数理解析研究所講究録
551巻 1985年 32-43

一般消去法による方程式の解法と実例

小林 英恒、藤瀬 哲朗、古川 昭夫

Hidetsune Kobayashi, Tetsuro Fujise, Akio Furukawa
(日大 理工)　(三菱総研)　(都立大、数学)

1．問題

Qを有理数体とし、$Q[x_1,x_2,\dots,x_n]$ (= Q[X] と略)をn変数のQ-係数多項式環とする。

$$f_1, f_2, \dots, f_n \in Q[x]$$

を与えたとき、連立代数方程式

$$
\begin{aligned}
f_1 &= 0,\\
f_2 &= 0,\\
&\cdots\cdots\\
f_n &= 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

を解くことが問題である。

2．解法

一般消去法によって、$f_1, \dots, f_n$ からU－終結式を求め、これを数値的な計算で得られた結果をもちいて一次因子に分解する。詳しくは[2]を参照されたい。

ここでは、概略を示す。

$$F(X_0, X_1, \dots, X_n) = X_0^{\deg(f)} f(X_1/X_0, X_2/X_0, \dots, X_n/X_0)$$

として、斉次多項式

$$F_1, F_2, \dots, F_n$$

を作り、さらに一次形式

$$L = U_0 X_0 + U_1 X_1 + \dots + U_n X_n$$

を付け加えて、n+1 個の多項式を作る。

これから、Lazard の方法 [1] によって、U－終結式 D を計算する。 理論から、D は複素数上では、一次因子に分解することが知られているので、

$$D = \prod_{j=1}^{N} (a_{0j} U_0 + a_{1j} U_1 + \dots + a_{nj} U_n)$$

となる。ただし Lazard のアルゴリズムでは、a_{0j} が 0 となる項を落とした D を求めるようになっている。実際に D を一次因子に分解するには、$U_0 = 1$ とおいて、$(1, U_1, \dots, U_n)$ を座標とするアフィン空間 C で、原点を通る直線 $t(a_1, a_2, \dots, a_n)$ を与え、D = 0 で与えられる平面達との交点を求める。すなわち、一変数代数方程式

$$D(1, ta_1, ta_2, \dots, ta_n) = 0 \qquad (2)$$

の解を $t_1, t_2, \dots, t_N$ とすると、交点は、

$$P_i : (a_1, a_2, \dots, a_n)t_i, \quad i = 1, \dots, N$$

である。

これらの交点 P_i で D = 0 の接平面

$$\frac{\partial D}{\partial U_0}(P_i)U_0 + \frac{\partial D}{\partial U_1}(P_i)U_1 + \dots + \frac{\partial D}{\partial U_n}(P_i)U_n = 0$$

の左辺が D の一次因子となる訳だが、それには次の条件が満たされなければならない。

（条件） P_i は二つ以上の超平面の交わりを通らない。

この為には、D が square free でなければならないが、周知のように、square free decomposition は G.C.Dをとることによって容易にできる。さらに square free だとしても直線が D = 0 できまるどの超平面とも交点をもつようにしなければ、D を完全に一次因子に分解することはできないが、直線を適当に高 n 回とりかえることによって、どの超平面とも交わるようにできる。

以上から、与えられた連立代数方程式（１）の解は各 $i = 1,...,N$ に対して

$$(a_1/a_0,\ a_2/a_0,\ ...,\ a_n/a_0)$$

となる。ここに $a_j = \partial D/\partial U_j(P_i)$，$j = 0,1,...,n$，とする。

３．計算の実例

プログラムは直線を与えて（２）の解を求める部分は FORTRAN で、他のＵ－終結式の計算などは REDUCE（RLISP）で書かれている。

この方法では、最初大きな行列を作り、それを Gauss の消去法で適当に消去して、適当な行、列より成る正方行列を作って、それの行列式としてＵ－終結式が求まる。

最初の行列の大きさは、

(1) f_1, f_2, f_3：３変数 $\deg(f_1)=2$, $\deg(f_2)=2$, $\deg(f_3)=2$

最初の行列は３５×５０、正方行列は８×８。

(2) f_1, f_2, f_3：３変数 $\deg(f_1)=3$, $\deg(f_2)=2$, $\deg(f_3)=2$

最初の行列は５６×８５、正方行列は１２×１２。

(3) f_1, f_2, f_3：３変数 $\deg(f_1)=3$, $\deg(f_2)=3$, $\deg(f_3)=2$

最初の行列は８４×１３１、正方行列は１８×１８。

となる。

原点が何重点となるかは、Ｕ－終結式を計算するとき REDUCE では、結果が

$$U_0^s * (........)$$

のように出されることから、U_0 のべきを見れば良い。ISIT(F , 1) は、F に一番目の解を代入したものである。従って ISIT( ) の値が大きければ、直線のとり方がおかしいか、D が square free でな

いか、あるいは何か変なことが起っているかである。なお直線がD=0の平面のうちのどれかと交わらないときは、(2)の左辺の次数が、Dの次数より小さくなることから、この直線が不適当なことが分る。計算プログラムでは、このような場合には別の直線をとり直すように計算機から要求が出るようになっている。

例　1．すべての解が示されている。

ISIT( )は、ほぼ 10^{-7} である。

例　2．直線のとり方がまずく、二平面の交わりを通っている。出された答は、おかしいのだがそれは、ISIT( )の値から分る。最初の三つの解のみ示してある。

例　3．前例において、直線をとり換えたら、うまくいくという例である。最初の二つの解のみ示してある。

例　4，5，6，7．一つの問題に対して相異る直線で解を得た結果である。例4では直線が悪く解がおかしい。

Example 1

```
X*Y**2 - Z**2;
X**2 + Y**2 - Z**2;
X*Y + Y*Z +Z*X    ;
```

```
ORIGIN IS 8-UPLE ROOT


........

X = 1.2819717

Y = (-2.4142136)

Z = (-2.7334737)

........

X = 4.5464554

Y = (-2.4142136)

Z = 5.1476873

........

X = 4.052327E-1*I + 8.57864E-2

Y = 4.142136E-1

Z =  - 1.678529E-1*I - 2.071068E-1

........

X =  - 4.052327E-1*I + 8.57864E-2

Y = 4.142136E-1

Z = 1.678529E-1*I - 2.071068E-1
```

Example 2

```
X*Y**2 - Z**2 = 0          ... F1
X**2 + Y**2 - Z**2 = 0 ... F2
X*Y + X**3 + Y**3 = 0  ... F3
```

```
LINE T*(1,0,0)

ORIGIN IS 8-UPLE ROOT

........

X = 1.69E-5*I + 2.3537494

Y =  - 1.72E-5*I - 2.0229495

Z = 0

........

X = 1.2471492*I - 1.857771E-1

Y = 5.050074E-1*I + 8.178292E-1

Z = 0

........

X = 1.2471548*I - 1.857925E-1

Y = 5.050139E-1*I + 8.178325E-1

Z = 0

........

2.32956443E-4*I + 9.63230676   ... F1

1.49146193E-4*I + 9.63246092   ... F2

 - 4.95138243E-6*I + 1.00099918E-5 ... F3

3.62629937E-1*I - 1.10704649    ... F1

3.62636073E-1*I - 1.10705587    ... F2

 - 5.90405E-6*I - 2.10440465E-5    ... F3
```

Example 3

```
X*Y**2 - Z**2 = 0      ...,F1
X**2 + Y**2 - Z**2 = 0...,F2
X*Y + X**3 + Y**3 = 0 ...,F3

LINE:  T*(1,1,1);

ORIGIN IS 8-UPLE ROOT

........

X =  - 1.247152*I - 1.857848E-1

Y =  - 5.050106E-1*I + 8.178309E-1

Z =  - 1.0658324*I + 1.701125E-1

........

X = 2.3537804

Y = (-2.0229811)

Z = 3.1036648

........

ISIT(F1,1 ) = - 5.28311102E-8*I - 1.37185143E-7

ISIT(F1,2 ) =(-6.35461574E-7)

ISIT(F2,1 ) =5.10541193E-8*I - 2.07699968E-9

ISIT(F2,2 ) =(-4.88377674E-7)

ISIT(F3,1 ) = - 1.37358485E-7*I + 1.43151596E-7

ISIT(F3,2 ) =2.00043587E-7
```

例 4

```
F1 = X**2 +Y**2 + Z**2 +3*X*Y + Y*Z +Z*X +2
F2 = 2*X**2 - Y**2 + Z**2 + X*Y - Y*Z + 3
F3 = X*Y + Y*Z + Z**2 + Z*X

 LINE:T*(1,1,0)
........

X = 5.302786E-1*I + 2.8E-5

Y = 8.837976E-1*I + 4.66E-5

Z =  - 1.0016373*I - 5.29E-5

........

X = 5.303801E-1*I + 3.06E-5

Y = 8.839668E-1*I + 5.1E-5

Z =  - 1.001829*I - 5.78E-5

........

X = 5.303316E-1*I - 5.86E-5

Y = 8.83886E-1*I - 9.77E-5

Z =  - 1.0017375*I + 1.107E-4

........

X =  - 5.302786E-1*I - 2.8E-5

Y =  - 8.837976E-1*I - 4.66E-5

Z = 1.0016373*I + 5.29E-5

........

X =  - 5.303801E-1*I - 3.06E-5

Y =  - 8.839668E-1*I - 5.1E-5

Z = 1.001829*I + 5.78E-5

........

X =  - 5.303316E-1*I + 5.86E-5

Y =  - 8.83886E-1*I + 9.77E-5

Z = 1.0017375*I - 1.107E-4

........


2.16883937E-4*I - 5.51562615E-2

2.25881E-4*I + 8.6152654E-1

5.90376834E-6*I - 5.55447676E-2
```

例 5

```
F1 := X^2 + 3*X*Y + X*Z + Y^2 + Y*Z + Z^2 + 2

F2 := 2*X^2 + X*Y - Y^2 - Y*Z + Z^2 + 3

F3 := X*Y + X*Z + Y*Z + Z^2

LINE : T*(1,1,1)

........

X = 1.1441228*I

Y = 2.700908E-1*I

Z =  - 2.700908E-1*I

........

X = 4.37016E-1*I

Y =  - 1.8512296*I

Z = 1.8512296*I

........

X = 8.838835E-1*I

Y = 5.303301E-1*I

Z =  - 8.838835E-1*I

........

X =  - 1.1441228*I

Y =  - 2.700908E-1*I

Z = 2.700908E-1*I

........

X =  - 4.37016E-1*I

Y = 1.8512296*I

Z =  - 1.8512296*I

........

X =  - 8.838835E-1*I

Y =  - 5.303301E-1*I

Z = 8.838835E-1*I

........

ISIT(F1,1) =(-1.06424957E-7)

ISIT(F2,1) = (-4.55545548E-8)

ISIT(F3,1) = 1.38777878E-17
```

例 6

```
          2                   2             2
F1 := X  + 3*X*Y + X*Z + Y  + Y*Z + Z  + 2

            2             2            2
F2 := 2*X  + X*Y - Y  - Y*Z + Z  + 3

                                2
F3 := X*Y + X*Z + Y*Z + Z

LINE: T*(2,1,1,)
........
X = 1.1441228*I
Y = 2.700908E-1*I
Z =  - 2.700908E-1*I
........
X =  - 8.838835E-1*I
Y =  - 5.303301E-1*I
Z = 8.838835E-1*I
........
X = 8.838835E-1*I
Y = 5.303301E-1*I
Z =  - 8.838835E-1*I
........
X =  - 1.1441228*I
Y =  - 2.700908E-1*I
Z = 2.700908E-1*I
........
X =  - 4.37016E-1*I
Y = 1.8512296*I
Z =  - 1.8512296*I
........
X = 4.37016E-1*I
Y =  - 1.8512296*I

 Z = 1.8512296*I
 ........

 ISIT(F1,1) = (-1.06424957E-7)
 ISIT(F2,1) = (-4.55545548E-8)
 ISIT(F3,1) = 1.38777878E-17
```

例 7

$F1 := X^2 + 3*X*Y + X*Z + Y^2 + Y*Z + Z^2 + 2$

$F2 := 2*X^2 + X*Y - Y^2 - Y*Z + Z^2 + 3$

$F3 := X*Y + X*Z + Y*Z + Z^2$

LINE: T*(3,2,1)

....

X = 1.1441228*I

Y = 2.700908E-1*I

Z = - 2.700908E-1*I

....

X = - 8.838835E-1*I

Y = - 5.303301E-1*I

Z = 8.838835E-1*I

....

X = 8.838835E-1*I

Y = 5.303301E-1*I

Z = - 8.838835E-1*I

....

X = - 1.1441228*I

Y = - 2.700908E-1*I

Z = 2.700908E-1*I

....

X = 4.37016E-1*I

Y = - 1.8512296*I

Z = 1.8512296*I

....

X = - 4.37016E-1*I

Y = 1.8512296*I

Z = - 1.8512296*I

....

ISIT(F1,1) = (-1.06424957E-7)

ISIT(F2,1) = (-4.55545548E-8)

ISIT(F3,1) = 1.38777878E-17

REFERENCES

[1] Lazard,D.,Resolution des systemes d'equations algebriques, Theoretical Computer Science 15 (1981) 77-110.

[2] Fujise,T. ,Kobayashi,H. & Furukawa, A. , Solving algebraic equations by general elimination method, submitted to Journ. of Symbolic Computation