数理解析研究所講究録
549巻 1985年 159-168

Multiplicative Galois module structure

東大・教養 片岡 俊孝 (Toshitaka Kataoka)

§0. 序.

この小文では、T. Chinburg による代数体の一般化された単数群の Galois module structure をあらわす不変量の定義と性質を、かんたんにまとめてみたい。とくに Chinburg は、Artin root number , L 函数の $s=0$ での Taylor 展開での最初の 0 ではない項の係数等との結びつきにかんする予想を提出している。

まず、群環の class group ついて復習しよう。 G を有限群とし、$K_0(\mathbb{Z}G)$ を群環 $\mathbb{Z}G$ の K 群とする。 $\mathbb{Z}G$ の class group $Cl(\mathbb{Z}G)$ を、

$$Cl(\mathbb{Z}G) = \mathrm{Ker}\,(K_0(\mathbb{Z}G) \underset{rank}{\longrightarrow} \mathbb{Z})$$

で定める。 また、$\mathbb{Z}G$ をふくむ $\mathbb{Q}G$ のひとつの maximal order を $\mathfrak{M}$ とすると、canonical inclusion $\mathbb{Z}G \hookrightarrow \mathfrak{M}$ より定まる

$$D(\mathbb{Z}G) \underset{def}{=} \mathrm{Ker}\,(Cl(\mathbb{Z}G) \to Cl(\mathfrak{M}))$$

は，αのとり方によらない。Fröhlichによるclass groupのidelicな記述がある：

$$Cl(\mathbb{Z}G) \simeq Hom_\Lambda(R_G, J(E))/Hom_\Lambda(R_G, E^\times)\,Det\,U(\mathbb{Z}G).$$

ここに，

R_G：Gの一般指標全体のなす環，

E：$\mathbb{Q}$上有限次Galoisである十分大きな体，$(\subset \mathbb{C})$

$\Lambda = Gal(E/\mathbb{Q})$,

$J(E)$：Eのidele群，

$U(\mathbb{Z}G)$：$\mathbb{Z}G$の unit idele群，すなわち $\prod_{p:素数}(\mathbb{Z}_pG)^\times \times (\mathbb{R}G)^\times$.

Detの定義については，Fröhlich [3] をみよ。

上記の同型の定める自然な homomorphism $Hom_\Lambda(R_G, J(E)) \longrightarrow Cl(\mathbb{Z}G)$ を g，また，自然な projection $Cl(\mathbb{Z}G) \to Cl(\mathbb{Z}G)/D(\mathbb{Z}G)$ を t であらわす。

§1．不変量Ω_m。

N/Kを有限次代数体のGalois拡大，$G = Gal(N/K)$とする。Sを，Nの素点の有限集合であって，すべての無限素点をふくみGの作用でstableであるものとする。$U = U(S)$をNのS-units全体のなす群とする。YをSで生成される自由$\mathbb{Z}$加群，$X = X(S) = Ker\left(\begin{array}{ccc} Y & \to & \mathbb{Z} \\ \Psi & & \Psi \\ \sum_{s\in S} a_s s & \mapsto & \sum_{s\in S} a_s \end{array}\right)$と定める。

上のような $(N/k, S)$ が次の (i), (ii) をみたすとき，tame であるという。

(i) S は，N/k で分岐するすべての素点をふくむ。

(ii) 任意の N/K の中間体 F に対して，S の下にある F の有限素点に対応する F の ideal 類全体は，F の ideal 類群を生成する。

<u>Lemma (Tate)</u>. $(N/k, S)$ は tame であるとする。このとき有限生成かつ cohomologically trivial な $\mathbb{Z}G$ 加群 A, B と exact sequence：

$$(*) \qquad 0 \to U \to A \to B \to X \to 0$$

が存在して，この exact sequence $(*)$ は，$\mathrm{Ext}^2_G(X, U)$ の canonical class にぞくする。

canonical class の定義については，Tate [5] あるいは Chinburg [1] をみよ。

有限生成 projective $\mathbb{Z}G$ 加群 P に対応する $K_0(\mathbb{Z}G)$ の元を (P) であらわすことにしよう。M を有限生成かつ cohomologically trivial な $\mathbb{Z}G$ 加群とする。このとき，

$0 \leftarrow M \leftarrow P_0 \leftarrow P_1 \leftarrow 0$，$P_0, P_1$ は projective $\mathbb{Z}G$ 加群，とあらわせ，$(P_0) - (P_1) \in K_0(\mathbb{Z}G)$ は resolution のとり方によらない。これを (M) であらわす。

以上の準備のもとで，Chinburg の結果を述べよう。

<u>Theorem 1 (Chinburg)</u>　$(N/K, S)$ は tame であるとする。上の Lemma の (*) をみたす A，B に対して，$(A)-(B)\in K_0(\mathbb{Z}G)$ は，$Cl(\mathbb{Z}G)$ にぞくし，この元は，A，B のとり方にも，S のとり方にもよらない。

上の定理で本質的なところは，"S のとり方によらない" という部分。このような $Cl(\mathbb{Z}G)$ の元を $\Omega_m(N/K)=\Omega_m$ とあらわすことにする。

また，subextension の Ω_m は，$\Omega_m(N/K)$ であらわせることも示されている。

<u>Theorem 2 (Chinburg)</u>　H を G の部分群とする。このとき，

(i) $\mathrm{res}_{G\to H}\,\Omega_m(N/K)=\Omega_m(N/N^H)$，

(ii) H が normal なら，

$$\mathrm{norm}_{G\to G/H}\,\Omega_m(N/K)=\Omega_m(N^H/K)。$$

$\mathrm{res}_{G\to H}$，$\mathrm{norm}_{G\to G/H}$ については，Fröhlich [3] をみよ。

§2. <u>Ω_m と Artin root number.</u>

$\chi\in R_G$ に対して，$W(\chi)=W(N/K,\chi)$ を Artin root number

とする。（定義等については Fröhlich [3] を見よ）。

$\chi \in R_G$ に対して，

$$W'(\chi) = \begin{cases} W(\chi) & \chi \text{ が symplectic のとき;} \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

symplectic な character については，Martinet [4] あるいは，Fröhlich [3] をみよ。とくに，symplectic な χ は real-valued であるから，$W(\chi) = \pm 1$ であることに注意せよ。

E は $\mathbb{C}$ の部分体であるとし，p_∞ を自然なうめこみ $E \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対応する E の無限素点とする。$\alpha \in \Lambda$ に対し，

p_∞^α を $|\alpha x|_{p_\infty^\alpha} = |x|_{p_\infty}$，$x \in E$，で定める。

$\mathrm{Hom}_\Lambda(R_G, J(E))$ の元 $\underline{W}'(N/k)$ を次のように定める；

$$\underline{W}'(N/K)(\chi) \text{ の } v\text{-component} = \begin{cases} W'(N/k, \chi^{\alpha^{-1}}) & v = p_\infty^\alpha, \alpha \in \Lambda, \\ 1 & v \text{ が有限素点のとき.} \end{cases}$$

ここに，$\chi \in R_G$，v は N の素点である。

さて，$\Omega_m(N/k) \pmod{D(\mathbb{Z}G)}$ の Artin root number による記述にかんする予想をのべよう。

<u>Conjecture 1</u>. $t(\Omega_m(N/k)) = t(g(\underline{W}'(N/k)))$

N/k が at most tamely ramified のときは，N の整数環 $\mathcal{O}_N$ は，$\mathbb{Z}G$-projective である。$\Omega_a = (\mathcal{O}_N) - [K:\mathbb{Q}](\mathbb{Z}G) \in Cl(\mathbb{Z}G$

とおく。 このとき，M.J.Taylor によって 等式

$$\Omega_a(N/K) = q(\underline{W}'(N/K))$$

が示されている。

予想1 に対する部分的結果については，次の§の最後の部分を見よ。

§ 3. Ω_m と L-series at $s=0$.

まず，Artin の L-函数の $s=0$ における特殊値に対する予想をかんたんに復習してみよう。(Tate[5]) $(N/k, S)$ は tame であるとする。

V を G の複素有限次元表現とし，χ_V (あるいは単に χ) をその指標としよう。$\varphi : X(S) \to U(S)$ を injective G-homomorphism とする。このとき，φ の Cokernel は，有限である。 V, φ より定まる regulator を $R(V, \varphi)$ とかく。 $L_S(V, s)$ を表現 V の L-函数より，S の下にある K の有限素点に対応する Euler 因子をとりのぞいたものとする。 $C_{V,S}$ で $L_S(V, s)$ の $s=0$ での Taylor 展開で 0 ではない最も次数の低い項の係数をあらわす。 $A(V, \varphi) = R(V, \varphi) / C_{V,S}$ とおく。

<u>Conjecture 2</u>. 任意の $\alpha \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{C}$ に対して，$A(V^\alpha, \varphi) = A(V, \varphi)^\alpha$ が成立する。

予想2が正しければ，$A(V,\varphi)$は代数的数となる。$A(V,\varphi)$によって生成されるイデアルについての予想がある。

$\mathcal{O}_E=\mathcal{O}$をEの整数環とする。G-加群 M, Cに対して，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, C\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{O})$を$C_M$と略記する。また，$C^G$, C_GでそれぞれGが自明に作用する最大の部分加群，商加群をあらわす。$\mathcal{O}$-加群Cが有限生成かつtorsionであるとき，そのorder idealを$\sigma(C)$とかく。

Mを$\mathcal{O}G$-latticeであって，$M\otimes_{\mathcal{O}}\mathbb{C}$が，Vのdualと同型であるとする。有限生成G-加群のhomomorphism $f: C\to D$のKernel, Cokernelは，ともに有限であるとする。$\mathcal{O}$イデアル

$$\sigma(\mathrm{Coker}\, n_M\circ f_M)\,/\,\sigma(\mathrm{Ker}\, n_M\circ f_M)$$

を$g_M(f)$とあらわす。ただし，

$$f_M\circ n_M\ ;\ (C_M)_G \xrightarrow{f_M} (D_M)_G \xrightarrow{n_M} (D_M)^G$$
$$x \ (\mathrm{mod}\ \sum_{\sigma\in G}(\sigma-1)D_M) \longmapsto \sum_{\sigma\in G}\sigma x$$

$g_M(f)$は$\mathcal{O}G$-lattice Mのとり方によらない。

<u>Conjecture 3</u>. $(N/k, S)$がtameならば，$A(V,\varphi)\mathcal{O}=g_M(\varphi)$.

予想2，3に関するTateの結果として，次がある。

<u>Theorem (Tate[5])</u> χ_Vが$\mathbb{Q}$-valuedならば，予想2，3は正しい。

なお予想2,3の真偽は φ に依存しない。

予想3にあらわれた $g_M(\varphi)$ は、Ω_m と以下のようにして結びつく。

$H(G)=\{b\in \mathrm{Hom}_\Lambda(R_G, \mathrm{Id}(E))$；任意の $\chi\in R_G$ に対して、$b(\chi)$ は、$\mathbb{Q}(\chi)$ のイデアル（i.e. $\mathcal{O}$-加群として、いくつかの $\mathbb{Q}(\chi)$ の元で生成される）$\}$

$P(G)=\{b\in H(G)$；すべての $\chi\in R_G$ に対して、次の(1)(2)が成立する
(1) $b(\chi)$ は $\mathbb{Q}(\chi)$ の単項イデアル、
(2) χ が symplectic ならば、$b(\chi)$ は、$\mathbb{Q}(\chi)$ のひとつの (totally) positive な元で生成される$\}$

ただし、$\mathrm{Id}(E)$ は E のイデアル全体のなす群，$\chi\in R_G$ に対して、$\mathbb{Q}(\chi)$ は、$\mathbb{Q}$ に $\chi(g), g\in G$ を添加して得られる体，とくに χ が symplectic なら $\mathbb{Q}(\chi)$ は実円分体である。

$H(G)$ は、自然な対応で、$\mathrm{Hom}_\Lambda(R_G, J(E))/\mathrm{Hom}_\Lambda(R_G, U(E))$ と同型であることに注意すると、§0 の Fröhlich による class group の idelic な記述は、次の同型を導く。

$$Cl(\mathbb{Z}G)/D(\mathbb{Z}G)\simeq H(G)/P(G).$$

$g(\varphi)\in \mathrm{Hom}(R_G, \mathrm{Id}(E))$ を次のように定める。G の既約指標 χ に対して、$g(\varphi)(\chi)=g_{M_\chi}(\varphi)$。ただし、$M_\chi$ は、$M_\chi\otimes_{\mathcal{O}}\mathbb{C}$ の character が $\overline{\chi}$ となるような $\mathcal{O}G$-lattice。

Proposition 1.(Chinburg)

(1) $g(\varphi) \in H(G)$,

(2) 上の同型で、$-\Omega_m(N/k)$ (mod $D(\mathbb{Z}G)$) は、$g(\varphi)$ (mod $P(G)$) に対応する。

予想 1, 2, 3 は、次のような関係にある。

Proposition 2. 予想 2, 3 がすべての V について正しいならば、予想 1 は、正しい。

R を generalized Ω-valued character 全体のなす R_G の部分環とする。

$H_R(G) = \{b|R \ ;\ b \in H(G)\} \subset \mathrm{Hom}(R, \mathrm{Id}(E))$,

$P_R(G) = \{b|R \ ;\ b \in P(G)\}$.

予想 2, 3 に対する Tate の部分的な結果より、予想 1 に対しても、次が成立する。

Proposition 3.

$H(G)/P(G)$ から $H_R(G)/P_R(G)$ への自然な準同型による $t(\Omega_m(N/k))$ と $t(g(\underline{W}'(N/k)))$ の像は一致する。

なお，Cent $\mathbb{Q}G = \bigoplus_{\alpha} L_\alpha$，$L_\alpha$は体，とすると，$H(G)/P(G)$
$H_R(G)/P_R(G)$は，それぞれ $\bigoplus_{\alpha}$（L_αのイデアル類群），
$\bigoplus_{\alpha}$（$L_\alpha/\mathbb{Q}$ の genus group）とほぼ一致することに留意されたい。

文献

[1] Ted Chinburg ; On the Galois structure of algebraic integers and S-units , Inv. math., 74, 321-349, 1983

[2] Ted Chinburg ; Multiplicative Galois module structure, J, London Math, Soc, (2), 29, 23-33, 1984

[3] A, Fröhlich ; Galois module structure of algebraic integers , Springer, New York, 1983

[4] J. Martinet ; Character theory and Artin L-functions, in "Algebraic Number Fields", Proceedings of the Durham Symposium 1975, Academic Press, 1977, 1-87

[5] J. Tate ; Les Conjectures de Stark sur les fonctions L d'Artin en s=0 , Birkhäuser, 1984