数理解析研究所講究録
549巻 1985年 169-181

ガロア加群と埋め込み問題について

筑波大・数学　竹内光弘　(Mitsuhiro Takeuchi)

講演は Brinkhuis [1][2] の紹介であった．共に公刊ずみなので重ねて書くこともないのであるが，日本語での概観を手っ取り早いと考える読者のために，時間の都合で述べられなかった点を補いつつ講演をざっと再現することにする．

まず埋め込み問題とは何か，であるが，体の有限次拡大 $N \supset K \supset k$ があって，N/k と K/k がガロアであるとすれば，有限群の拡大

$$1 \to \mathrm{Gal}(N/K) \to \mathrm{Gal}(N/k) \to \mathrm{Gal}(K/k) \to 1$$

が自然に得られる．埋め込み問題というのは，逆に，与えられた有限群の拡大を，このような拡大として実現する問題である．この際，K/k は固定して，$\mathrm{Gal}(K/k) = \Sigma$ とおき，N の方を色々動かす．従って上の拡大を E_N とあらわす．有限群の拡大 $E: 1 \to \Delta \to \Gamma \to \Sigma \to 1$ と K/k に関する埋め込み問題の解とは，上の条件を満たす N と群の同形 $\alpha: \mathrm{Gal}(N/K) \simeq \Delta$ の

対(N,α)で、ΣのΔによる2つの拡大αE_NとEが同形となるもののことと定義する。

次にガロア加群であるが、上の状況を有限次代数体で考えているとする。一般にNの整数環をO_Nとあらわす。上の状況でO_Nは自然に群環$O_K\Delta$上の左加群になる。これがここで考えるガロア加群である。このガロア加群の構造との関連において次のような埋め込み問題が生ずる。EとK/kの他に、$O_K\Delta$-加群Xを与えておき、EとK/kの(埋め込み問題の)解(N,α)で、さらに$O_K\Delta$-加群として$O_N \simeq X$となるもの、それを簡単に、$E, K/k, X$の解とよぼう、があるかないか、どのくらいあるか等を問題にする。

ガロア加群の構造に関する次の結果[2, (2.4), p.146]は、以後の話で基本となる。

命題．N/Kを有限次代数体のアーベル拡大，$\Delta = Gal(N/K)$とする．$tr_{N/K}(O_N) = O_K$ならば，O_Nは$O_K\Delta$-加群としてinvertibleである．

証明はあるいみでHopf代数的であり、私には興味深い。この仮定は、整数論的にはN/Kがtameということである。従って前の状況で、Eにあらわれる群Δがアーベルで、$O_K\Delta$-加群Xがinvertibleのとき、$E, K/k, X$の解(N,α)で、N/Kがtameであるもの，すなわちtameな解，の存在が問題に

なる．[2] はこの問題を扱っており，この報告は主としてその紹介である．

一方 X が自明，つまり $X = O_K\Delta$，の場合は，正規底条件の下での埋め込み問題とよばれ，[1] で扱われている．簡単に，E，K/k の正規底解とよんでよいであろう．

I.　Hochschild-Serre sequence

一般に群の拡大 $1 \to H \to G \to \bar{G} \to 1$ と G-加群 A があれば次の Hochschild-Serre の完全列が生ずる．

$$1 \to H^1(\bar{G}, A^H) \xrightarrow{\text{inf}} H^1(G, A) \xrightarrow{\text{res}} H^1(H, A)^{\bar{G}} \xrightarrow{\text{tr}} H^2(\bar{G}, A^H)$$

以下で使うのは A が $\bar{G}$-加群，つまり $A = A^H$，の場合で，このとき $H^1(H, A) = \mathrm{Hom}(H, A)$，$H^1(H, A)^{\bar{G}} = \mathrm{Hom}_G(H, A)$ となり，G-準同形 $\lambda : H \to A$ に対し，transgression $tr(\lambda)$ はもとの拡大を λ で pushout して得られる，ということさえ承知すれば十分である．

II.　Fröhlich-Wall sequence

群 G が左から自己同形に作用している環を G-環とよぶ．R を可換な G-環とする．R の単元の群 R^* は G-加群になるからその cohomology 群 $H^i(G, R^*)$，$i \geqq 0$ が考えられる．RG を次

の乗法で定義される歪群環とする．(作用を $(x, r) \mapsto {}^{x}r$ で示す)．

$$(rx)(sy) = (r\cdot {}^{x}s)(xy),\quad r,s \in R,\ x,y \in G.$$

RG-加群が2つあれば，そのR上のテンサー積は，Gの対角的作用で再びRG-加群となるから，R上有限生成なRG-加群の同形類の集合$M(R,G)$はこの積により，可換なモノイドになる．その可逆元の群を$\mathrm{Pic}(R,G)$と記し，G-環Rの equivariant Picard group とよぶ．一方GのRへの作用は通常のピカール群$\mathrm{Pic}(R)$への作用を引起し，それをG-加群にする．この作用は，次のように記述しておくと後々便利である．$g \in G$と$(X), (Y) \in \mathrm{Pic}(R)$に対し$g$-semilinearな同形$X \xrightarrow{\sim} Y$があれば，$(Y) = {}^{g}(X)$とおく．

次のFröhlich-Wallの完全列(のはじめの4項)が得られる．

$$1 \to H^1(G,R^*) \xrightarrow{tw} \mathrm{Pic}(R,G) \xrightarrow{for} \mathrm{Pic}(R)^G \xrightarrow{sem} H^2(G,R^*)$$

各写像を簡単に記述しておこう．準同形性と完全性は容易にチェックできる．1-cocycle $\lambda: G \to R^*$に対し，λによるGのtwist作用 $g *_{\lambda} r = {}^{g}r\,\lambda(g)^{-1}$, $g\in G$, $r \in R$ でRはRG-加群R_λになる．twはλのクラスをR_λのクラスに写す写像である．forは単にGの作用を忘れることで得られる．$(X)\in \mathrm{Pic}(R)$がG-不変ということは，任意の$g\in G$に対し，g-semilinearな自己同形$f_g: X \xrightarrow{\sim} X$が存在するということで，$g,h\in G$

に対し，$f_g f_h f_{gh}^{-1}$ は X の R-自己同形になる．所が $\mathrm{End}_R(X)$ は R と同一視されるから，この同形は R^* の元 $d_X(g,h)$ に対応する．d_X は 2-cocycle になり，sem は (X) に d_X のクラスを対応させる写像である．

なおこの Fröhlich-Wall 列は服部[4]で定義された完全列と，本質的に一致し，服部の記号では，$Pic(R,G)=H^1(R,G)$ となることに注意しておく．

ここで以後最後まで用いる記号を定めておく．K/k を有限次代数体のガロア拡大，$\Sigma=Gal(K/k)$，$\tilde{K}$ を K の極大 tame アーベル拡大，ガロア群を次の図のようにあらわし

$$\begin{tikzcd}
\tilde{K} \arrow[d, dash, "\Omega"] \\
K \arrow[d, dash, "\Sigma"] \\
k \arrow[uu, dash, bend left=60, "\Omega_k"]
\end{tikzcd}$$

さらに有限 Σ-加群 Δ を一つ固定する．

これを材料にして，一つの可換図形を描きたい．拡大 $1\to\Omega\to\Omega_k\to\Sigma\to 1$ と Σ-加群 Δ に関する Hochschild-Serre 列を上に，Σ-環 $O_K\Delta$（Σ は O_K と Δ にそれぞれ作用，それを合せる）の Fröhlich-Wall-服部列を下に書くと次の図が得られる．

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & H^1(\Sigma,\Delta) \arrow[r, "\mathrm{inf}"] \arrow[d, "i_1"] & H^1(\Omega_k,\Delta) \arrow[r, "\mathrm{res}"] \arrow[d, dashed, "\mathrm{gal}_k"] & H^1(\Omega,\Delta)^\Sigma \arrow[r, "\mathrm{tr}"] \arrow[d, dashed, "\mathrm{gal}"] & H^2(\Sigma,\Delta) \arrow[d, "i_2"] \\
1 \arrow[r] & H^1(\Sigma,O_K\Delta^*) \arrow[r, "\mathrm{tw}"] & \mathrm{Pic}(O_K\Delta,\Sigma) \arrow[r, "\mathrm{for}"] & \mathrm{Pic}(O_K\Delta)^\Sigma \arrow[r, "\mathrm{sem}"] & H^2(\Sigma,O_K\Delta^*)
\end{tikzcd}$$

ここで，i_1，i_2は自然な単射$\Delta \hookrightarrow O_K\Delta^*$から引起される．また$\Omega_k$と$\Omega$はprofinite群で有限アーベル群$\Delta$に連続に作用しているので，上の列の第2，3項はSerreのいみでのdiscrete cohomology群と解釈しておく（そうしても完全性は成立つ）．破線で示した部分に，準同形ではないが興味深い写像が定義され図形は可換となる．その定義を次に述べる．

III. The Galois module map

IIと同様，Rを可換G-環とする．forの核$F(R,G)$は，R上1次元自由なRG-加群の同形類がテンサー積（R上の）を積として作るアーベル群で，IIは写像twが同形

$$\mathrm{tw}: H^1(G,R^*) \simeq F(R,G)$$

を引起すことを主張する．これを次のようにmodifyする．Gはprofinite群でdiscrete環Rに連続に作用しているとする．

（Rをdiscrete G-環とよぶ）．このとき$H^1(G, R^*)$をdiscrete cohomologyにとる．対応して$F(R, G)$は，Gが連続に作用するR上1次元自由なRG-加群の同形類の群にとる．すると上の同形twがやはり成立つ．

さてΩ_kの自然な$O_{\tilde{K}}$への作用と，$\Omega_k \to \Sigma$を通してのΔへの作用を合せると，群環$O_{\tilde{K}}\Delta$はprofinite群Ω_k上のdiscrete環になる．$\Omega \subset \Omega_k$だから特にdiscrete Ω-環でもある．これに対する上の同形twを使って次の合成写像を定義しよう．

$$\mathrm{gal}:\ H^1(\Omega, \Delta) \to H^1(\Omega, O_{\tilde{K}}\Delta^*) \overset{tw}{\simeq} F(O_{\tilde{K}}\Delta, \Omega) \to M(O_K\Delta)$$

ここで才1の写像は自然な単射$\Delta \hookrightarrow O_{\tilde{K}}\Delta^*$から引起され，才3のは$X \longmapsto X^{\Omega}$である．この際$(O_{\tilde{K}}\Delta)^{\Omega} = O_K\Delta$に注意する．（必要な有限生成性は容易に示せる）．でこの写像galの像が実は$\mathrm{Pic}(O_K\Delta)$に入ることを言いたい．$H^1(\Omega, \Delta) = \mathrm{Hom}(\Omega, \Delta)$に注意し，$\phi \in H^1(\Omega, \Delta)$をとる．

$$I_\phi = \{r \in O_{\tilde{K}}\Delta \mid r = {}^{\omega}r\phi(\omega)^{-1} \text{ for all } \omega \in \Omega\}$$

は$O_{\tilde{K}}\Delta$の$O_K\Delta$-submoduleで，定義により$gal(\phi)$はI_ϕの同形類である．一方連続な準同形ϕは

$$\phi:\ \Omega \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(K_\phi/K) \overset{\bar{\phi}}{\simeq} \Delta_\phi \subset \Delta$$

とepi-mono分解する．K_ϕの整数環をO_ϕとすれば，前に述べたように，K_ϕ/Kはtameであるから，O_ϕはinvertible $O_K\Delta_\phi$-加群である．所が$O_K\Delta$-加群の同形

$$O_K\Delta \otimes_{O_K\Delta_\phi} O_\phi \simeq I_\phi,\ r \otimes x \mapsto r\sum_{\omega\in\Delta_\phi} {}^{\omega}x\omega^{-1}$$

が存在する．そこで$gal(\phi) \in Pic(O_K\Delta)$であるといえる．こうして得られた写像$gal: H^1(\Omega,\Delta) \longrightarrow Pic(O_K\Delta)$は，各ステップでそうであるため，$\Sigma$の作用を保ち，従って$H^1(\Omega,\Delta)^\Sigma \to Pic(O_K\Delta)^\Sigma$を引起す．

この写像galは次のいみで，弱いいみで乗法的である[2, (3.10), p.149]．$\phi, \psi \in H^1(\Omega,\Delta)$とし，$O_K$のどのprimeも，$K_\phi$又は$K_\psi$で不分岐であるとする．このとき$O_{\tilde{K}}\Delta$の中で$I_{\phi\psi} = I_\phi I_\psi$が成立ち，$I_\phi I_\psi \simeq I_\phi \otimes_{O_K\Delta} I_\psi$なので$gal(\phi\psi) = gal(\phi)\,gal(\psi)$となる．

他方gal_kは次の合成で定義される．

$$gal_k\colon H^1(\Omega_k,\Delta) \to H^1(\Omega_k, O_{\tilde{K}}\Delta^*) \overset{tw}{\simeq} F(O_{\tilde{K}}\Delta,\Omega_k) \to M(O_K\Delta,\Sigma)$$
$$X \longmapsto X^\Omega$$

$\phi \in H^1(\Omega_k,\Delta)$に対し，$O_K\Delta$-加群としては$gal_k(\phi) = gal(\phi|\Omega) \in Pic(O_K\Delta)$だから，$gal_k(\phi) \in Pic(O_K\Delta,\Sigma)$がいえる．従って$gal_k: H^1(\Omega_k,\Delta) \to Pic(O_K\Delta,\Sigma)$が得られるが，この写像も$gal$と全く同じ意味で，弱いいみで乗法的である．

さて2つのガロア加群写像 gal, gal_k をこう定義して得られる，3頁前の図は可換になる[2, (5.1), p.153]．可換性の験証はスタンダードであり，大して難かしくない．埋め込み問題に対して面白い意味をもつのは，図の右端の四角である．以下でその解釈を与えよう．

1-cocycle $\phi : \Omega \longrightarrow \Delta$（つまり連続準同形）が Σ-不変ならば K_ϕ は k 上もガロアになり，E_{K_ϕ} を E_ϕ であらわし，$tr(\phi)$ に属する一つの拡大を E とすれば，次の可換な図が自然に得られる．

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[r] & \Omega \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \Omega_k \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \Sigma \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
E_\phi : & 1 \arrow[r] & \mathrm{Gal}(K_\phi/K) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\phi}", "\wr"'] & \mathrm{Gal}(K_\phi/k) \arrow[r] \arrow[dd, hook] & \Sigma \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 1 \\
 & & \Delta_\phi \arrow[d, phantom, "\cap"] & & & \\
E : & 1 \arrow[r] & \Delta \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] & \Sigma \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}
$$

だから，もし ϕ が全射なら $(K_\phi, \bar{\phi})$ は E と K/k に対する埋め込み問題の解ということになる．しかもこのとき $gal(\phi)$ は $O_K\Delta$-加群 O_ϕ のクラスで与えられることに注意する．逆に (N, α) が E と K/k に対する tame な解（$N \subset \tilde{K}$ とみなす）ならば，合成写像 $\phi_\alpha : \Omega \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(N/K) \overset{\alpha}{\simeq} \Delta$ は Σ-不変

な1-cocycle で，(N, α) は $\phi = \phi_\alpha$ に対する $(K_\phi, \mathfrak{F})$ と一致する．こうして次の解釈が得られた．

結論1．K/k を有限次代数体のガロア拡大，$\Sigma = Gal(K/k)$，Δ を有限 Σ-加群，$E: 1 \to \Delta \to \Gamma \to \Sigma \to 1$ をその加群構造と両立する一つの群拡大，X を $O_K\Delta$-加群とする．$E, K/k, X$ に対する tame な解 (N, α) と，全射な $\phi \in H^1(\Omega, \Delta)^\Sigma$ で

$$(E) = tr(\phi),\ (X) = gal(\phi)$$

を満すものが一対一に対応する．対応は，$(N, \alpha) \mapsto \phi_\alpha$ 及び $(K_\phi, \mathfrak{F}) \leftarrow\!\shortmid \phi$ で与えられる．

冒頭説明した埋め込み問題の解を field解と考え，この概念を algebra解に拡張すると，上の対応で ϕ を全射とする必要がなくなる [2, §6]．

系1．$E, K/k, X$ が tame な解をもつためには，(a) $(X) \in Pic(O_K\Delta)^\Sigma$，(b) $i_2(E) = sem(X)$ が必要である．

系2．E と K/k に対する正規底条件の下での tame な解 (N, α) と，全射な $\phi \in H^1(\Omega, \Delta)^\Sigma$ で

$$tr(\phi) = (E),\ gal(\phi) = 1$$

となるものが一対一に対応する．

系3．$E, K/k$ が tame な正規底解をもつためには，$i_2(E) = 1$ が必要である．

面白いことに，系3は Δ：アーベル及び tame を落して

も成立つ．それが[1]の主結果であるが，次のようにformulateされる．

定理．K/k は結論1と同じとし，$E: 1 \to \Delta \to \Gamma \to \Sigma \to 1$ を有限群の拡大とする．E, K/k が正規底解をもてば，E の Γ-準同形 $\Delta \hookrightarrow O_K\Delta^*$ によるpushoutはsplitする．

Δ がアーベルの場合，結論は $i_2(E)=1$ ということである．これに関連して，K がCM体の時の面白い例が[1]に述べられている．CM体というのは，どういう風に K を $\mathbb{C}$ にうめこんでも，像は複素共役でstableで，しかもある一つの K の自己同形を引起すような代数体であるから，Δ を有限 Σ-加群とすると，あるcanonicalな Σ-準同形 $O_K\Delta^* \longrightarrow \Delta$ で，その Δ への制限が $\delta \longmapsto \delta^2$ となるものの存在が言える．このことから $i_2(E)=1$ は $(E)^2=1$ をimplyする．だから Σ と Δ の一方を奇位数としておけば，i_2 は単射と分り，E がsplitしない限り，E と K/k は正規底解をもたないことになる．これは次のように言ってもよい．

系4．$N \supset K \supset k$ をすべて有限次代数体，K はCM体，N/k と K/k をガロア，N/K はアーベル，$[N:K]$ と $[K:k]$ の一方を奇数とする．もし E_N がsplitしなければ（そのような例は簡単にたくさん作れる）N/K のガロア加群は正規底をもたない．

tame の場合に戻ろう．今までの話で，有限次代数体の性質は，実は余り使っていない．実際Kをある Dedekind 環 $\mathcal{O}$ の商体とし，Σ は $\mathrm{Aut}_{ring}(\mathcal{O})$ の有限部分群で $k=K^{\Sigma}$ とおけば，主な結果がそのまま成立つ．しかし有限次代数体であると，類体論を用いて，次の存在定理が言える [2, (8.2), p.160].

定理．任意の $\phi\in H^1(\Omega,\Delta)^{\Sigma}$ に対し，全射な $\phi'\in H^1(\Omega,\Delta)^{\Sigma}$ で

$$\mathrm{tr}(\phi)=\mathrm{tr}(\phi'),\mathrm{gal}(\phi)=\mathrm{gal}(\phi')$$

となるものが無限に存在する．

結論2．結論1の仮定で，E, K/k, X の tame 解が一つでもあれば，実は無限にある．

系5．split 拡大 $1\to\Delta\to\Delta\cdot_s\Sigma\to\Sigma\to 1$ は，tame な正規底解をつねに無限個もつ．

ここに紹介した Brinkhuis の理論は，Fröhlich [3] の VI, §2 にも紹介されている（ようである）が，私には，記法の問題もあり，この紹介は余り分り易いと見えない．原論文の方が透明に分り易く書かれている．（実際，ここに要点をくり返す必要もないように思われる）．

文 献

[1] J. Brinkhuis, Normal integral bases and embedding problems, Math. Ann. 264, 537-543 (1983).

[2] J. Brinkhuis, Galois modules and embedding problems, J. rene angew. Math. 346, 141-165.

[3] A. Fröhlich, Galois module structure of algebraic integers, Ergebnisse Math. 3. Folge, Band 1, Springer 1983.

[4] A. Hattori, On groups $H^n(S,G)$ and the Brauer group of commutative rings, Sci. Pap. Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo, 28 (1978), 1-20.