

粘性流体の非定常流れの数値解析アルゴリズム  
(GSMAC法について)

慶大理工 棚橋 隆彦 (Takahiko TANAHASHI) <sup>1)</sup>

齊藤 恒洋 (Tsunehiro SAITO) <sup>2)</sup>

1. まえがき

近年、電子計算機の発達、特に大型のスーパーコンピュータからスーパーミニコン・マイコンまでその処理能力の増大と性能の向上は目覚ましいものがあり、これにより流れの数値シミュレーション・数値実験もより身近なものになりつつある。非圧縮性粘性流体の非定常流れの問題に対しても、かなりの高レイノルズ数まで、差分法・有限要素法等により解析が可能であり、妥当な解が多数報告されている。現在、この分野の研究の主眼は計算精度の向上に向けられているが、シミュレーションの立場から、すなわち現象の再現という観点から見ると今一つもの足りないように感じられる。

本来、数値実験の必要な流れは、低レイノルズ数の流れといえども動的で複雑なものが多く、この様な流れをコンピュータを用いて再現する場合、高次補間の精度の高い計算法よりも、低次の補間の高速計算法を用いて、領域を可能な限り細かく細分割し、多くの要素・節点を含む大規模な問題を解く必要にせまられている。また、数値実験の普及を考えるならば、この様な大型の問題がミニコン程度のコンピュータで処理できることが望ましい。

本論文では、この様な立場から研究されてきた従来のスキームをまず紹介する。非圧縮粘性流体の非定常流れの計算においては、どのスキームも最終的には1時間ステップ毎に大型の離散化 Poisson方程式を解くことに帰着する。有限要素法を用いたスキームでは、この Poisson方程

---

1) 慶應義塾大学理工学部機械工学科助教授

2) 慶應義塾大学大学院工学研究科機械工学専攻

式の係数行列が全時間ステップを通して一定であるため、一度LU分解しておけば後は後退代入のみですむことを利用して、非定常計算を準陽的に進めている。しかし、元々スパースな性質を持つ Poisson方程式の係数行列も、LU分解するとそのスパース性は失われる。このため、係数行列を全部格納するための容量が必要になるが、大型の問題ではこの容量の確保は困難である場合が多い。

本論文で紹介する各スキームは、Poisson方程式を解くという点では変わりはないものの、一つとしてLU分解を必要とするものはない。それにもかかわらず準陽的に時間前進できるものばかりである。なぜ、この様なことが可能なのかその原理を説明し、次にこの方法を有限要素法のような任意メッシュ系に拡張するために、最近著者らが開発した GSM ACスキームについて概略を説明する。

## 2. 基礎方程式

基礎方程式は、次の Navier-Stokes方程式および連続の式を用いる。

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2)$$

ただし方程式は無次元化されており、 $\vec{u}$ ,  $p$  はそれぞれ速度ベクトル、圧力を表し、 $Re$  はレイノルズ数を表す。流体に外力が作用する場合、外力の多くはスカラー・ポテンシャルの負勾配で表されるため、外力項は圧力項に取り込まれ、最終的な形は(1)式と同じになる。また、流れ場と温度場が連成する様な場合は、(1), (2)式と共にエネルギーの方程式を解くことになるが、エネルギーの式については本論文の範囲外であるので以後は触れないことにする。

さて、(1), (2)式を数値解析のしやすい形に定式化することを考える。定式化の方法には主に次の3つの方法がある。

(a) 速度と圧力を用いる定式化

(b) 渦度と流れ関数 (ベクトル・ポテンシャル) を用いる定式化

(c) 速度と渦度を用いる定式化

(a) は、(1)式 (又はその保存形) と、(1)式の発散をとり(2)式を代入することにより得られる圧力の Poisson方程式、

$$\nabla^2 p = -\nabla \cdot \{(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}\} \quad (3)$$

を連立して解く方法で原始変数 (primitive variable) 法と呼ばれて

いる。(b) は、(1)式の回転をとることによって得られる渦度 ( $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$ ) の輸送方程式,

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{\omega} + (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} \quad (4)$$

とベクトル・ポテンシャル  $\vec{\psi}$  の Poisson方程式,

$$\nabla^2 \vec{\psi} = -\vec{\omega} \quad (5)$$

を連立する。この定式化は、流れ場がソレノイダルであることを十分に生かした定式化であるが、渦度の境界条件の問題と3次元への拡張の難しさから、最近有限要素法において使用されることが少なくなってきた。

(c) は hybrid 法とも呼ばれ、(a) と (b) を混合して用いる方法である。定式化は2種類ある。その1つは、運動方程式(1)を、

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla \left( p + \frac{\vec{u}^2}{2} \right) - \frac{1}{Re} \nabla \times \vec{\omega} + \vec{u} \times \vec{\omega} \quad (6)$$

と変形して用いる方法であり、他の1つは、渦度輸送方程式(4)と速度に関する Poisson方程式,

$$\nabla^2 \vec{u} = -\nabla \times \vec{\omega} \quad (7)$$

を用いて解く方法である。この定式化は(a) と (b) の中間に位置する。流れ場がソレノイダルであることは十分に生かしつつ、ベクトル・ポテンシャルや渦度の境界条件を用いる必要がないために、3次元への拡張が容易であり、この点で(a), (b) よりも有利である。最近、少しずつではあるがその有効性が認められつつある (Agarwal<sup>(1)</sup>, Patera<sup>(16)</sup>, Thomasset<sup>(19)</sup>)。5章で説明する GSMACスキームも(6)式を基礎式として定式化する。

### 3. サイクル誤差自己調整の原理

数値解析法の紹介の前に、各スキームに共通する時間進行の方法について説明する。方程式が非線型であると、時間を進行させて次のステップの解を求めるのに反復法や緩和法がよく用いられる。しかし、このような解法において必ず各ステップごとに誤差が累積する。誤差の累積を小さくするためには、各ステップごとの反復計算の収束判定規準をきつものとしなければならない。しかし、これは反復回数が増大により過大な計算時間が要求される。一方収束判定規準をゆるめれば、反復計算に要する時間は減少するものの累積誤差が増大する。従って反復計算に対する収束規準がゆるくても時間進行に対して誤差が累積しない方法、

すなわちゆるい収束判定条件下で誤差が累積しない反復法が望まれる。Hirt-Harlow<sup>(11)</sup>はこの問題を各サイクル計算の中で自動的に累積誤差を減少させることによって解決した。この方法をサイクル誤差自己調整法 (cycle-to-cycle self-adjustment method) と呼ぶことにする。

次にこの方法を簡単に説明する。非線型方程式,

$$\frac{d\Phi(x)}{dt} = \Psi(x, t) \quad (8)$$

をある初期条件 (例えば  $t = 0$  で  $x = 1$ ) のもとに解いて解  $x = x(t)$  を求める場合を考える。ここで  $\Phi$  と  $\Psi$  は任意の関数である。

この方程式は  $D$  を恒等的に零とおけば、

$$\frac{dD}{dt} + \frac{d\Phi}{dt} = \Psi, \quad D=0 \quad (9)$$

と書いても等価である。これを Euler 法で陽的に離散化すると、

$$\frac{D^{n+1} - D^n}{\Delta t} + \frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\Delta t} = \Psi^n, \quad D^{n+1} = 0 \quad (10)$$

と書ける。これを  $x^{n+1}$  について反復法により解く。すなわち時刻  $n+1$  においては、 $D^{n+1} = 0$  を満足させながら時間を進行させてゆくのである。もし、時刻  $n$  に対して  $D^n = 0$  の条件を付加すれば、これは普通の解法となり  $x^{n+1}$  を求めるのにきつい収束判定規準が必要となる。ところが、 $D^n$  を零とせずそれを残した式

$$\frac{-D^n}{\Delta t} + \frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\Delta t} = \Psi^n \quad (11)$$

から  $x^{n+1}$  を求める場合は、収束判定規準をゆるめても自動的に各サイクルごとの累積誤差を大幅に少なくする効果を持つ。図 1 にその例を示す。これは、

$$\frac{d(z+z^5)}{dt} + 2t(1+5z^4) = 0$$

を初期条件  $Z(0)=1$  で解いた結果である。図は  $\Delta t = 0.01$  を固定して 100 ステップ時間進行した時の様子を示す。

残差  $D^n$  を残した場合、収束判定規準が  $\epsilon = 1.0, 0.1$  とゆるくても厳密解  $Z(t)=1-t^2$  に非常に近くなることがわかる。

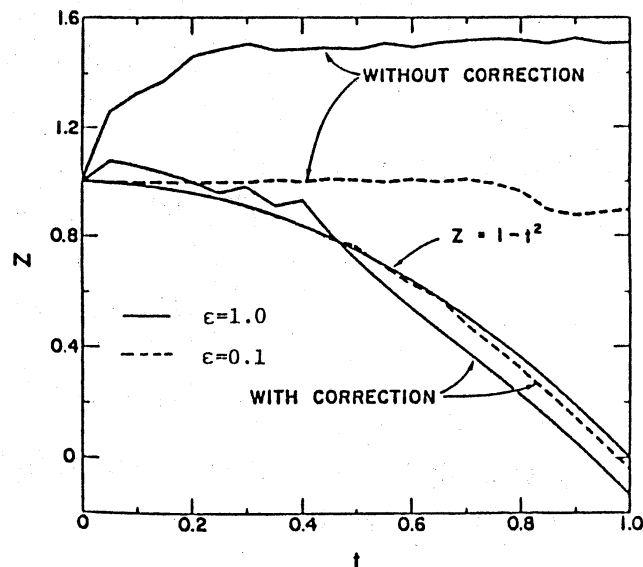


図 1 Hirt-Harlow (1967)

#### 4. 離散化とアルゴリズム

粘性のある非圧縮性流体の基礎方程式は前述の運動方程式(1)と連続の式(2)からなる。この運動方程式(1)を、

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} = \bar{\mathbf{f}}(p, \bar{\mathbf{u}}) \quad (12)$$

と書く。運動方程式の発散をとると、圧力の Poisson方程式(3)が導かれる。流体にわずかの圧縮性でもあれば速度の発散は完全には零でない。そこで  $D = \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}$  と置き、圧力の Poisson方程式を(3)の代わりに

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\nabla^2 p + \frac{1}{Re} \nabla^2 D - A \quad (13)$$

と書くことにする。ここで  $A$  は移流項の発散で  $\nabla \cdot [(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}]$  に等しい。圧力変動に対して  $D$  の時間微分は重要であるが  $D$  の空間微分はあまり重要でない。従って(13)式の  $\nabla^2 D$  の項は省略してもよい。

次に基礎方程式を時間に関して前進差分で離散化する。空間に関しては差分法(FDM)または有限要素法(FEM)が用いられる。その際、圧力と速度に関しては陽的なものと陰的なものが用いられる。離散化の結果は(12)を用いて次の様に表される。

$$\bar{\mathbf{u}}^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}^n + \Delta t \cdot \bar{\mathbf{f}}(p^n, \bar{\mathbf{u}}^n) \quad (14)$$

$$\bar{\mathbf{u}}^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}^n + \Delta t \cdot \bar{\mathbf{f}}(p^{n+1}, \bar{\mathbf{u}}^n) \quad (15)$$

$$\bar{\mathbf{u}}^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}^n + \Delta t \cdot \bar{\mathbf{f}}(p^{n+1}, \bar{\mathbf{u}}^{n+1}) \quad (16)$$

(14)は full-explicit, (15)は semi-implicit, (16)は full-implicit である。これらの中で平均勾配の立場からみると時刻  $n$  と時刻  $n+1$  の値を混合した(15)が最も精度が良い。運動方程式と同様に圧力の Poisson方程式(13)も、

$$\frac{D^{n+1} - D^n}{\Delta t} = -\nabla^2 p^n + \frac{1}{Re} \nabla^2 D^n - A^n \quad (17)$$

$$\frac{D^{n+1} - D^n}{\Delta t} = -\nabla^2 p^{n+1} + \frac{1}{Re} \nabla^2 D^n - A^n \quad (18)$$

$$D^{n+1} = \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}^{n+1} = 0 \quad (19)$$

と離散化される。これらを離散化基礎方程式として以下に数値解析のアルゴリズムを考える。

##### 4. 1. MAC法

MAC法は Marker and Cell method の略でロス・アラモス研究所の

Harlow-Welch<sup>(10)</sup>によって開発された手法である。この方法は次の様な特長を持っている。

- (a) サイクル誤差自己調整法を採用しているため、圧力の Poisson方程式の解に対する収束判定規準がゆるくてよい。
- (b) Marker粒子を追跡することにより、時間と共に変化する自由表面のある流れが計算できる。

MAC法のアルゴリズムは次のようになる。

#### 【 Algorithm MAC 】

(ステップ1)  $\vec{u}^n$  と  $D^n$  を与えて圧力の Poisson方程式(17)を  $D^{n+1} = 0$  として解き  $p^n$  を求める。このとき(17)式の解に対する収束判定規準はゆるくてよい。

(ステップ2) 運動方程式(14)より  $n+1$ 時刻の速度  $\vec{u}^{n+1}$  を求め時間を進行し、ステップ1にもどる。

一般に計算の90%以上は Poisson方程式の解法に費される。メッシュが細くなりノード点が増加すると離散化されて得られる連立一次方程式は巨大化する。従って Poisson方程式の高速解法がこの種の問題の鍵となる。 $D^n = 0$ とした Poisson方程式を反復法によって解くとその収束判定規準は厳しいものとなり、多大の計算時間を必要とする。ところが、MAC法の様に  $D^n$  を零とせず残しておく誤差は自己調整され、反復計算の収束判定規準をゆるめても誤差の累積しない解が得られる。これが MAC法が常にどの様な流れにおいても安定して時間進行できる最大の理由である。

#### 4.2. SMAC法

SMAC法はロス・アラモス研究所の Amsden-Harlow<sup>(2)</sup> によって開発された手法で Simplified MAC法の略である。常に連続の方程式を満足しつつ時間進行する点では MAC法と同等である。しかし MAC法では圧力の Poisson方程式を解かなければならない。この Poisson方程式の解法には多くの計算時間が必要となる。そこでこれをあるスカラ・ポテンシャルの Poisson方程式に変換し、簡単化してから解を求めようというのが SMAC法の発想である。まず2通りの方法で離散化された運動方程式(14)と(15)の差を作る。その結果は、

$$\frac{\bar{u}^{n+1} - \tilde{u}}{\Delta t} = -\nabla(p^{n+1} - p^n) \quad (20)$$

となる。ただし(14)で計算された $\vec{u}^{n+1}$ を予測値 $\tilde{u}$ として表してある。この式 of 回転をとると圧力項は消えて、

$$\nabla \times (\vec{u}^{n+1} - \tilde{u}) = \vec{0} \quad (21)$$

となる。一般に Helmholtz の定理によれば、任意のベクトルはスカラー・ポテンシャルの勾配とベクトル・ポテンシャルの回転の和として表される。ところが、特にベクトルの回転が零の時にはベクトル・ポテンシャルを零と置いてよい。従って、

$$\vec{u}^{n+1} = \tilde{u} + \nabla \phi \quad (22)$$

を得る。ここで $\phi$ はスカラー・ポテンシャルである。この方程式の発散をとると連続の条件(19)により左辺は零となる。よって、スカラー・ポテンシャルは Poisson 方程式、

$$\nabla^2 \phi = -\nabla \cdot \tilde{u} \quad (23)$$

を満足することになる。右辺は既知であるから適当な境界条件のもとにこの方程式を解けば解 $\phi$ が求まる。速度は(22)により決定される。圧力はその結果を(20)に代入し積分すると、

$$p^{n+1} = p^n - \phi / \Delta t \quad (24)$$

となる。ただし、積分定数は零に選んである。

以上をまとめて次のSMAC法のアルゴリズムを得る。

#### 【 Algorithm SMAC 】

(ステップ1)  $\vec{u}^n$  と  $p^n$  を与えて(14)より $\vec{u}^{n+1}$ を求めこれを予測値 $\tilde{u}$ と置く。

(ステップ2) スカラー・ポテンシャルに対する Poisson 方程式(23)を解き $\phi$ を求める。

(ステップ3) (22)と(24)を用いて速度と圧力を修正し、 $\vec{u}^{n+1}$ ,  $p^{n+1}$ を求めステップ1にもどる。

### 4.3. HSMAC 法

HSMAC法はロス・アラモス研究所のHirt-Nichols-Romero<sup>(12)</sup>によって開発された汎用流れ解析コードSOLAのなかに現れる数値解析手法で、Highly Simplified MAC 法の略である。

HSMAC 法の基本的な考え方は次の2点にある。

- (a) 運動方程式を陽的に離散化し速度の予測子を計算する。
- (b) 制約条件(連続の式)を反復的に取り扱って、速度と圧力の修正量を調整しつつ時間進行する。

ここで(b) は圧力に対する Poisson方程式をいかに高速に解くかということよりも本質的なことである。ロス・アラモス研究所の研究グループはこの重要性に早くから注目しているにもかかわらず、最近のFEMの研究において無視されつづけているのは残念なことである。MAC法では圧力の Poisson方程式を、SMAC法ではスカラ・ポテンシャルの Poisson方程式をそれぞれ解かなければならなかった。しかし、Poisson方程式はあくまで圧力の修正量を計算するための手段である。HSMAC法ではこの Poisson方程式を解く代わりに、連続の方程式を満足させながら反復法によって速度と圧力を修正しつつ時間前進する方法を採用した。これは画期的な方法である。以下にその概要を示す。

陽的に離散化された運動の方程式(14)より得られた速度の予測値 $\tilde{u}$ は真の値に近いものの連続の式を満足していない。従って、その残差を $\varepsilon$ とすれば、

$$\nabla \cdot \tilde{u} = \varepsilon \quad (25)$$

と置くことができる。そこでこの残差 $\varepsilon$ が零になるように速度と圧力を修正する。残差 $\varepsilon$ は圧力 $p$ の関数であるから、圧力を修正した結果、残差が零になったとすれば $\varepsilon(p + \delta p) = 0$ となる。この式をTaylor展開し高次項を省略すれば、圧力の修正量は、

$$\delta p = -\varepsilon / (\partial \varepsilon / \partial p) \quad (26)$$

により計算される。これが基本的な考え方である。具体的には次の様に行う。(20)の発散をとれば時刻 $n+1$ での速度は連続の式を満足しているから、

$$\nabla^2 \delta p = \nabla \cdot \tilde{u} / \Delta t \quad (27)$$

を得る。左辺のLaplacianを中心差分で近似し、さらに優対角近似を施せば、

$$\delta p = -\omega D / \{2\Delta t (\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2})\} \quad (28)$$

を得る。さて、圧力が増加すると流れが生ずる。この速度の修正量は(20)より、

$$\delta \vec{u} = -\Delta t \cdot \nabla \delta p \quad (29)$$

と計算される。流れは圧力の高い方向から低い方向に流れる。セル内の圧力が $\delta p$ だけ増加したとすれば、発散を零とすべき速度の修正量は、図2のようなMACメッシュ上で、

$$\delta u_{i\pm 1/2, j} = \pm \Delta t \cdot \frac{\delta p}{\Delta x}, \quad \delta v_{i, j\pm 1/2} = \pm \Delta t \cdot \frac{\delta p}{\Delta y} \quad (30)$$



と近似される。速度の修正量が決定されると、式(28)に戻り新しいDを計算する。(28)と(29)を繰り返し用いることにより連続の式を満足させる。

以上をまとめると次の HSMAC法のアルゴリズムを得る。

【 Algorithm HSMAC 】

(ステップ1) 運動の方程式を単純に陽的に差分化した(14)式より速度の予測値  $\tilde{u}$  を計算する。

(ステップ2) 予測値を出発値として、(28)式と(29)式を連続の式(19)がある収束判定規準を満足するまで反復計算し、速度の修正量  $\delta \vec{u}$  と圧力の修正量  $\delta p$  を求めステップ1に戻る。

4. 4. MAC法で用いられるメッシュ系

MAC法, SMAC法, HSMAC法では共通して図2の様なスタガード・メッシュ系を用いる。もしこのようなセル構造を持つメッシュ系を用いずにノード上で速度を定義するようなメッシュ系を用いると、圧力場がchecker-board状に分離して振動し、圧力  $p$  の値はspurious誤差を含むようになる。図3に正方cavity内流れ ( $Re=10$ ) の場合の圧力振動の様子を示す。圧力の値が2組に分かれて振動し、隣のセルどうしの圧力が不定になっている

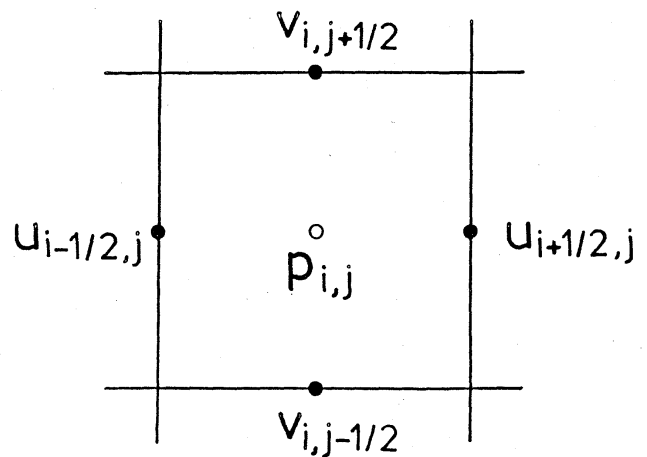


図2 MACメッシュ

ることがわかる。このような圧力の市松模様を避けるには、図2に示すように、隣のセルと辺を通してfluxを交換するような変数配置をとる必要がある。従って、MAC法, SMAC法, HSMAC法は、この特殊な変数配置により規制され、直交格子状のメッシュ系しか用いることができない。このことがこれらの方法の最大の欠点である。

-1.51320	-0.52088	-0.30298	-0.16147	-9.02614 $\times 10^{-2}$	-1.86642 $\times 10^{-3}$	9.695322 $\times 10^{-2}$	0.298523	0.604502	1.728899										
-1.02279	-0.64775	-0.34914	-0.21908	-0.10624	-9.99098 $\times 10^{-3}$	0.131337	0.314926	0.702899	1.168989										
-0.46009	-0.47526	-0.33200	-0.21017	-0.11403	-9.31919 $\times 10^{-3}$	0.112529	0.284191	0.488950	0.488760										
-0.28021	-0.26818	-0.24866	-0.16973	-9.59232 $\times 10^{-3}$	-7.15055 $\times 10^{-3}$	8.783604 $\times 10^{-2}$	0.204206	0.250327	0.271902										
-0.13601	-0.17777	-0.14882	-0.12507	-6.26304 $\times 10^{-3}$	-7.78874 $\times 10^{-3}$	6.960154 $\times 10^{-2}$	0.111911	0.156484	0.111503										
-8.38583 $\times 10^{-3}$	-9.15425 $\times 10^{-2}$	-0.10481	-7.03753 $\times 10^{-3}$	-4.79937 $\times 10^{-2}$	5.879852 $\times 10^{-3}$	3.495167 $\times 10^{-2}$	7.976553 $\times 10^{-2}$	6.974527 $\times 10^{-2}$	6.198330 $\times 10^{-2}$										
-3.22738 $\times 10^{-2}$	-6.75489 $\times 10^{-2}$	-5.49749 $\times 10^{-2}$	-5.60443 $\times 10^{-2}$	-1.99590 $\times 10^{-2}$	-5.36329 $\times 10^{-2}$	3.425980 $\times 10^{-2}$	3.587633 $\times 10^{-2}$	5.059713 $\times 10^{-2}$	1.273988 $\times 10^{-2}$										
-3.42906 $\times 10^{-2}$	-3.54505 $\times 10^{-2}$	-5.14487 $\times 10^{-2}$	-2.84848 $\times 10^{-2}$	-2.54779 $\times 10^{-2}$	8.535810 $\times 10^{-2}$	1.234501 $\times 10^{-2}$	3.693372 $\times 10^{-2}$	1.993857 $\times 10^{-2}$	1.907651 $\times 10^{-2}$										
-2.36246 $\times 10^{-2}$	-4.66318 $\times 10^{-2}$	-3.33652 $\times 10^{-2}$	-3.93019 $\times 10^{-2}$	-9.46211 $\times 10^{-2}$	-4.62953 $\times 10^{-2}$	2.582580 $\times 10^{-2}$	1.949407 $\times 10^{-2}$	3.313417 $\times 10^{-2}$	9.088785 $\times 10^{-2}$										
-4.56064 $\times 10^{-2}$	-3.90176 $\times 10^{-2}$	-5.62159 $\times 10^{-2}$	-3.22470 $\times 10^{-2}$	-2.59658 $\times 10^{-2}$	1.263263 $\times 10^{-2}$	1.883113 $\times 10^{-2}$	4.325720 $\times 10^{-2}$	2.506071 $\times 10^{-2}$	3.223435 $\times 10^{-2}$										
-1.44573	-0.61447	-0.21924	-0.26039	-2.01264 $\times 10^{-2}$	-0.10012	0.185736	0.205344	0.685019	1.644642										
-1.13361	-0.56194	-0.44828	-0.13126	-0.20571	7.930212 $\times 10^{-2}$	3.348831 $\times 10^{-2}$	0.403809	0.605910	1.267210										
-0.35921	-0.57987	-0.24234	-0.31079	-2.41949 $\times 10^{-2}$	-0.10910	0.203210	0.184238	0.582721	0.375520										
-0.38575	-0.17439	-0.35184	-7.89562 $\times 10^{-2}$	-0.19708	8.404942 $\times 10^{-2}$	-1.31598 $\times 10^{-2}$	0.296805	0.145179	0.366481										
-4.30211 $\times 10^{-2}$	-0.28229	-5.69481 $\times 10^{-2}$	-0.22796	2.877449 $\times 10^{-2}$	-0.10971	0.161793	8.852402 $\times 10^{-2}$	0.249954	7.169077 $\times 10^{-2}$										
-0.12879	2.082010 $\times 10^{-2}$	-0.20894	2.113650 $\times 10^{-2}$	-0.15101	9.783515 $\times 10^{-2}$	-6.78145 $\times 10^{-2}$	0.172676	-3.34482 $\times 10^{-2}$	0.155811										
5.884641 $\times 10^{-2}$	-0.17234	3.631271 $\times 10^{-2}$	-0.16002	7.175952 $\times 10^{-2}$	-0.10852	0.126835	-6.69436 $\times 10^{-2}$	0.144065	-3.98755 $\times 10^{-2}$										
-0.13946	5.534681 $\times 10^{-2}$	-0.15616	6.283100 $\times 10^{-2}$	-0.12929	0.100776	-9.05878 $\times 10^{-2}$	0.130170	-8.24623 $\times 10^{-2}$	0.112836										
6.66498 $\times 10^{-2}$	-0.15192	5.734680 $\times 10^{-2}$	-0.14391	8.223196 $\times 10^{-2}$	-0.10801	0.118833	-3.28675 $\times 10^{-2}$	0.126928	-9.28499 $\times 10^{-2}$										
-0.15112	5.097904 $\times 10^{-2}$	-0.16181	5.85708 $\times 10^{-2}$	-0.13016	0.105080	-8.37020 $\times 10^{-2}$	0.137297	-7.65372 $\times 10^{-2}$	0.126239										

図3 (a) 正常な圧力場

(b) 市松模様状の圧力振動

## 4.5. Fractional Step 法

Fractional Step 法 (詳細は Yanenko<sup>(20)</sup> 参照) は、1つの方程式を等価ないくつかの方程式群に分離し、それぞれの式に最も適した手法で段階的に計算する数値解析法の総称である。従って、MAC 法, SMAC 法, HSMAC 法, あるいはこれらのアルゴリズムを full-implicit に発展させた SIMPLE, SIMPLER 法 (Patankar<sup>(15)</sup>) などは、Fractional Step 法の一つと見ることができる。しかし、通常は、Chorin<sup>(5)</sup> が提案し Donea ら<sup>(7)</sup> が有限要素法に発展させたアルゴリズムを Fractional Step 法と呼ぶようである。すなわち、

## 【 Algorithm Fractional Steps 】

(ステップ1) 次式、

$$\bar{u} = \bar{u}^n + \Delta t \cdot \bar{f}(0, \bar{u}^n) \quad (31)$$

を解いて速度の中間値  $\bar{u}$  を求める。(ステップ2) 次式より  $p^{n+1}$  を求める。

$$\nabla^2 p^{n+1} = \nabla \cdot \bar{u} / \Delta t \quad (32)$$

(ステップ3) 次式より  $\bar{u}^{n+1}$  を求めステップ1に戻る。

$$\bar{u}^{n+1} = \bar{u} + \Delta t \cdot \bar{f}(p^{n+1}, \bar{0}) \quad (33)$$

最後にこれまでの解法の発展を図4にまとめて示しておく。図中のPF (Penalty Function)法および乗数法MM (Multiplier Method)については本論文での説明は省略する。

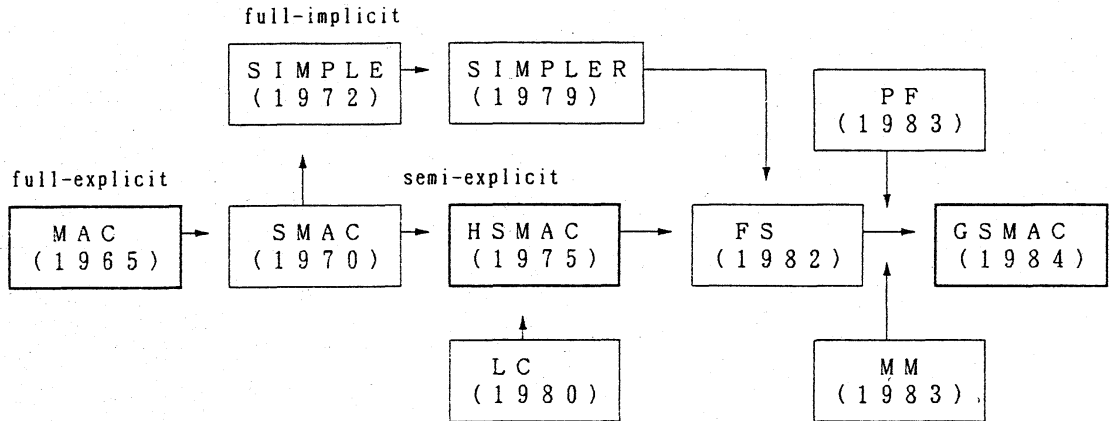


図4 非圧縮粘性流体の数値解析法の発展

## 5. GSMAC法

前章で述べた各スキームは差分法的一种として発達してきたため、これらの手法を有限要素法にそのまま移行しようとするると数々の障害が発生する。特に前章 4.4. で述べた圧力振動の問題は、有限要素法にとっては致命的であり、主に次の2つの研究が対策として進められている。

- (i) 図2のような変数配置をとる補間関数による離散化。
- (ii) 圧力振動を緩和する効果的な smoothing techniqueの開発。

前章の内容をよく吟味すれば明らかなように、(i), (ii)の考え方は本質的ではない。変数配置を図2に示す様にとるのは、隣のセルとのfluxを辺を通して計算するためであり、fluxを正確に計算できるのなら、なにも図2の配置に固執する必要はない。また、人工的な smoothing は、シミュレーションの立場からみるとあまり好ましいものではない。

GSMAC法<sup>(17)</sup>は Generalized SMAC法の略であり、(i), (ii)の様な観点からではなく、SMAC法, HSMAC法の本質に立ち戻って、有限要素法に用いられるような任意メッシュ系にこれらの手法を拡張した手法である。SMAC法, HSMAC法の基本的な特長をもう一度まとめると、次のようになる。

- (a) サイクル誤差自己調整法を採用しているため、圧力の修正量を

Poisson 方程式の解として計算する際の収束判定規準はゆるいものでよい。

(b) 制約条件（連続の式）を反復的に取り扱って、速度と圧力を連続の式を満足するように調整しつつ時間進行する。

GSMACスキームは、(a), (b) の特長に加えてさらに、Chorin<sup>(5)</sup> によって指摘された直交分解の考え方を採用している。以下にこの手法の概要について説明する。

### 5. 1. 直交分解法

流れの場は Helmholtz の定理により、発散零の場と回転零の場の重ね合わせとして表すことができる。Chorin<sup>(5)</sup> により提案された Fractional step 法は、この Helmholtz の直交分解の概念を数値的に取り込んだ手法であるが、直交分解は不完全である。運動方程式の対流項は非線形であるから、完全に直交分解することは不可能である。しかし、対流項の中に含まれる動圧部分を圧力  $p$  に加えることはエネルギーの保存の立場から見ても好ましいものと思われる。この観点から基礎方程式(6)を次の様に表す。

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\nabla H - \frac{1}{Re} \nabla \times \bar{\omega} + \bar{u} \times \bar{\omega} \quad (34)$$

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad (35)$$

ただし、

$$\bar{\omega} = \nabla \times \bar{u}, \quad H = p + \frac{\bar{u}^2}{2} \quad (36)$$

ここで  $\bar{\omega}$  は渦度ベクトルであり、 $H$  は dynamic pressure である。

(34)式に対して、圧力を陰的に流速を陽的に離散化すると、

$$\frac{\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^n}{\Delta t} = -\nabla H^{n+1} - \frac{1}{Re} \nabla \times \bar{\omega}^n + \bar{u}^n \times \bar{\omega}^n \quad (37)$$

となる。この式を fractional step に分離すると、(37)式 of 速度ベクトル場をその縦波成分と横波成分に分離した表示となる。すなわち、

$$\frac{\bar{u} - \bar{u}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{Re} \nabla \times \bar{\omega}^n + \bar{u}^n \times \bar{\omega}^n \quad (\text{横波}) \quad (38)$$

$$\frac{\bar{u}^{n+1} - \bar{u}}{\Delta t} = -\nabla H^{n+1} \quad (\text{縦波}) \quad (39)$$

ここで  $\bar{u}$  は (37) 式を分離する際の間値である。  $H^n \rightarrow H^{n+1}$  の修正は修正量  $H^*$  を導入することにより行われる。すなわち、

$$H^{n+1} = H^n + H^* \quad (40)$$

さて、(39) 式を予測子 - 修正子法で解くために、予測値ベクトル  $\tilde{u}$  を用いて (39) 式をさらに次の 2 式に分離する。

$$\frac{\tilde{u} - \bar{u}}{\Delta t} = -\nabla H^n \quad (41)$$

$$\frac{\bar{u}^{n+1} - \tilde{u}}{\Delta t} = -\nabla H^* \quad (42)$$

H の修正を、時刻  $n+1$  において速度ベクトル  $\bar{u}^{n+1}$  が連続の式

$$\nabla \cdot \bar{u}^{n+1} = 0 \quad (43)$$

を満足するように行うものとする、(42) より  $H^*$  は、

$$\nabla^2 H^* = \nabla \cdot \tilde{u} / \Delta t \quad (44)$$

を解くことによって計算される。従って  $\bar{u}$  を消去し解くべき方程式を整理すると、

$$\frac{\tilde{u} - \bar{u}^n}{\Delta t} = -\nabla H^n - \frac{1}{R_e} \nabla \times \bar{\omega}^n + \bar{u}^n \times \bar{\omega}^n \quad (45)$$

と (44) 式ということになる。

## 5. 2. 反復法による H の調整

次に反復法により (44) 式を解き  $H^*$  を求めることを考える。(44) 式において、 $\phi = H^* \cdot \Delta t$  とおくと、

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \tilde{u} \quad (46)$$

を得る。上式に要素  $e$  において一定な重み関数に乗じて積分し、Gauss の発散定理を利用すると、

$$\oint_{\Gamma^e} \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma = \oint_{\Gamma^e} \tilde{u} \cdot \bar{n} d\Gamma \quad (47)$$

を得る。ただし、 $\Gamma^e$  は要素  $e$  の境界であり、 $\bar{n}$  は要素境界における外向き単位法線ベクトルである。上式を反復的に取り扱うために、次の様に変形する。

$$\phi^{k+1} = \phi^k - \lambda \frac{\Delta t}{S^e} \oint_{\Gamma^e} (\tilde{u} \cdot \bar{n} - \frac{\partial \phi^k}{\partial n}) d\Gamma \quad (48)$$

ここで添字  $k$  は反復の回数を示し、 $\lambda$  は緩和係数である。また  $S^e$  は要素  $e$  の面積である。 $\phi^0 = 0$  より始めて上式の反復を繰り返し  $m$  回で収束したとすると、 $H^*$  は  $H^* = \phi^m / \Delta t$  で求められる。

この方法が HSMAC法と異なるのは、辺の中央に流速成分  $u, v$  を配置する代わりに、 $\partial\phi / \partial n$  の周回積分で置き換えていることである。このため、要素の形がどの様になろうとも、辺を通る flux は正確に計算される。後は周回積分の計算方法のみが残るが、これは次の様に行えばよい。

右図の様に要素  $K$  が要素  $L$  に辺  $ab$  で接しているとき、四角形  $KaLb$  内の  $\text{grad}\phi$  の値は、

$$\text{grad}\phi = \frac{1}{S_{ab}} \oint_{KaLb} \phi \vec{n} d\Gamma \quad (49)$$

で計算される。ここで  $S_{ab}$  は四角形  $KaLb$  の面積である。

辺  $ab$  上の法線ベクトルは容易に求められるので、結果的に辺  $ab$  上の線積分は次の様な簡単な形にまとめられる。

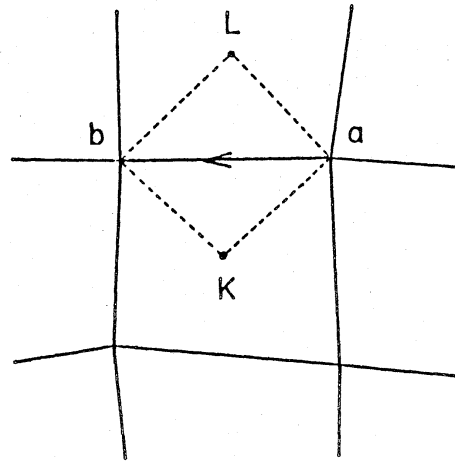


図 5

$$\int_{ab} \frac{\partial\phi}{\partial n} d\Gamma = A_1(\phi_L - \phi_K) + A_2(\phi_b - \phi_a) \quad (50)$$

ただし、

$$A_1 = \frac{l_{ab}^2}{2S_{ab}}, \quad A_2 = \frac{\vec{KL} \cdot \vec{ba}}{2S_{ab}} \quad (51)$$

ここで  $l_{ab}$  は辺  $ab$  の長さである。あらかじめ  $A_1$  と  $A_2$  を求めておけば、辺  $ab$  上の線積分は極めて短時間で計算できる。これを 4 辺についておこなえば (48) の周回積分が計算される。

もし要素分割を直交格子状に行ったとすると  $\vec{KL} \cdot \vec{ba} = 0$  であるから  $A_2 = 0$  となる。通常、四角形要素によって領域を分割する場合は、できるだけ正方形に近い形に分割するのが常であるから、領域の大半の要素に関しては、(50) 式右辺第 2 項はほとんど零とみなしてよい。従って  $\phi_a, \phi_b$  の値は良い精度である必要はない。面積平均によって各図心の値から求めたもので十分である。

### 5.3. GSMAC法のアルゴリズム

GSMAC法のアルゴリズムをまとめると、次のようになる。

#### 【 Algorithm GSMAC 】

(ステップ1)  $\vec{u}^n$ ,  $H^n$  を与えて(45)式より  $\tilde{u}$  を求め、これを予測値とする。

(ステップ2) (48)を反復的に取り扱うことにより、(46)を解き、 $\phi$  を求め、次に  $H^*$  を求める。

(ステップ3) 求めた  $H^*$  により、(40)より  $H^{n+1}$  を、(42)より  $\vec{u}^{n+1}$  をそれぞれ求め、ステップ1にもどる。

以上が GSMAC法の概要である。本論文では(6)式を基礎方程式とした定式化を示したが、(1)式を基礎方程式として定式化することもできる。(1)式を基礎方程式とし、さらに直交格子状のメッシュ系を用いると、GSMAC法は HSMAC法に完全に一致する。従って、GSMAC法は HSMAC法の一般化と見ることがができる。

### 6. 応用例

次に、GSMACスキームを実際の流れの計算に適用した例を示す。数値計算は、次の2通りの場合について行った。

- (a) 上平板が時刻  $t=0$  において衝撃的に一定速度で動き始める、正方形 Cavity 内の非定常流れ (図6)
- (b) 静止流体中に置かれた円柱が、時刻  $t=0$  において衝撃的に一定速度で運動を開始したときの starting flow (図7)

いずれの流れも、数値解析法の妥当性を示すテストパターンとして、多くの解析結果が報告されている代表的な例である。

計算に使用したパラメータは以下の通りである。

表1 計算に用いたパラメータの値

	Cavity	円柱
$\Delta t$	0.01	0.01
$\Delta t$ (初期 100ステップ)	0.001	
緩和係数 $\lambda$	0.18	0.18
(48)式の反復の 収束判定規準	$1.0 \times 10^{-3}$	$1.0 \times 10^{-3}$

### 6. 1. Cavity内の非定常流れ

Cavity内の非定常流れの数値計算結果は、 $Re=100$ の場合を図6 (a) に、 $Re=400$ の場合を図6 (b) にそれぞれ示す。また図6 (c) に境界条件を示す。初期条件は、最初流体は静止しているから、領域内で  $u = v = 0$  ,  $H = 0$  で与えられる。

図6 (a), (b) とともに、Cavity内に生じた渦は、しだいに大きく成長する。渦の生成に伴って圧力場が変化して行く様子がよく表されている。図6 (b) ( $Re=400$ )の速度ベクトル図の右隅に若干のwiggleが発生している。wiggleは、セル・レイノルズ数に対する制約条件を満たしていないために生ずるのであるが、この程度の解の振動は、メッシュを細かくすればすぐに消滅するであろう。流れ場全体としては妥当な結果である。

図6 (d) は、表1の収束規準のもとで、時刻1ステップ毎の(48)式の反復回数の変化を示したものである。初期条件が、 $u = v = 0$  ,  $H = 0$  であるため、最初の数ステップの圧力変動が大きい。このため反復回数もかなり多い。しかし、それ以後は10回以内で収束している。すなわち、計算は非常に高速に行われる。CPUタイムは $Re=400$ の場合で約2分弱である(FACOM M380)。もし、初期段階に局所時間ステップ法(local time-step technique)を導入するならば、初期数ステップの反復回数を減らすことも可能である。しかし、反復回数が多いのは、せいぜい3~4ステップ程度であるので計算時間にはあまり大きく影響しないものと思われる。

### 6. 2. 円柱まわりの starting flow

$Re=60$  に対する円柱まわりの starting flowの計算結果について考察する。速度ベクトル図を図7 (a) に、等圧力線図を図7 (c) にそれぞれ示す。また、計算に使用した有限要素メッシュ図を図7 (b) に示す。

Cavity内の流れの計算は $20 \times 20$ の正方格子で行ったため、同じ計算をHSMAC法で行うことも可能である。しかし、図7 (b) のような不規則メッシュには、HSMAC法の適用は不可能である。GSMAC法は、この様な不規則メッシュ系に対して無理なくHSMAC法の原理が適用できるように拡張したものである。従って、このメッシュ上でも計算は順調に進行する。

時刻 $\Delta t$ の条件は、円柱が急加速した状態を想定して適当な値を領域全体に与えなければならない。この計算においては、最初のステップのみ領域全体でポテンシャル流れの解を与えている。従って、非定常計算はポテンシャル流れを初期値として時間進行する。図7 (a), (c) を見る



と、時間が進行するにつれて流れが変化し、しだいに双子渦が成長する様子がよく表されている。圧力場も双子渦の成長に伴って変化する。数値解は全体として妥当なものである。

図7(d)は、(48)式の反復回数の変化を示したものである。Cavity内の非定常流れの場合のように初期数ステップにおいて反復回数が異常に増大するようなこともなく、全て10回以内で収束している。このため計算時間は極めて短い。これは、最初のステップに実際の現象を近似するポテンシャル流れの解を与えたためである。このように、衝撃的に運動を開始する物体まわりの非定常計算では、初期値の与え方が反復計算の回数に影響を与えるのである。

## 7. あとがき

本論文では、非圧縮粘性流体の非定常流れの数値解法として、最近著者らが開発したGSMAC法のアルゴリズムを紹介した。この方法は、差分法で発達してきたSMAC法、HSMAC法の一般化であり、有限要素法における不規則なメッシュ系に容易に適用できる汎用かつ高速な数値計算法である。

その基本的なアイデアは、Fractional-Step法の原理である流れ場の直交分解と、サイクル誤差自己調整法を応用した圧力と速度の修正反復計算にある。これらの非定常流れの数値解析の基本的な考え方は、差分法の分野で徐々に発達してきたものであるが、これらの概念を全て取り込むことに成功した有限要素法のスキームはGSMAC法の他にはないと思われる。従って、GSMAC法は差分法で成功してきたスキームの一般化である。

今後、領域の細分化に伴う反復回数の増加の問題が生ずるであろうが、これについては、GSMAC法と多重格子法(Multi-Grid Method)を組み合わせることにより解決されるであろう。また、時間前進の安定化および移流項の上流化の問題、さらに、乱流、熱対流問題への拡張、3次元への拡張など残された問題は多い。これらの問題については今後の研究課題とし、成果があがりしだい報告する予定である。

最後に、本論文の作成にあたって大学院生小林聡氏、灘口明彦氏の協力を得たことを記し、両氏に感謝の意を表す。

## 参考文献

- 1 . Agarwal, R. K., Proc. ASME/AIAA Conference on Computers in Flow Predictions and Fluid Dynamics Experiments, (1981), 73.
- 2 . Amsden, A. A. and Harlow, F. H., LA-4370, (1970).
- 3 . Chorin, A. J., J. Comp. Physics, 2(1967), 12.
- 4 . Chorin, A. J., Math. Comput., 22(1968), 745.
- 5 . Chorin, A. J., Math. Comput., 23(1969), 341.
- 6 . Donea, J., Giuliani, S., Laval, H. and Quartapelle, L., Computational Techniques in Transient and Turbulent Flow, (1981), 97, Pineridge Press.
- 7 . Donea, J., Giuliani, S., Laval, H. and Quartapelle, L., Comput. Meth. in Appl. Mech. and Engng., 30(1982), 53.
- 8 . Donea, J., Giuliani, S. and Morgan, K., Int. J. Num. Meth. Engng., 17-5(1981), 790.
- 9 . Gresho, P. M., 第4回流れの有限要素法解析シンポジウム報文集, (1983), 日科技連.
- 10 . Harlow, F. H. and Welch, J. E., Physics of Fluids, 8-12(1965), 2182.
- 11 . Hirt, C. W. and Harlow, F. H., J. Comp. Physics, 2(1967), 114.
- 12 . Hirt, C. W., Nichols, B. D. and Romero, N. C., LA-5852, (1975).
- 13 . Lee, R. L., Gresho, P. M. and Sani, R. L., Int. J. Num. Meth. Engng., 14-12(1979), 1785.
- 14 . Patankar, S. V. and Spalding, D. B., Int. J. Heat Mass Transfer 15(1972), 1787.
- 15 . Patankar, S. V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, (1980), McGRAW-HILL.
- 16 . Patera, A. T., J. Comp. Physics, 54(1984), 468.
- 17 . 齊藤, 植野, 棚橋, 第5回流れの有限要素法解析シンポジウム報文集, (1984), 161, 日科技連.
- 18 . 棚橋, 日本流体力学会誌『ながれ』, 3-1(1984), 8.
- 19 . Thomasset, F., Implementation of Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, (1981), Springer-Verlag.
- 20 . Yanenko, N. N., The Method of Fractional Steps, (1971), Springer-Verlag.

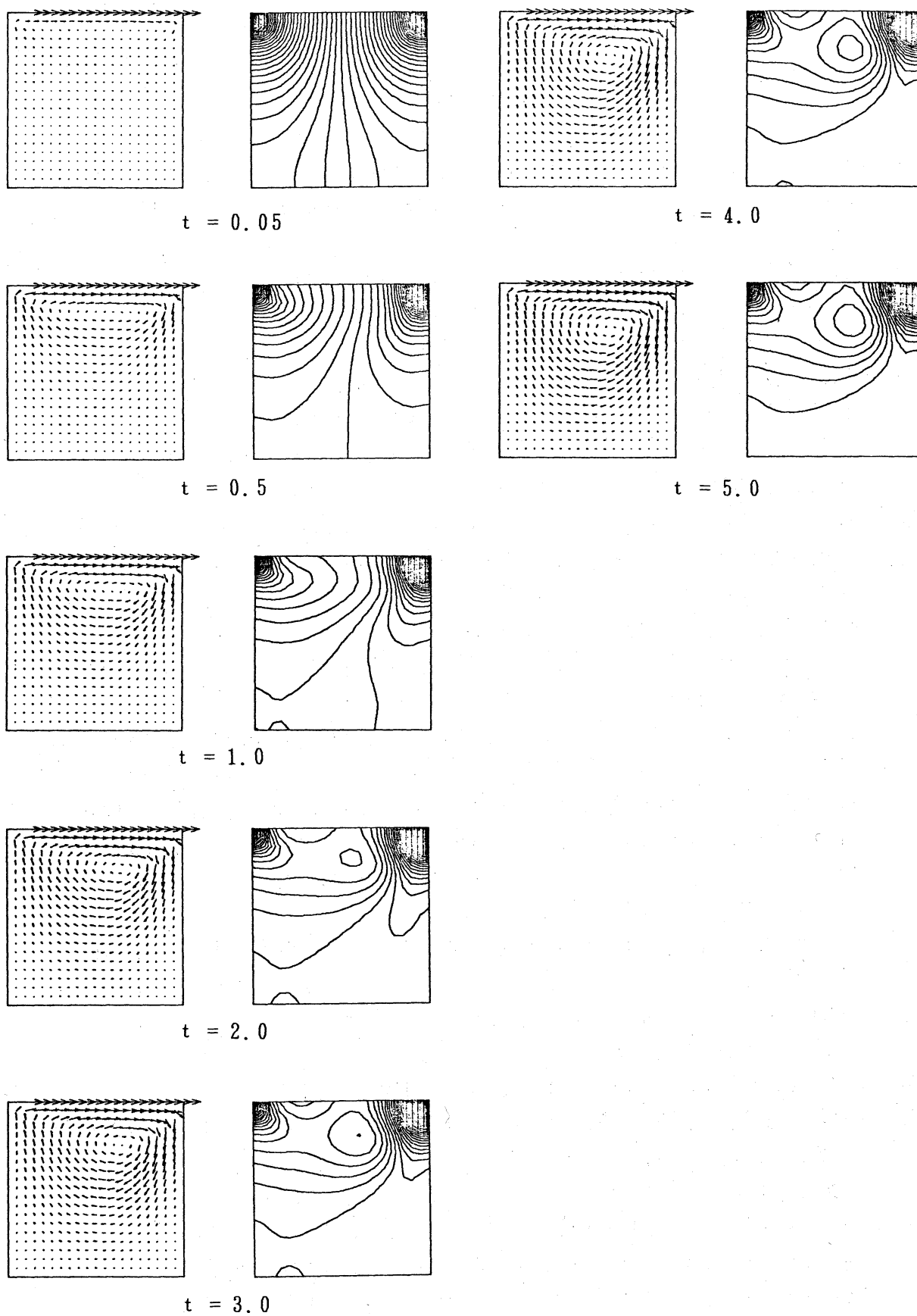


図6 (a) Cavity内流れの速度ベクトル図(左)  
と等圧力線図(右) (  $Re=100$ ,  $20 \times 20$ 要素 )

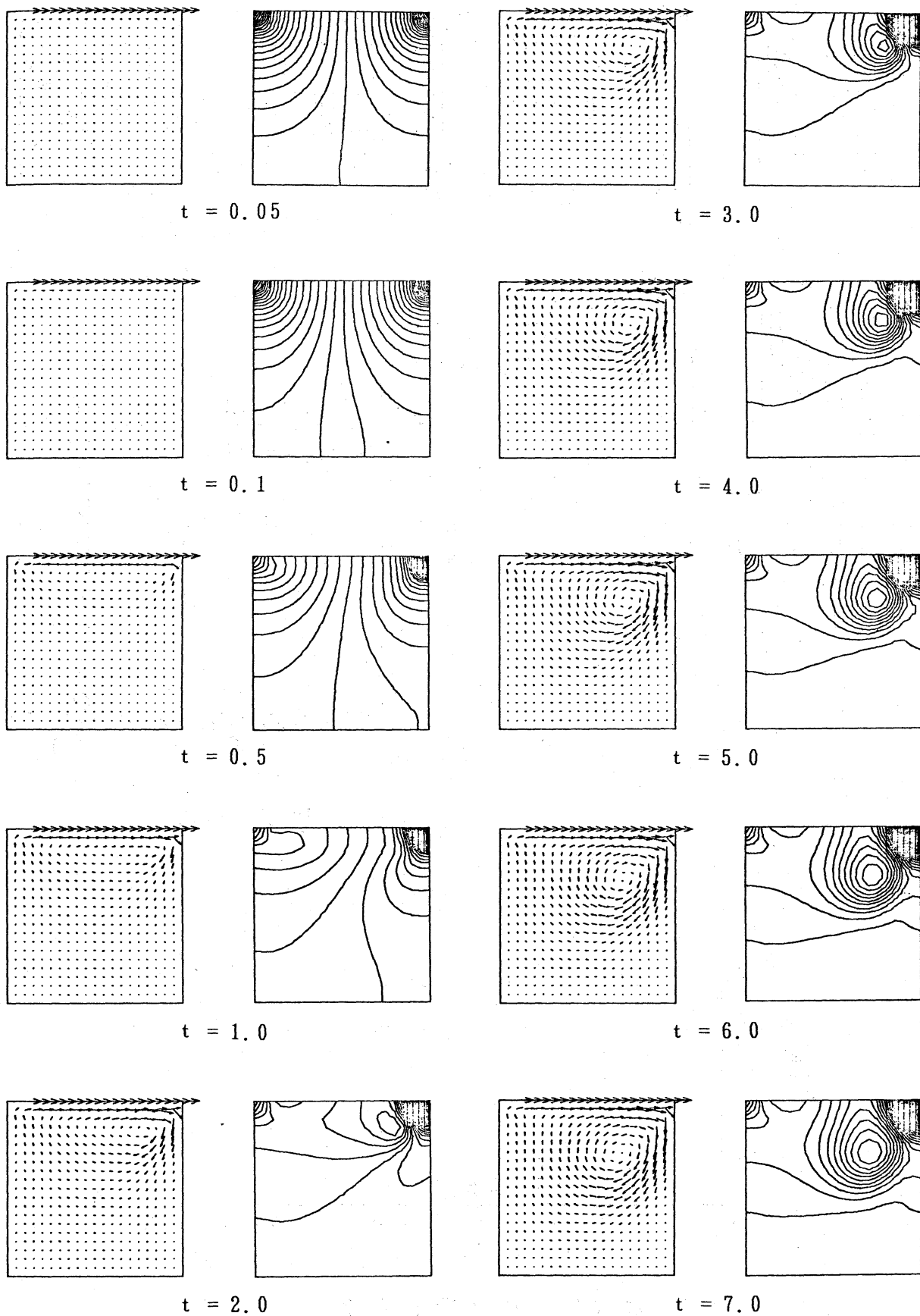
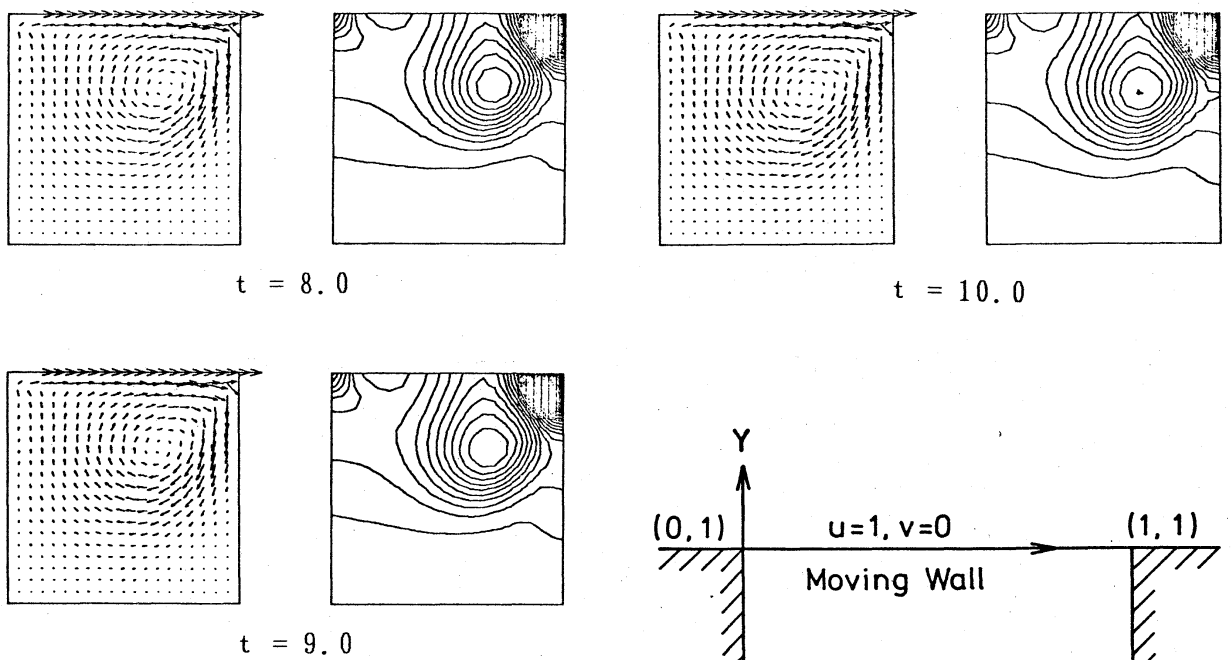
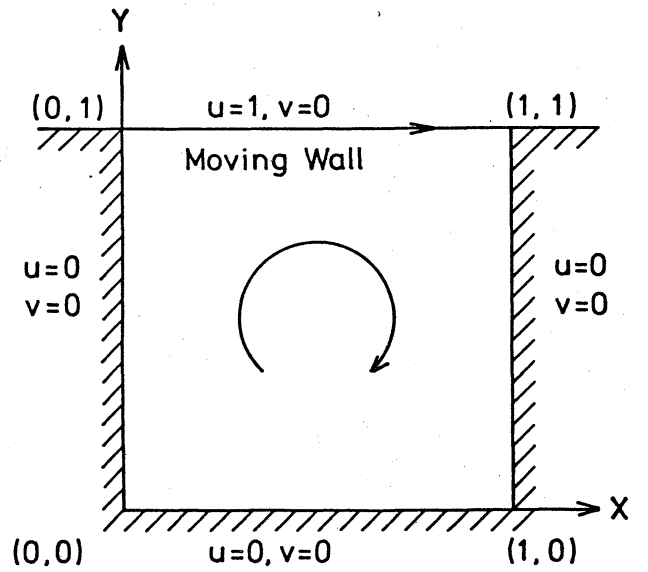


図6 (b) Cavity内流れの速度ベクトル図(左)  
と等圧力線図(右) ( $Re=400$ ,  $20 \times 20$ 要素)

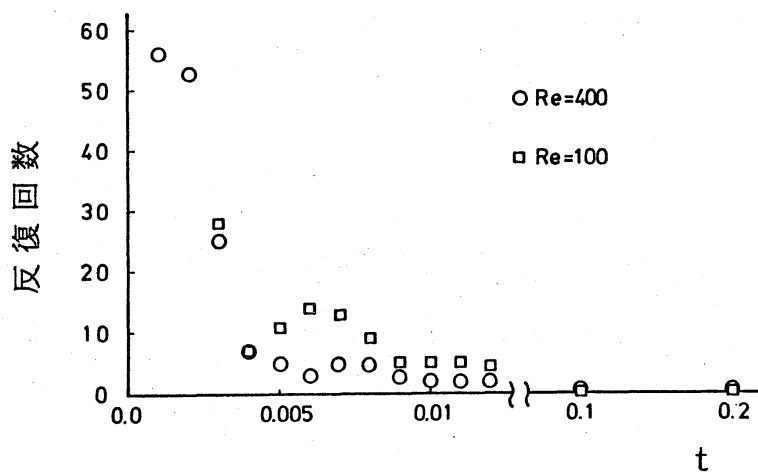


Cavity内流れの速度ベクトル図（左）  
と等圧力線図（右）  
(  $Re=400$ ,  $20 \times 20$ 要素 )

(b) (続き)

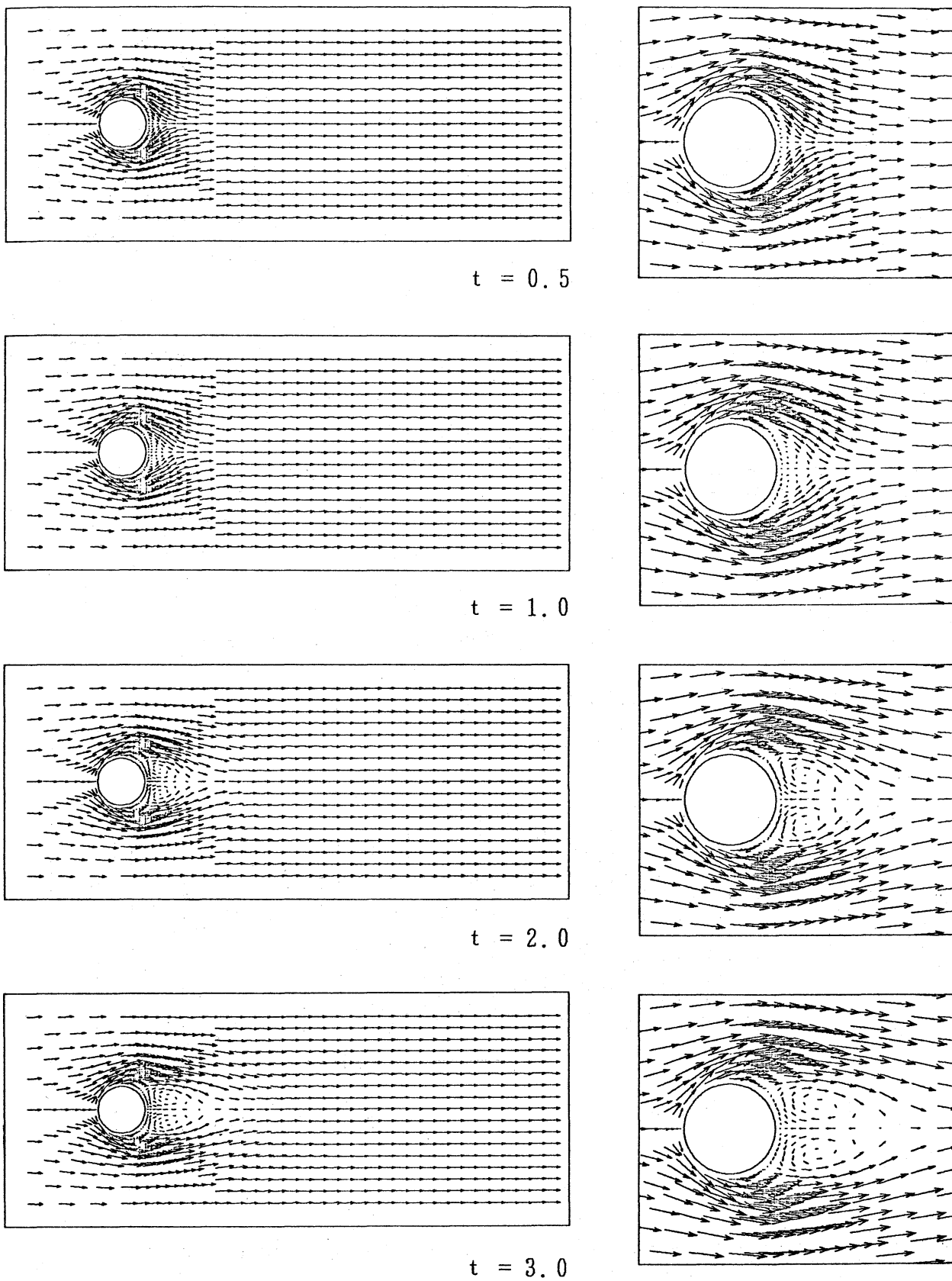


(c) 境界条件



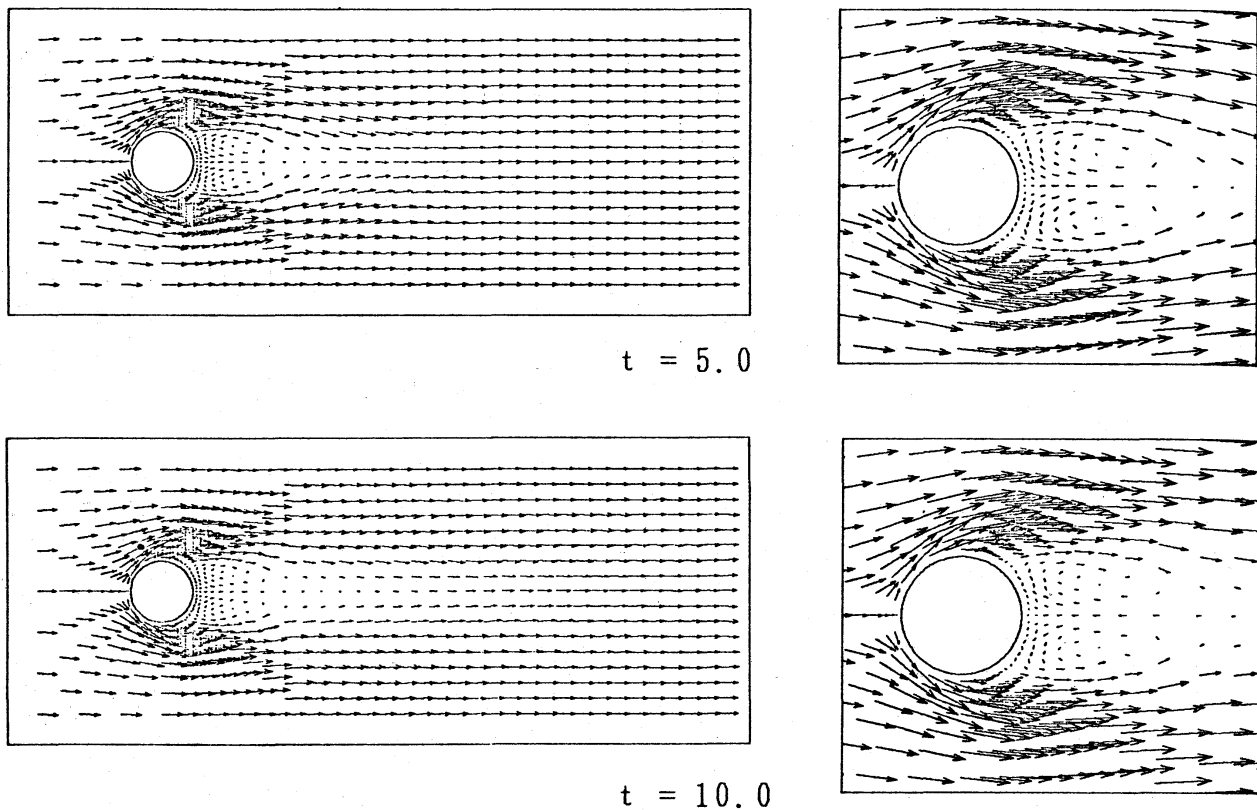
(d) 反復回数の時間的变化

図6 Cavity内の流れ

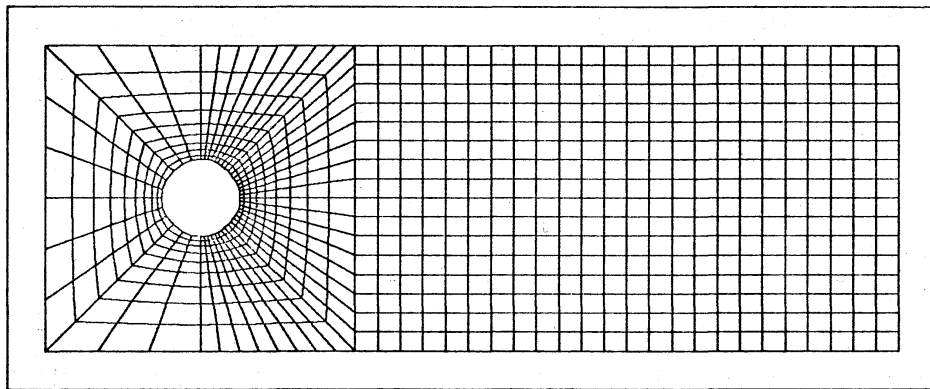


(a) 速度ベクトル図

図7 衝撃的に運動を開始する円柱まわりの流れ ( $Re=60$ )

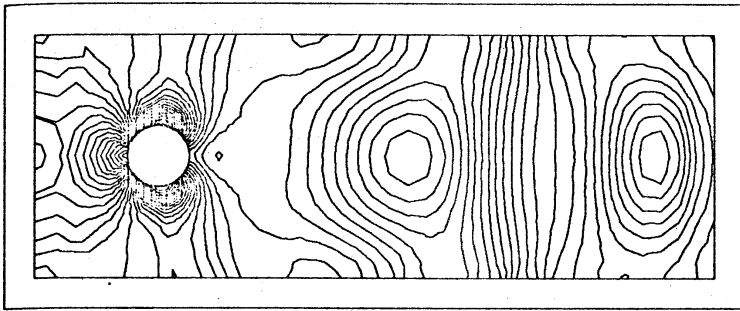


(a) 速度ベクトル図 (続き)

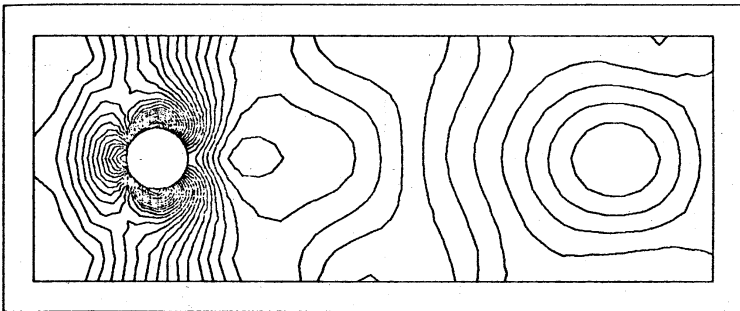
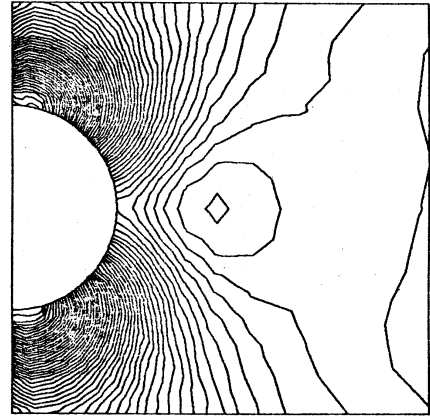


(b) 有限要素メッシュ (848 節点, 780 要素)

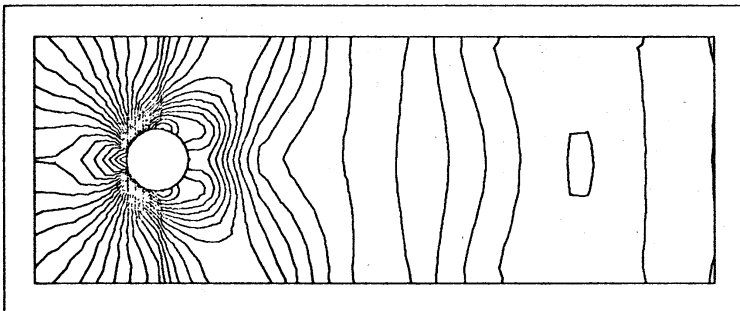
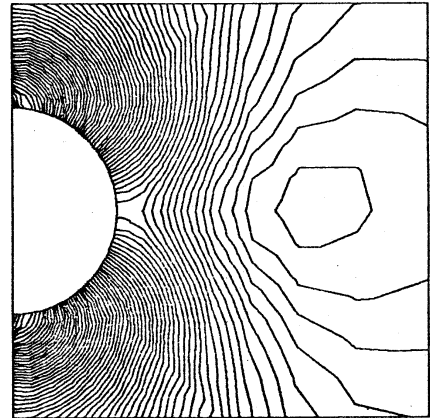
図7 衝撃的に運動を開始する円柱まわりの流れ (  $Re=60$  )



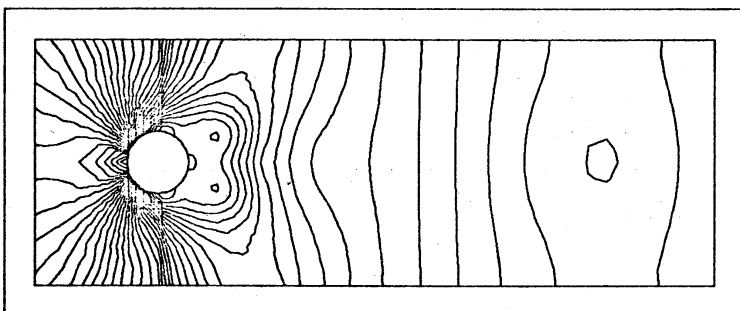
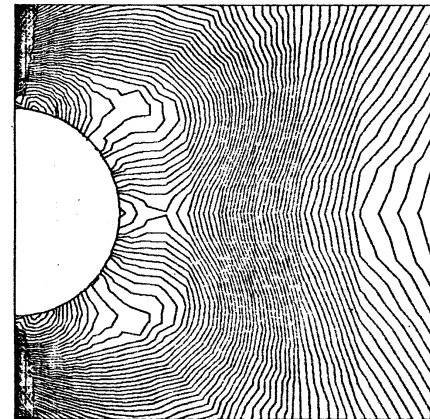
$t = 0.5$



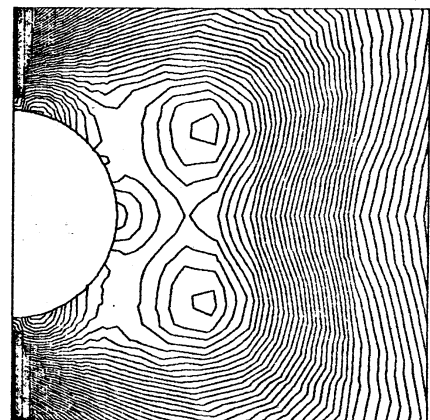
$t = 1.0$



$t = 2.0$



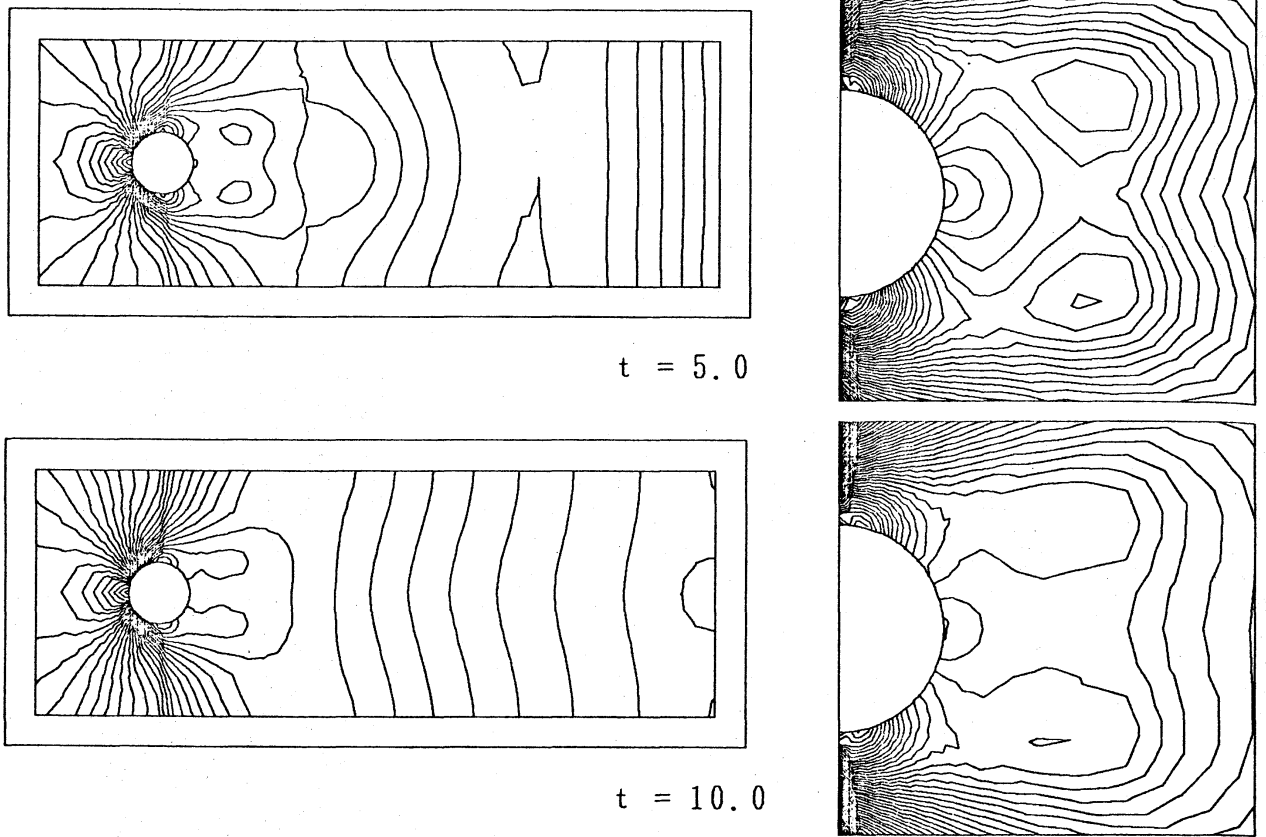
$t = 3.0$



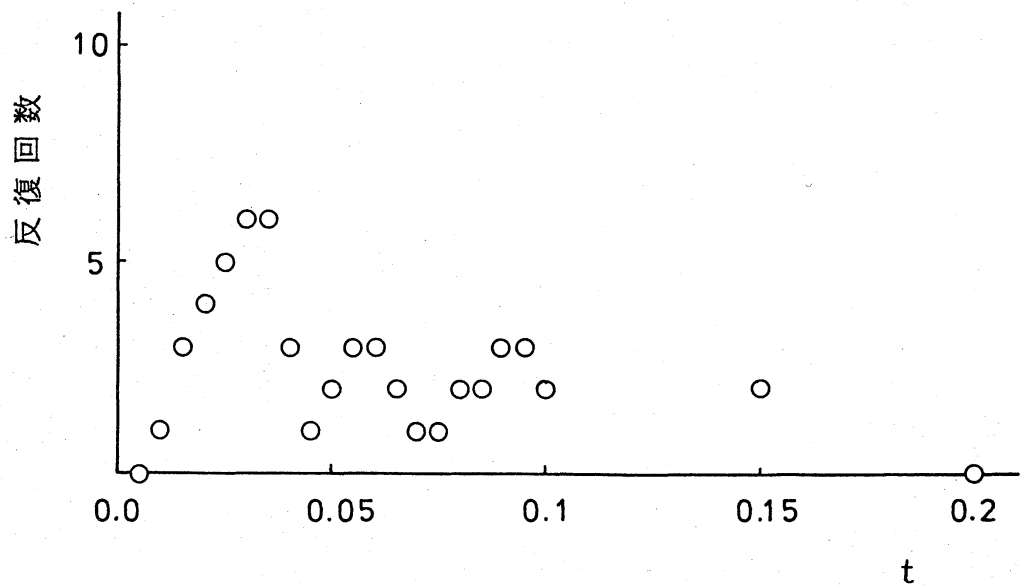
(c) 等圧力線図

図7 衝撃的に運動を開始する円柱まわりの流れ ( $Re=60$ )





(c) 等圧力線図 (続き)



(d) 反復回数の時間的变化

図7 衝撃的に運動を開始する円柱まわりの流れ (Re=60)