}$，$e$ は $K_p/\mathbb{Q}_p$ の分岐指数。

Remark　(13) から明らかなように，$\left(\frac{K}{p}\right) = -1, 0$ のときは，(14) の表示は既約ではない。また，$\left(\frac{K}{p}\right) = -1$ の場合を除き，Hecke *series* は全 *similitudes* 群の場合のそれとは異なる。

$\mathcal{H} \ni \Gamma g \Gamma = \coprod_j \Gamma g_j$ (disjoint)，$F \in \mathfrak{S}_k(\Gamma)$ のとき，

$$F|[\Gamma g \Gamma]_k(Z) = \sum_j F(g_j\langle Z\rangle)\, J(g_j, Z)^{-k}$$

として $\mathcal{H}$ は $\mathfrak{S}_k(\Gamma)$ に作用する。この作用は可換・正規であり，$\mathfrak{S}_k(\Gamma)$ は $\mathcal{H}$ の同時固有関数からなる基底を有す。そこで，任意の $\phi \in \mathcal{H}$ に対し $F|[\phi]_k = \sigma_F(\phi) F$ のとき，F の L 関数 $L(F; s)$ を，

(15) $$L(F; s) = \prod_{p<\infty} \left\{ \sigma_F(P_p(T)) \big|_{T=p^{-s}} \right\}^{-1} \qquad (\mathrm{Re}\, s \gg 0),$$

と定義する。ここで，$\sigma_F(P_p(T))$ は $P_p(T)$ の係数を F の固有値でおきかえた $\mathbb{C}$ 係数多項式。

2° G' の Hecke 環　§1 で触れたように，Hecke 環は新谷先生により一般の $G_{n,m}$ に対し導入され，かつ *good prime*

では Satake 同型の成立が証明されている。

$\mathfrak{G}'_{\mathbb{Q}}$ 上のスカラー値関数 φ で 条件

i) $\varphi(\gamma_1 g \gamma_2) = \varphi(g) \quad {}^\forall\gamma_1, {}^\forall\gamma_2 \in \underline{\Gamma}'$,

ii) $\varphi((0,0,z)g) = \mathbf{e}[rz]\,\varphi(g) \quad {}^\forall z \in \mathbb{Q}$,

iii) $|Z_{\mathbb{Q}}\underline{\Gamma}' \backslash \mathrm{supp}\,\varphi|$: finite ,

をみたすもののなす集合を $\mathcal{L}^{(r)}$ であらわす。これは convolution により $\mathbb{C}$-algebra をなし, 1° と同様に $\bigotimes_p \mathcal{L}_p^{(r)}$ と局所的なものの制限テンソル積に分解する。 $\mathrm{supp}\,\varphi = \coprod_j Z_{\mathbb{Q}}\underline{\Gamma}' g_j$, $f \in \mathfrak{S}_{r,k}(\underline{\Gamma}')$ のとき,

$$f|[\varphi]_{r,k}(Z) = \sum_j J_{r,k}(g_j, Z)^{-1} f(g_j\langle Z\rangle)\cdot\varphi(g_j^{-1})$$

により $\mathcal{L}^{(r)}$ は $\mathfrak{S}_{r,k}(\underline{\Gamma}')$ に作用する。

以下 $r=1$ とし, $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(1)}$ と書く。各素数 p に対し $\varphi_{1,p} \in \mathcal{L}$ を, $\varphi_{1,p}\begin{pmatrix} p & \\ & p^{-1}\end{pmatrix} = 1$, $\mathrm{supp}\,\varphi_{1,p} = Z_{\mathbb{Q}}\underline{\Gamma}'\begin{pmatrix} p & \\ & p^{-1}\end{pmatrix}\underline{\Gamma}'$,

として定義する。また $p|D$ のとき $\varphi_{0,p} \in \mathcal{L}$ を

$$\varphi_{0,p}((0,y,0)) = 1/p \quad \text{for } {}^\forall y \in \mathfrak{P}^{-1} \quad (\mathfrak{P}\text{ は }p\text{の上にある ideal}),$$

$$\mathrm{supp}\,\varphi = Z_{\mathbb{Q}}\underline{\Gamma}'\{(0,y,0) \mid y \in \mathfrak{P}^{-1}\}\underline{\Gamma}'$$

と定義する。このとき,

$$(16) \qquad \mathcal{L}_p = \begin{cases} \mathbb{C}[\varphi_{1,p}] & \text{if } p\nmid D \qquad (\text{Shintani}), \\ \mathbb{C}[\varphi_{1,p}, \varphi_{0,p}] & \text{if } p|D \quad , \end{cases}$$

$$\text{ここで } \varphi_{0,p}^2 = 1 ,\ \varphi_{0,p}\varphi_{1,p} = \varphi_{1,p}\varphi_{0,p} = \varphi_{1,p} \quad .$$

となることがわかる, とくに, $\mathfrak{S}_{1,k}(\underline{\Gamma}')$ は $\mathcal{L}$ の同時固有

関数からなる基底をもつ。$f \in \mathfrak{S}_{1,k}(\underline{\Gamma}')$ が，$\mathcal{L}$ の同時固有関数：$f|[\varphi]_{1,k} = \lambda_f(\varphi) f$ （$\forall \varphi \in \mathcal{L}$）のとき，$f$ の L 関数 $L(f;s)$ を，

$$(17)\quad L(f;s) = \prod_{p<\infty} \left\{1-\left(\lambda_f(\varphi_{1,p}) - p(p-1)\left(\frac{K}{p}\right)\right)p^{-2-s} + \lambda_f(\varphi_{0,p})p^{-2s}\right\}^{-1} \cdot \left\{1-\left(\frac{K}{p}\right)p^{-s}\right\}^{-1}$$
$$(\mathrm{Re}\, s \gg 0)$$

と定義する。（ただし，$p \nmid D$ のとき $\lambda_f(\varphi_{0,p})=1$ とみる）

<u>Remark</u>　$\varphi_{0,p}$ の定義に基づく簡単な計算より，§2-4°で導入した $\varepsilon_p \in E$ の $\mathfrak{S}_{1,k}(\underline{\Gamma}')$ への作用は $\varphi_{0,p}$ のそれと一致することがわかる：$f|[\varphi_{0,p}]_{1,k} = f|[\varepsilon_p]$ for $\forall p | D$.　(16) の関係式より，$\lambda_f(\varphi_{0,p}) = -1$ ならば，$\lambda_f(\varphi_{0,p}) = 0$ である。また，$\lambda_f(\varphi_{0,p})$ の符号については，$\prod_{p|D,\, \mathrm{ord}_p D = \mathrm{odd}} \lambda_f(\varphi_{0,p}) = (-1)^k$ なる関係がある。

<u>3°　L 関数の分解</u>　定理 1 の同型写像は，1°, 2° の Hecke 環の作用と両立する。すなわち，

<u>定理 3</u>　記号は今まで通りとする。

(i)　$\mathcal{M}_k(\Gamma)$ は，$\mathcal{H}$-*stable*。

(ii)　$F = F(f) \in \mathcal{M}_k(\Gamma)$ のとき

F が $\mathcal{H}$ の同時固有関数 $\Longleftrightarrow$ f が $\mathcal{L}$ の同時固有関数

(iii)　そしてこのとき 次の分解が成立。（$\zeta(s)$: Riemann zeta）

$$L(F(f);s) = L(f;s)\,\zeta(s-1)\,\zeta(s)\,\zeta(s+1)\ .$$

証明は，（多少繁雑にはなるが）[1] Theorem 1 の証明と同様に進行する。すなわち，まず Maass space における Hecke 環の作用の退化の様子を調べる。

- $\{[C_2]_k - (p^2+1)[C_1]_k\} | \mathcal{M}_k(\Gamma) = -(p^2+1)(p^3+1) \qquad \text{if } \left(\frac{K}{p}\right) = -1$,
- $\{[C_3]_k - [C_4]_k\} | \mathcal{M}_k(\Gamma) = 0, \ \{[C_3]_k - p(p+1)[C_1]_k\} | \mathcal{M}_k(\Gamma) = -p(p+1)^2(p^2+1)$,
  $\{[C_2]_k - (p+1)^2[C_1]_k\} | \mathcal{M}_k(\Gamma) = -(p+1)(p^2+1)(p^2+p+1) \qquad \text{if } \left(\frac{K}{p}\right) = 1$,
- $\{[C_2]_k - p(p+1)[C_1]_k\} | \mathcal{M}_k(\Gamma) = -p^2(p+1)(p^2+1)$,
  $[C_0]_k | \mathcal{M}_k^{[\sigma]}(\Gamma) = \sigma(\varepsilon_p) \qquad \text{if } \left(\frac{K}{p}\right) = 0$.

その後，$F(f)$ と f の固有値の関係

$$\sigma_{F(f)}(C_{1,p}) = \begin{cases} \lambda_f(\varphi_{1,p}) + p^2(p+1) + p\left(1+\left(\frac{K}{p}\right)\right) & \text{if } p \nmid D, \\ \lambda_f(\varphi_{1,p}) + p^3 + p^2 + p - \lambda_f(\varphi_{0,p}) & \text{if } p \mid D, \end{cases}$$

を求めて，証明がおわる。

参考文献

[1] A.N. Andrianov : Modular descent and Saito-Kurokawa conjecture, Inv. Math. 53 (1979), 267-280.

[2] H. Braun : Hermitian modular functions III, Ann. of Math. 53 (1951), 143-160.

[3] M. Eichler : Über die Anzahl der linear unabhängigen Siegelschen Modulformen von gegebenem Gewicht, Math. Ann. 213 (1975), 281-291.

[4] H. Kojima : An arithmetic of hermitian modular forms of degree two, Inv. Math. 69 (1982), 217-227.

[5] N. Kurokawa : Examples of eigenvalues of Hecke operators on Siegel cusp forms of degree two, Inv. Math. 49 (1978), 149-165.

[6] H. Maass : Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades, I, II, III, Inv. Math. 52 (1979), 95-104, 53 (1979) 249-253, 53 (1979), 255-265.

[7] T. Oda : On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature $(2, n-2)$, Math. Ann. 231 (1977), 97-144.

[8] N.S. Rege : On certain classical groups over Hasse domain, Math. Zeit. 102 (1967), 120-157.

[9] I. Satake : Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over $\mathfrak{p}$-adic fields, Publ. Math. IHES 18 (1963).

[10] 佐武一郎: ある群拡大とそのユニタリ表現について, 数学 (1969), 241-253.

[11] 清水英男 : 保型関数 I, 岩波講座 基礎数学 (1977).

[12] G. Shimura : Arithmetic of unitary groups, Ann. of Math. 79 (1964), 369-409.

[13] T. Shintani : On construction of holomorphic cusp forms of half-integral weight, Nagoya Math. J. 58 (1975), 83-126.

[14] D. Zagier : Sur la conjecture de Saito-Kurokawa (d'apres H. Maass), Seminaire Delange-Pisot-Poitou (1980).