

Sofic System と Sofic 測度

九大理 藤原雅子 (Masako Fujiwara)

九大教養 浜地敏弘 (Toshihiro Hamachi)

九大教養 押川元重 (Motosige Osikawa)

Sofic System の研究は多くの研究者 ([1] ~ [22]) によって集中的に熱気をもって現在進行中である。作用素環論との関連からすれば Sofic System からつくられる C^* -環の研究が考えられるが、この面での研究成果はまだみられない。ここでは、Sofic System の定義を紹介したあとで、Markov 測度よりも広いクラスである Sofic 測度を定義してその基本性質を論じる。

1. Sofic System の定義

有限集合 A の両側無限直積集合 $A^{\mathbb{Z}}$ を考える。 $A^{\mathbb{Z}}$ の元 $a = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ に対して、 $\sigma a = (a_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ とすれば、 σ は $A^{\mathbb{Z}}$ から $A^{\mathbb{Z}}$ の上への 1 対 1 写像である。 σ を Shift という。 $A^{\mathbb{Z}}$ に集合 A 上の離散位相の無限直積位相を考え

る。この位相のもとで Shift σ および σ^{-1} は連続となる。

$A^{\mathbb{Z}}$ の閉部分集合 X で Shift 不変 ($\sigma X = X$) なものを Subshift という。Subshift X にはその上の変換として, Shift σ を考える。

Subshift の1つのクラスが Topological Markov Chain であり, さらにそれを含むクラスが Subshift of Finite Type である。実は, Subshift of Finite Type は Topological Markov Chain と同型だから, 同型の意味ではこれら2つのクラスは同じである。Sofic System は Subshift of Finite Type を含む真に (同型の意味でも) ないクラスである。Sofic System の定義の仕方はいろいろあるが, Sofic System の諸側面をみるために, 以下に互に同値な定義を5つあげることにする。

(1) 弧に名前がつけられた有向グラフによる定義

有限集合 S を端点集合とする有向グラフを考え, その各弧には有限集合 A の元が対応しているものとする。 S の両側無限直積集合 $S^{\mathbb{Z}}$ の元 $s = (s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ で, 各 $i \in \mathbb{Z}$ について, s_i を始点とし, s_{i+1} を終点とする弧が存在するものを考える。 s_i を始点とし, s_{i+1} を終点とする弧の1つの名前 (その弧に対応する A の元) を a_i とすると, $a = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ は $A^{\mathbb{Z}}$ の元である。このようにしてできる $a = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ の

全体を X とすると, X は $A^{\mathbb{Z}}$ の Subshift である。 X を弧に名前がつけられた有向グラフが定める Sofic System という。

(2) Topological Markov Chain の 1-block map による像としての定義

有限集合 B から有限集合 A への写像 φ に対して, $B^{\mathbb{Z}}$ から $A^{\mathbb{Z}}$ への写像 Φ を $\Phi u = (\varphi(u_i))_{i \in \mathbb{Z}}$, $u = (u_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in B^{\mathbb{Z}}$ で定義する。 Φ を $B^{\mathbb{Z}}$ から $A^{\mathbb{Z}}$ への 1-block map という。 $Y \subset B^{\mathbb{Z}}$ を Topological Markov Chain とするとき, 1-block map Φ による像 $\Phi(Y)$ を X とすると, X は $A^{\mathbb{Z}}$ の Subshift である。 X を Topological Markov Chain Y と 1-block map Φ が定める Sofic System という。

(3) 非負行列による定義

$P(a)$, $a \in A$ を有限集合 A をパラメータ集合とする $R \times R$ 非負行列の集合とする。 ($R < \infty$)。 $A^{\mathbb{Z}}$ の元 $a = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ で, 任意の $n, m \in \mathbb{Z}$ ($n < m$) について, $P(a_n)P(a_{n+1}) \cdots P(a_{m-1})P(a_m)$ が零行列でないようなものの全体を X とすると, X は $A^{\mathbb{Z}}$ の Subshift である。 X を $P(a)$, $a \in X$ が定める Sofic System という。

(4) 有限半群による定義

G を有限集合 A を生成元集合とする有限半群で, G の任意の元 g に対して $ge = eg = e$ をみたす G の元 e が存在するようなものとする。 $A^{\mathbb{Z}}$ の元 $a = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ で, 任意の $n, m \in \mathbb{Z}$ ($n < m$) について, $a_n a_{n+1} \cdots a_{m-1} a_m \neq e$ をみたすものの全体を X とすると, X は $A^{\mathbb{Z}}$ の Subshift である。 X を有限半群 G が定める Sofic System という。

(5) Shift 不変な閉集合の特長づけによる定義

$A^{\mathbb{Z}}$ の Subshift を X とする。 $A^{\mathbb{Z}-\mathbb{N}}$ の元 $a^- = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}-\mathbb{N}}$ で, $L_{a^-} = \{ a^+ = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} ; (a^-, a^+) \in X \} \neq \emptyset$ となるものの全体を X^- とする。 X^- の2つの元 a^-, b^- について, $L_{a^-} = L_{b^-}$ かなりたつとき, 同値 $a^- \sim b^-$ であるという。 同値類 $X^- / \sim$ が有限集合となるとき, X を Sofic System という。

2. Sofic 測度

A も高々可算集合とする。 $f(a_1, a_2, \dots, a_n), (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^n$ は, $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 0$ および

$$\sum_{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^n} f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$$

をみたすものとする。

また, $P(a_1, a_2, \dots, a_n ; a_{n+1}), (a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) \in A^{n+1}$ は

$$P(a_1, a_2, \dots, a_n ; a_{n+1}) \geq 0 \quad \text{および}$$

$$\sum_{a_{n+1} \in A} P(a_1, a_2, \dots, a_n; a_{n+1}) = 1, \quad (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^n$$

をみたすものとする。無限直積集合 $A^{\mathbb{Z}}$ の cylinder 集合

$$[a_1, a_2, \dots, a_\ell] = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}; x_i = a_i, i=1, 2, \dots, \ell\}$$

($\ell \geq n$) に対して,

$$\mu([a_1, a_2, \dots, a_n]) = \varphi(a_1, a_2, \dots, a_n) P(a_1, a_2, \dots, a_n; a_{n+1})$$

$$\times P(a_2, a_3, \dots, a_{n+1}; a_{n+2}) \times \dots \times P(a_{\ell-n}, a_{\ell-n+1}, \dots, a_{\ell-1}; a_\ell)$$

とおくと, μ は $A^{\mathbb{N}}$ 上の確率測度に拡張できる。拡張してえられる測度 μ を $A^{\mathbb{N}}$ 上の n 重 Markov 測度という。特に $n=1$ のとき, 単に Markov 測度という。

A を高々可算集合とする。 φ を $l \times l$ 確率行列とする。
($l \leq \infty$)。また, $P(a), a \in A$ を $l \times l$ 非負行列の集合で, $P = \sum_{a \in A} P(a)$ が $l \times l$ 確率行列となるものとする。

$A^{\mathbb{N}}$ の cylinder 集合 $[a_1, a_2, \dots, a_\ell]$ に対して,

$$\mu([a_1, a_2, \dots, a_\ell]) = \varphi P(a_1) P(a_2) \dots P(a_{\ell-1}) P(a_\ell) \mathbb{I}$$

とする。但し, $\mathbb{I}$ は全ての成分が 1 である $l \times 1$ 行列とする。

μ は $A^{\mathbb{N}}$ 上の確率測度に拡張できる。拡張してえられる測度 μ を $A^{\mathbb{N}}$ 上の Sofic 測度という。

定理

n 重 Markov 測度は Sofic 測度である。

証明

$g(a_1, a_2, \dots, a_n)$ および $P(a_1, a_2, \dots, a_n; a_{n+1})$ から定まる n 重 Markov 測度を μ とする。 $a \in A$ に対して,

$$P(a)_{(a_1, a_2, \dots, a_n), (e_1, e_2, \dots, e_n)} = \delta_{(a_1, a_2, \dots, a_n), (a, e_1, e_2, \dots, e_{n-1})} \times P(a_1, a_2, \dots, a_n; e_n)$$

とおくと, g および $P(a)$, $a \in A$ から定まる Sofic 測度は μ と一致する。 //

定理

μ が Sofic 測度であるための必要十分条件は, μ が Markov 測度の 1-block map による像測度となることである。

証明

十分性: $g(e)$ および $P(e_1; e_2)$ から定まる B^N 上の Markov 測度を ν とする。写像 $\varphi: B \rightarrow A$ が定める B^N から A^N への 1-block map を Φ とする。

$$P(a)_{e_1, e_2} = \delta_{\varphi(e_1), a} P(e_1; e_2), \quad e_1, e_2 \in B, a \in A$$

とおくと, g および $P(a)$, $a \in A$ から定まる A^N 上の Sofic 測度 μ に対して,

$$\mu([a_1, a_2, \dots, a_\ell]) = \nu(\Phi^{-1}([a_1, a_2, \dots, a_\ell]))$$

$$a_1, a_2, \dots, a_\ell \in A$$

がなりたつ。

必要性: g および $P(a)$, $a \in A$ から定まる Sofic

測度を μ とする。 $B = \{ (i, a, j) ; P(a)_{i,j} > 0 \}$ として, 写像 $\varphi : B \rightarrow A$ を $\varphi(i, a, j) = a$ で定める。また, φ が定める $B^{\mathbb{N}}$ から $A^{\mathbb{N}}$ への 1-block map を Φ とする。 $g(i, a, j) = g(i) P(a)_{i,j}$ および

$P(i, a, j), (j, a', j') = \delta_{j,j'} P(a)_{i,j}$ とおき, g および P から定まる Markov 測度を μ とすると,

$$\mu([a_1, a_2, \dots, a_\ell]) = \nu(\Phi^{-1}[a_1, a_2, \dots, a_\ell])$$

$$a_1, a_2, \dots, a_\ell \in A$$

かなりたつ。 //

g および $P(a), a \in A$ が定める $A^{\mathbb{N}}$ 上の Sofic 測度は, $gP = g$ (但し $P = \sum_{a \in A} P(a)$) をみたすとき, Shift 不変となる。このような g および $P(a), a \in A$ に対しては, 両側無限直積集合 $A^{\mathbb{Z}}$ 上の Sofic 測度が定義できて, これもまた Shift 不変である。Sofic System の平衡測度 (即ち, Shift 不変な確率測度で, その測度に関する metrical entropy が topological entropy に一致するもの) は Sofic 測度であることを示すことができる。

Sofic System 文献

- [1] M. Boyle : Topological Orbit Equivalence and Factor Maps in Symbolic Dynamics. Preprint
- [2] M. Boyle : Lower Entropy factors of Sofic Systems. Preprint.
- [3] M. Boyle, B. Kitchens and B. Marcus : Minimal Covers for Sofic Systems. Preprint.
- [4] M. Boyle and S. Tuncel : Infinite-to-one Codes and Markov Measures. Preprint.
- [5] E. Coven and M. Paul : Sofic Systems. Israel J. Math. 20 (1975) 165-177.
- [6] E. Coven and M. Paul : Finite Procedure for Sofic Systems. Monats. Math. 83 (1977) 265-278.
- [7] R. Fisher : Sofic Systems and Graphs. Monats. Math. 80 (1975) 179-186.
- [8] R. Fisher : Graphs and Symbolic Dynamics. Collog. Math. Soc. János Bolyai, Topics in Info. Theory (1975).
- [9] B. Kitchens : Continuity Properties of Factor Maps in Ergodic Theory. Ph. D. Thesis Univ. North Carolina, (1981),
- [10] B. Kitchens : An Invariant for Continuous Factors of Markov Shifts. Proc. A.M.S. 83 (1981) 825-828.

- [11] B. Kitchens and S. Tuncel : Semigroups and Graphs for Sofic Systems. Preprint.
- [12] B. Kitchens and S. Tuncel : Finitary Measures for Subshifts of Finite Type and Sofic Systems. Preprint.
- [13] W. Krieger : On Sofic Systems I.
- [14] B. Marcus : Factors and Extensions of Full Shifts. Monats. Math. 88 (1979) 239-247.
- [15] B. Marcus : Sofic Systems and Encoding Data.
- [16] M. Nasu : Uniformly Finite-to-one and onto Extensions of Homomorphisms between Strongly Connected Graphs. Discrete Math. 39 (1982) 171-197.
- [17] M. Nasu : An Invariant for Bounded-to-one Factor Maps between Transitive Sofic Subshifts.
- [18] M. Nasu : Constant-to-one and onto Global Maps of Homomorphisms between Strongly Connected Graphs.
- [19] M. Nasu : Nonnegative Matrix Systems and Sofic Systems.
- [20] M. Nasu : Topological Conjugacy for Sofic Systems.
- [21] W. Parry : A Finitary Classification of Topological Markov Chains and Sofic Systems. Math. System

Theory 3 (1977) 86-92.

[22] B. Weiss : Subshifts of Finite type and Sofic Systems. Monats. Math. 177 (1973) 462-474.