数理解析研究所講究録
549巻 1985年 32-40

Dihedral defect group をもつ integral block に属する p-adic lattice の分類について

都立大・理 光田 義 (Tadashi Mitsuda)

p-adic lattice の分類は、整数表現における大きな問題であるが、よく知られているように有限表現型の群は非常に少ない。例えば $\mathbb{Z}_p$ を p 進整数環とし、G を有限群とする。このとき Heller-Reiner [3] によれば $\mathbb{Z}_pG$ が有限表現型となるための必要かつ十分条件は、G の Sylow p 部分群が位数 p の巡回群 C_p か位数 p^2 の巡回群 C_{p^2} となることである。そして、$\mathbb{Z}_pC_p$ や $\mathbb{Z}_pC_{p^2}$ については、その直既約 lattice は分類されている。然し、C_p や C_{p^2} についても、その係数環によっては無限表現型となる。例えば、$\mathbb{Z}_5[\zeta_5]C_5$ は、無限表現型である (cf. [7])。そこで、群環そのものではなく、block について考えてみることにする。まず、R を $\mathbb{Z}_p$ の有限次拡大とし、G を有限群とする。このとき B が RG の (integral) block であるとは、B が RG の環としての直和因子であって両側直既約なことであった。また、$\delta(B)=D$ が B の defect groupであるとは、すべての B-lattice が (G,D)-projective であり、かつ少なくともひとつの直既約 B-lattice に対し、それの vertex になっていることであった。そうすると $\delta(B)$ は、共役を除いて一意的に定まるGの p部分群である。さて π をRの素元とし、$F=R/(\pi)$ とおき、また mod π による reduction を ─ をつけて表わすことにする。そうすると $\overline{B}$ は FGの（modular）block であり、また $\delta(B)=\delta(\overline{B})$ である。さて、（integral）block の表現型についてもその有限性の条件が知られている。Rを $\mathbb{Z}_p$ の有限次拡大とし、π をRの素元、$(p)=(\pi)^s$ とおく。そしてGを有限群とし、BをRGの block とするとき、Roggenkamp [7] によれば、Bが有限表現型となるための必要十分条件は、$\delta(B)=C_{p^m}$, $m\leq 2$ で、更に $m=2$ の時には $s=1$, $m=1$ の時には、$p>3$ なら $s\leq 2$, $p=3$ なら $s\leq 3$ となることである。従って、とくに、defect group が非巡回的であったり、たとえ巡回群でも位数が p^3 以上だと無限表現型となる。そこで defect group が C_p や C_{p^2} の時に lattice を分類することが問題となるが、Bessenrodt [1] は、Rが $\mathbb{Z}_p$ の不分岐拡大で Fが十分多くの1のべき根を含むときこのような block に属する直既約 lattice の分類を与えている。先の有限性定理によればすべての lattice を直接分類できるのは、ほとんどこの場合

に限られている。ところが一方、block の algebra としての構造に関する、Broué－Puig [2] による興味ある結果がある。つまり、G を有限群とし、$(K, R, \bar{F})$ を G の splitting p-modular system、B を RG の block で $D = \delta(B) =$ abelian で $\bar{B}$ の inertial index $= 1$ とするとき、R-algebra として $B \simeq Mat_{\ell}(RD)$ なる同型が成立つ。この結果によれば、例えば、$\delta(B) = C_{2^m}$ の時は、いつでも $B \simeq Mat_{\ell}(RC_{2^m})$ となることがわかる。上の結果は、block の構造を explicit に記述している点で重要であり、また上のような状況では、block に属する lattice の分類は p 群 の群環上の lattice の分類に帰着された。このように block に属する lattice を考察するために block の algebra としての構造を調べるということが重要な手段となる。また、defect 1 の block については Roggenkamp が [7] に於いて調べているが、そこでは、block の整環としての構造を congruence を用いて記述している。さて、先の Broué－Puig の型の結果として、Külshammer [5] は、p-可解群の p-modular block の構造を記述している。つまり、G を p 可解群とし、$\bar{F}$ を標数 p の代数閉体とするとき $\bar{F}G$ の modular block $\bar{B}$ に対し、$\bar{F}$-algebra として $\bar{B} \simeq Mat_{\ell}(\bar{F}^c\pi)$ なる同型が成立つ。但し、$\bar{F}^c\pi$ は、c を factor set とする、有限群 π の $\bar{F}$ 上の twisted group ring

である。そこで我々は、p-可解群の integral block について考察する。まず、この Külshammer の結果が integral block についても成立することを示し、その integral block に属する lattice について考える。定理1では今の Külshammer の結果の integral version を与え、定理2では $p=2$ で defect group が dihedral の時にもっと explicit な記述を与える。然し、この場合にも、block は無限表現型なので、すべての lattice を分類することは不可能である。そこで、既約 lattice つまり、剰体で tensor して単純となるような lattice のみを分類する。尚、詳しい証明は、[6]に述べられている。

<u>定理1</u>. G を p-可解群とし、(K, R, F) を G の splitting p-modular system とする。また、B を RG の block とし $\delta(B)=D$ を defect group とする。この時、D の正規部分群 P 及び $N_G(P)$ の部分群 H で、$B \simeq Mat_l(R^cH/O_{p'}(H))$ となるものが存在する。但し、$R^cH/O_{p'}(H)$ は、c を factor set とする、群 $H/O_{p'}(H)$ の R 上の twisted group ring である。

証明の outline: $|G|$ についての induction で Külshammer の議論を追いかけていく。

B の block idempotent を e とし、$N=O_{p'}(G)$ とおく。RN

の centrally primitive idempotent ε で $e\varepsilon \neq 0$ なるものをとる。$T = C_G(\varepsilon)$ とおくと RT の block idempotent f で $\varepsilon f = f$ となるものがあるのでこの f に対応する block を b とする。そうすると $\delta(b) = D$ で. $B \simeq Mat_t(b)$ となることがわかる。よって. もし $T \subsetneqq G$ なら induction の仮定によって示される。そこで $T = G$ の時が問題となるが.この時は $e = \varepsilon$ であり. また D が G の Sylow p-部分群となっていることがわかる。従って RG-加群として $B \simeq (RN\varepsilon)^{\uparrow G}$ となる。ところが $RN\varepsilon$ は極大整環なので直既約射影加群は同型を除いて唯ひとつである。これを U とする。そうすると $U^{\uparrow G}$ は B の progenerator となり. B と $E = End_{RG}(U^{\uparrow G})$ は Morita 同値で. $B \simeq End_E(U^{\uparrow G})$ となる。ところが $U^{\uparrow G}$ は自由 E-加群なので $B \simeq Mat_\ell(E)$ である。一方. $E \simeq R^c G/N$ となることがわかり. 更に. D が G の Sylow p-部分群であることなどを考えれば. $P = D \cap O_{p',p}(G)$ とおくとき $G/N \simeq N_G(P)/O_{p'}(N_G(P))$ となる。以上で証明された。

定理1.では. P 及び H が具体的に与えられていないために block の構造が完全に示されたとは言えないが $p=2$ で. D が dihedral の時には. explicit に記述することができる。つまり. 次の定理2が成立つのだが. この結果は. modular

の場合には Külshammer [5] 及び Koshitani [4] に与えられている。

<u>定理2</u>. G を 2-可解群, (K, R, F) を G の splitting 2-modular system とする。B を RG の block とし, B の defect group D は dihedral とする。この時, 次が成立つ。

(i) $|D| > 8$ の時 $B \simeq \mathrm{Mat}_{\ell}(RD)$

(ii) $|D| = 8$ の時 $B \simeq \mathrm{Mat}_{\ell}(RD)$ または $\mathrm{Mat}_{\ell}(RS_4)$

(iii) $|D| = 4$ の時 $B \simeq \mathrm{Mat}_{\ell}(RD)$ または $\mathrm{Mat}_{\ell}(RA_4)$

証明は定理1と同様に $|G|$ についての induction で行うが twisted group ring が実は通常の群環となることを示すのに少し工夫が必要である。

さて, 以下, 定理2の状況で考える。我々は, B-lattice の分類について考えていたのだが, 上の定理によれば, このためには, RD, RS_4, RA_4 上の lattice の分類を考えればよいこととなった。そこで, dihedral group の既約 lattice の分類を実行する。

$D = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^{2^{n-1}} = \tau^2 = 1,\ \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1} \rangle$ とし, K を 1の原始 2^{n-1} 乗根を含む $\mathbb{Q}_2$ の有限次拡大, R を整数環と

する。また、πを素元とし、$(2)=(\pi)^r$とおく。

まず、1次元の既約表現内の既約latticeは、同型を除いて唯ひとつしかないことは、明らかである。従って、$|D|\geqq 8$の時のみ考えればよい。この時、DのK上の既約表現は、1次元と2次元のものしかなく、我々は、2次元のものについてのみ考察すればよい。2次元の既約表現は、$2\leqq l\leqq n-1$とするとき $\chi^{(l)}: \sigma\mapsto\begin{pmatrix}\zeta & \\ & \zeta^{-1}\end{pmatrix}$, $\tau\mapsto\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}$ で与えられる。但し、ここで、ζは1の原始2^l乗根とする。この$\chi^{(l)}$内の既約latticeの同型類を決定せねばならない。そこで、次のように定義される既約lattice Lを固定する。$L=Rv_1\oplus Rv_2$, $\sigma v_1=\zeta v_1$, $\sigma v_2=\zeta^{-1}v_2$, $\tau v_1=v_2$, $\tau v_2=v_1$。そうすると、Lのfull RD-sublatticeで然もπLに含まれないものの全体が同型類の代表をなすことがわかる。従って、Lのfull sublatticeでかつD-invariantなものをすべて数えあげればよいことになる。これを実行して、次を得る。

<u>定理3.</u> $D=\langle\sigma,\tau \mid \sigma^{2^{n-1}}=\tau^2=1,\ \tau\sigma\tau^{-1}=\sigma^{-1}\rangle$ を位数2^nのdihedral groupとする($n\geqq 3$)。Kを1の原始2^{n-1}乗根を含む$\mathbb{Q}_2$の有限次拡大体、Rを整数環、πを素元、rを(2)の分岐指数とする。また、$|R/(\pi)|=2^f$とおく。$\chi^{(l)}$を $\sigma\mapsto\begin{pmatrix}\zeta & \\ & \zeta^{-1}\end{pmatrix}$, $\tau\mapsto\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}$ によって定義されるDの

K上の既約表現とする。但し、ζは1の原始2^l乗根で、$2 \leq l \leq n-1$とする。このとき$\chi^{(l)}$内の既約latticeの個数は同型を除いて $\dfrac{(2^f)^{r \cdot 2^{-l+1}}(2^f+1)-2}{2^f-1}$ である。

また、S_4, A_4については、次が成立つ。

命題 (1) Kを$\mathbb{Q}_2$の有限次拡大体、Rを整数環とし、rを2の分岐指数とする。このとき、次が成立つ。

(i) S_4のK上の2次元の既約表現内の既約latticeは、同型を除いて、唯ひとつである。

(ii) S_4のK上の3次元の既約表現内の既約latticeの個数は同型を除いて、いずれも $2r+1$ である。

(2) Kを1の原始3乗根を含む$\mathbb{Q}_2$の有限次拡大体とし、Rを整数環、rを2の分岐指数とする。このとき、A_4のK上の3次元の既約表現内の既約latticeの個数は、同型を除いて $3r^2+r+1$ である。

定理3. 命題のいずれに於いても、同型類の個数のみでなく、具体的にlatticeを構成することができる。

さて、定理2、定理3及び上の命題をあわせて次を得る。

系　定理2の仮定の下で，Bに属する既約latticeがすべて分類された。

References

[1] C. Bessenrodt: Indecomposable lattices in blocks with cyclic defect groups, Comm. Alg. 10(2) (1982) 135-170

[2] M. Broué and L. Puig: A Frobenius theorem for blocks, Inv. Math. 56 (1980) 117-128

[3] A. Heller and I. Reiner: Representations of cyclic groups in rings of integers I, II, Ann. Math. 76 (1962) 73-92, 77 (1963) 318-328

[4] S. Koshitani: A remark on blocks with dihedral defect groups in solvable groups, Math. Z. 179 (1982) 401-406

[5] B. Külshammer: On p-blocks of p-solvable groups, Comm. Alg. 9(17) (1981) 1763-1785

[6] T. Mitsuda: Irreducible lattices belonging to integral blocks with dihedral defect groups in 2-solvable groups, to appear in Comm. Alg.

[7] K. Roggenkamp: Integral representations and structure of finite group rings, Séminaire de Mathématiques Supérieurs, Université de Montréal 71 (1980)