数理解析研究所講究録
552巻 1985年 43-48

von Neumann環のmaximal abelian subalgebrasへのnormalなノルム1のprojectionの存在について

新潟大理 富山 淳 (Jun Tomiyama)

Mをvon Neumann環でヒルベルト空間Hに作用しているものとする。H上の有界線形作用素の全体を$B(H)$とかく。Aを今Mのmaximal abelian subalgebra(以下略してmasaとかくことにする)としMの元xについて、xをAのunitary uの作用$\mathrm{ad}u(x) = uxu^*$で動かしたもののσ-weakly closedなconvex hullを$\overline{\mathrm{co}}\{\mathrm{ad}u(x) \mid u \in A_u\}$とかくことにすると、よく知られたKakutani-Markovの不動点定理から$\overline{\mathrm{co}}\{\mathrm{ad}u(x) \mid u \in A_u\}$(以下時には略して$\overline{\mathrm{co}}\{\mathrm{ad}u(x)\}$とかくこともある)は不動点をもつ。そして$A$がmasaなことから、この不動点は$A$に属する。即ち任意の$x \in M$について

$$\overline{\mathrm{co}}\{\mathrm{ad}u(x) \mid u \in A_u\} \cap A \neq \phi.$$

このようなときMからAへのノルム1のprojection $\mathcal{E}$で$\mathcal{E}(x)$が上の集合に属するようなものがあることはよく知られている。又それは更に精密化して任意の有限個の$x_1, x_2, \cdots x_n$に対し

て $y_i \in \overline{\mathrm{cov}}\{ad\,u(x_i)\} \cap A$ を指定して $\mathcal{E}(x_i) = y_i$ $(i=1,2,\cdots n)$ となるようにとることもできる。ここで今 A へ normal な projection が存在したとすると、$\mathcal{E}(\overline{\mathrm{cov}}\{ad\,u(x)\}) = \mathcal{E}(x)$ となるから

$$\overline{\mathrm{cov}}\{ad\,u(x)\} \cap A = \{\mathcal{E}(x)\} \quad (一点のみ)$$

となる。たとえば H が可分なとき B(H) には discrete な型の masa と連続型の masa が存在するが B(H) より前者の型の masa には normal な projection が存在する。このような事柄は A の pure state の M 上への pure state extension の一意性に密接に関係している。もし A から M への pure state extension がすべて一意であれば、M より A へのノルム 1 の projection は唯1つしかないことになるから分論上の共通部分は一点になる。又共通部分が一点とは限らない M の元 x が存在すれば M より A へは既にのべたことから少くとも 2 つ以上の projection が存在するから A の pure state の M 上への拡大は一意とは限らなくなる。実際 Kadison-Singer [1] はその先駆的な仕事でよくなるようにして B(H) の連続型の masa の pure state の pure state extension (実は state extension でよい) は一意ではないことを示している。ちなみに B(H) の discrete masa の pure state extension については、その上の normal な pure state の拡大は一意であるが singular な pure state の拡大に

ついてはいまだに未解決になっている。

さてここで述とようというのは実は上の逆である。$\overline{co}\{aduu^*\}$ と masa A との共通部分が常に一点のとき x にこの交点を対応させる projection が normal になるのではないかということは大分前から予想されていたが([3]) 解答が判明しなかった。

しかし問題は最近の次の Szücs の結果によって肯定的に(空間が可分なときには)解決されることになった。

Mを可分なヒルベルト空間上の von Neumann 環とする。

GをM上の σ-weakly continuous な線形写像の有界な半群とし、更に次の条件(*)をみたすとする。

(*) 任意のMの元 x について、$\overline{co}\{g(x) \mid g \in G\}$ は唯1つの不動点をもつ。

定理(J. M. Szücs) 上の(*)の仮定の下で写像

$$\varepsilon_G : x \in M \longrightarrow \text{不動点 } x^G$$

は σ-weakly に連続な有界な projection である。また ε_G は G の元の convex sum の列の σ-weak な極限としてかける。

2つの von Neumann 環 M, N の間の有界写像(線形)では、任意の functional $\varphi \in N_*$ について ${}^t\tau(\varphi) \in M_*^\perp$ (singular な functional のつくる M^* の部分空間) となるとき singular な写像と

呼ばれている．τがσ-weak位相で連続というのは，それに対して ${}^{t}\tau(N_*)\subset M_*$ ということであるから，singularな写像というのは単にσ-weaklyに連続にならないばかりではなく，そのあらゆる連続性の"部分"を全然持っていない写像だといえる．

さてHが可分で無限次元のときB(H)より連続型のmasaへのノルム1のprojectionはすべてsingularなことはよく知られている．従って前述のKadison-Singerの結果の連続型のmasaについての部分は又次のようにも導びける．即ち上の定理から このときには $\overline{\mathrm{co}}\nu(\mathrm{ad}\,u(x))\cap A$ が二点以上になるB(H)の元xが必ず存在する．よってB(H)よりAへのprojectionは必ず2つ以上存在するから pure stateの拡大は一意ではない．この結論は実は任意のproperly infiniteなvon Neumann環Mについて意味をもつ．というのは，このようなMの中には必ずその上へのノルム1のprojectionがsingularになるような，B(H)での連続型に相応するようなmasaが数多く存在するからである．

そしてこれらのmasaよりM上へのpure stateのpure state extensionは一意ではない．([4]参照)．

最後に定理の証明の鍵になる点をのべておく．

1° Hの可分性は，Gに各点σ-weak収束で位相を入れると，Gが可分になることに使われる．それはGをM_*に作用する半群とみたものをG_*とすると，Hの可分性からM_*はノルム位相で

可分になっていることからG_*は各点ノルム収束の位相で可分になる。従ってGは前述の位相で可分になる。

2° ε_GがGからの可算列で近似できること。1°からGを可算な半群と考えてもよいことになるので、$G=\{g_1, g_2, g_3, \cdots\}$とおくと求める近似列は

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n^n}\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n=1}^{n} g^{i_1}\cdot g^{i_2}\cdots g^{i_n} \quad (n=1,2,3\cdots)$$

で与えられる。ここでMの有界閉球はσ-weak位相でmetrizable compactであるから、$\varepsilon_n(x)$が任意の元xについてx^Gにσ-weakに収束することを示すには任意の部分列$\{\varepsilon_{n_k}(x)\}$がx^Gに収束する部分列を含むことを言えばよい。そこでこの部分列$\{\varepsilon_{n_k}(x)\}$は上のcompact性よりとにかくその極限が$\overline{\mathrm{cov}}(g(x))$に入っている収束部分列をもつわけであるから、その極限がGの不動点であることを示せばよく、その証明に上のε_nの形が利用される。Gの有界性もここで用いる。

3° ε_Gがnormalなこと。ε_nをM_*に作用する写像と考えたものをε_{n_*}とかくと、$x\in M$について

$$(\varepsilon_{n_*}-\varepsilon_{m_*})(\varphi)(x) = \varphi((\varepsilon_n-\varepsilon_m)(x)) \to 0 \qquad n, m\to\infty$$

よって$\{\varepsilon_{n_*}(\varphi)\}$は$M_*$のweakly Cauchy列である。$M_*$はweakly sequentially completeであるから$\{\varepsilon_{n_*}\}$の極限の写像πが得られる。これからπはM_*の有界写像であり、$\varepsilon={}^t\pi$は有界

で normal な G−不動点の集合への projection になる.

参考文献

1. R. V. Kadison and I. M. Singer, Extensions of pure states, Amer. J. Math., 81 (1959), 383-400.
2. J. M. Szücs, Some weak $*$-ergodic theorems, Acta Sci. Math., 45 (1983), 389-394
3. J. Tomiyama, Tensor products and projections of norm one in von Neumann algebras, Mimeographic Note, 1970, Univ. Copenhagen.
4. J. Tomiyama, On some types of maximal abelian subalgebras, J. Functional Analysis, 10 (1972), 373-386.