数理解析研究所講究録
553巻 1985年 1-20

$y''(x)=f(x)$, $y(-1)=y(1)=0$ の最適な数値積分公式について。

名古屋大学工学部 杉浦 洋 (Hirosi Sugiura)

0. はじめに

$[-1,1]$ における微分方程式

$$y''(x)=f(x) \quad , \quad y(-1)=y(1)=0 \qquad \text{———} (0-1)$$

の多項式補間に基づく解法について述べる。

上の解は Green 関数を使って表現すると

$$y(x)=Gf(x):=\int_{-1}^{1} g(x,t)f(t)\,dt \qquad \text{———} (0-2)$$

$$g(x,t):=\frac{1}{2}\begin{cases}(x+1)(t-1) & t\geq x\\ (x-1)(t+1) & t<x\end{cases} \qquad \text{———} (0-3)$$

さて，標本点 $-1\leq\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_n\leq 1$ をとり，

$$\begin{cases} \varphi_n(x):=\prod_{i=1}^{n}(x-\xi_i) & \text{———} (0-4)\\ l_i(x):=\varphi_n(x)/\{\varphi_n'(\xi_i)(x-\xi_i)\} & \text{———} (0-5)\\ S_i(x):=G\,l_i(x) & \text{———} (0-6)\end{cases}$$

により G の近似作用素 G_n を次式で定義する。

$$G_n f(x):=G\left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)l_i\right)(x)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)S_i(x) \qquad \text{———} (0-7)$$

明らかに

$$(G_n f)''(\xi_i) = f(\xi_i) = (Gf)''(\xi_i) \qquad 1 \le i \le n \qquad \text{———} (0-8)$$

$$G_n f(-1) = 0 = Gf(-1),\ G_n f(1) = 0 = Gf(1) \qquad \text{———} (0-9)$$

であるから $G_n f$ は Gf に対する一種の lacunary 補間である。[1)]
又，この問題は二点境界値問題

$$y''(x) = f(x, y, y'') \ ,\ y(-1) = y(1) = 0 \qquad \text{———} (0-10)$$

の選点法による数値解法の一部を成すものである。
そこで我々の興味は，その精度特に標本点上における精度と数値的な安定性である。

まず，特定の標本点配置について標本点上における精度が高い事を示す。 表題の最適公式とは，その様な標本点に基づく近似作用素 G_n のことである。

次に Jacobi 多項式 $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$,$(1<\alpha<3)$ の0点を標本点とした近似作用素 G_n の数値的な安定性を示す。 即ち，上の条件で α を固定した時できる近似作用素列 $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ において $\|G_n\|_\infty$ が一様有界である事を具体的に上界を与える事により証明する。この事は Lagrange 補間の不安定性とは対照的である。 これは，G が比較的安定な作用素であることにもよるが，適切な標本点配置をとることも重要である。 この事を示す為に，最後に等間隔標本点を採用すれば $\|G_n\|_\infty$ が急激に増大する事を示す。

1. 標本点上における近似次数

[定義 1-1]

任意の m 次多項式 f について

$$G_m f(\xi_i) = G f(\xi_i) \qquad 1 \le i \le n \qquad \text{——(1-1)}$$

が成立する時，G_m を標本点上で m 次の近似作用素と呼ぶ。

(0-7) で定義した G_m は一般には標本点上で $(n-1)$ 次であるが，

[定理 1-1]（標本点上 n 次の近似作用素の存在）

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} A_1 P_n^{(1,1)}(x) & \text{——(1-2)} \\ \text{or } A_2 P_n^{(1,1)}\left(\frac{1+\zeta_n}{2}x - \frac{1-\zeta_n}{2}\right) & \text{——(1-3)} \\ \text{or } A_3 P_n^{(1,1)}\left(\frac{1+\zeta_n}{2}x + \frac{1-\zeta_n}{2}\right) & \text{——(1-4)} \\ \text{or } A_4 P_n^{(1,1)}(\zeta_n x) \qquad (n \ge 2 \text{ の時のみ}) & \text{——(1-5)} \end{cases}$$

ならば，又その時に限り G_n は標本点上 n 次である。

ここで $P_n^{(1,1)}(x)$ は Jacobi 多項式，ζ_n はその最大の 0 点である。

又、A_i は右辺の最高次係数を 1 とする様な定数である。

《証明》

〈1〉上の標本点配置が必要である事

$$\Phi_n(x) = G\varphi_n(x) \qquad \text{——(1-6)}$$

とすると $\varphi_n(x)$ は n 次多項式だから G_n が n 次なら

$$\Phi_n(\xi_i) = G_n\varphi_n(\xi_i) = \sum_{j=0}^{n} \varphi_n(\xi_j) S_j(\xi_i) = 0 \qquad 1 \le i \le n \qquad \text{——(1-7)}$$

故に $\Phi_n(x)$ は $\varphi_n(x)$ で割り切れる。　又，$\Phi_n(x)$ は $n+2$ 次だから

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}(x-\eta_0)(x-\eta_1)\varphi_n(x) \qquad \text{——(1-8)}$$

ここで η_0, η_1 は複素数である。

(イ) $\eta_0 \neq \eta_1$ のとき

$\alpha=(\eta_1-\eta_0)/2$, $\beta=(\eta_1+\eta_0)/2$ として

$$\Phi_n(\alpha w+\beta)=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\alpha^2(w^2-1)\varphi_n(\alpha w+\beta) \qquad (1-9)$$

両辺を2回微分して

$$\alpha^2\Phi_n''(\alpha w+\beta)=\frac{d^2}{dw^2}\left[\frac{\alpha^2}{(n+1)(n+2)}(w^2-1)\varphi_n(\alpha w+\beta)\right] \qquad (1-10)$$

$\Phi_n''=\varphi_n$ を代入して整理すれば

$$(w^2-1)\alpha^2\varphi_n''(\alpha w+\beta)+4w\alpha\varphi_n'(\alpha w+\beta)-n(n+3)\varphi_n(\alpha w+\beta)=0 \qquad (1-11)$$

これと $P_n^{(1,1)}(x)$ を定義する微分方程式

$$(x^2-1)f''(x)+4xf'(x)-n(n+3)f(x)=0 \qquad (1-12)$$

とを比較することにより

$$A\varphi_n(\alpha w+\beta)=P_n^{(1,1)}(w) \qquad (1-13)$$

(ロ) $\eta_0=\eta_1$ のとき

$\alpha=1$, $\beta=\eta_0$ として(イ)と同様に

$$A\varphi_n(w+\eta_0)=w^n \qquad (1-14)$$

しかるに，$\varphi_n(x)$は重根を持たないから(イ)のみを考えればよい。

(1-8)に(1-12)を代入し，$B=A^{-1}/(n+1)(n+2)$ とすれば

$$\Phi_n(\alpha w+\beta)=B(w^2-1)P_n^{(1,1)}(w) \qquad (1-15)$$

故に $\Phi_n(x)$ の根の配置は $(x^2-1)P_n^{(1,1)}(x)$ のそれと幾何的に相似である。 $\Phi_n(-1)=\Phi_n(1)=0$ と $\varphi_n(x)$ の根 ξ_i がすべて $[-1,1]$ 区間にある事から，$-1, 1$ と $\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ η_0, η_1 の配置は図1-1の4通りとなる。

これらはそれぞれ(1-2),(1-3),(1-4),(1-5)式に対応する。又，$n=1$ の時は，$\xi_1=\xi_n$ だから④が無くなって3通りである。

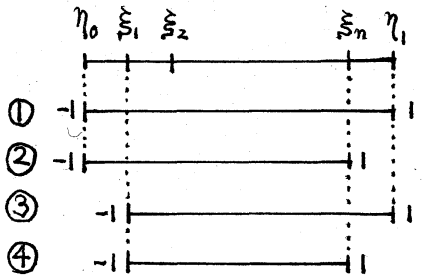

図1-1 最適標本点配置

〈2〉 $\varphi_n(x)$ が定理の条件を満せば十分である事。

任意の n 次多項式 $f(x)$ は，

$$f(x) = a_n \varphi_n(x) + \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, l_i(x) \qquad (1\text{-}16)$$

と書ける。ここで a_n は f の n 次係数。故に

$$Gf(x) = G\varphi_n(x) + \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\, S_j(x) \qquad (1\text{-}17)$$

であるが，φ_n は，(1-6),(1-7)式を満すから，

$$Gf(\xi_i) = \Phi_n(\xi_i) + \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) S_j(\xi_i)$$

$$= 0 \quad + \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) S_j(\xi_i) = G_n f(\xi_i) \qquad (1\text{-}18)$$

《証明終》

定義1-1の次数の概念は形式的である。それが精度にどの様に反映するかについては3章に述べる。

(1-2)は最良近似作用素の中にJacobi多項式の0点を標本点とするものが含まれている事を示している。

2. 近似作用素のノルムの有界性

まず，一般的な下限に関する定理を述べる。

[定理 2-1]

(0-7) で定義された G_n について

$$\|G_n\|_\infty \geq 1/2 \qquad (2\text{-}1)$$

《証明》

G_n は $n-1$ 次であるから

$$(G_n 1)(x) = (G1)(x) = (x^2-1)/2 \qquad (2\text{-}2)$$

故に

$$\|G_n\|_\infty \geq \|G_n 1\|_\infty = 1/2 \qquad (2\text{-}3)$$

《証明終》

最良近似作用素を含む一連の Jacobi 多項式の 0 点を標本点とする近似作用素については，

[定理 2-2]

$\{\xi_i\}_{i=1}^n$ が Jacobi 多項式 $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ $(-1<\alpha<2)$ の 0 点なら

$$\|G_n\|_\infty \leq \Lambda(\alpha) := \sqrt{\frac{1}{4(1-\alpha)}\left\{\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(3-\alpha)}{\Gamma(\frac{5}{2}-\alpha)}-2\right\}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\frac{3}{2}+\alpha)}} \qquad (2\text{-}4)$$

代表的な α について $\Lambda(\alpha)$ の値を計算したものを表 2-1 に示す。標本点は上から順に第一種 Chebyshev 多項式，Legendre 多項式，第二種 Chebyshev 多項式の 0 点及び最良近似作用素 (1-2) の標本点に対応する。図 2-1 に $\Lambda(\alpha)$ のグラフ

表 2-1 代表的な α に対する $\Lambda(\alpha)$.

α	$\Lambda(\alpha)$
-0.5	0.7035…
0.0	0.5773…
0.5	0.5289…
1.0	0.5074…

を示す。

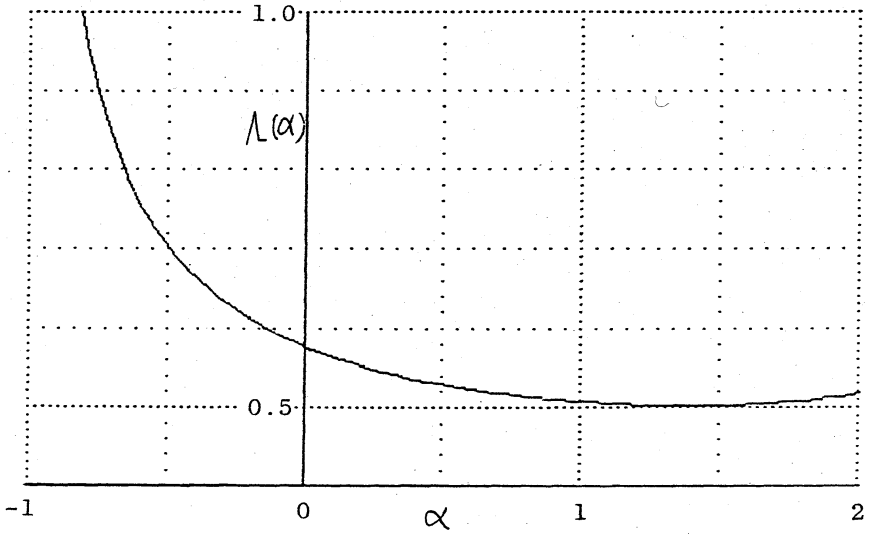

図2 $\|G_n\|_\infty$ の上界 $\Lambda(\alpha)$

(2-1) より $\|G_n\|_\infty \geq 0.5$ であるから，特に $-0.5<\alpha<2$ においては，$\Lambda(\alpha)$ は $\|G_n\|_\infty$ に近い上界を与えている。

《定理 2-2 の証明》

$$\|G_n\|_\infty = \max_{|x|\leq 1} \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \left| \int_{-1}^{1} g(x,t) \left\{ \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) l_i(t) \right\} dt \right.$$

$$= \max_{|x|\leq 1} \max_{|e_i|\leq 1} \left| \int_{-1}^{1} g(x,t) \left\{ \sum_{i=1}^{n} e_i l_i(t) \right\} dt \right. \qquad (2\text{-}5)$$

Schwarz の不等式より

$$\left| \int_{-1}^{1} g(x,t) \left\{ \sum_{i=1}^{n} e_i l_i(t) \right\} dt \right|^2$$

$$\leq \int_{-1}^{1} \frac{g^2(x,t)}{(1-t^2)^\alpha} dt \int_{-1}^{1} (1-t)^\alpha \sum_{i,j=1}^{n} e_i e_j l_i(t) l_j(t)\, dt \qquad (2\text{-}6)$$

重み $(1-t^2)^\alpha$ の n 点 Gauss-Jacobi 積分則の分点は $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ と一致するからそれに対応する重みを $\{w_i\}_{i=1}^n$ とすると，

$l_i(t) l_j(t)$ は $2n-2$ 次の多項式故，

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha} l_i(t) l_j(t) = \sum_{k=1}^{n} w_k l_i(\xi_k) l_j(\xi_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} w_k \delta_{ik} \delta_{jk} = w_i \delta_{ij} \qquad \text{———} (2\text{-}7)$$

故に (2-6) の第二因子

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha} \sum_{i,j=1}^{n} e_i e_j l_i(t) l_j(t)\, dt = \sum_{i,j=1}^{n} e_i e_j w_i \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 w_i$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} w_i = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha} dt \qquad \text{———} (2\text{-}8)$$

第一因子を評価する為に

$$f(x) = 4\int_{-1}^{1} g^2(x,t)(1-t^2)^{-\alpha} dt$$

$$= (1-x)^2 \int_{-1}^{x}(1+t)^2(1-t^2)^{-\alpha} dt + (1+x)^2 \int_{x}^{1}(1-t)^2(1-t^2)^{-\alpha} dt \qquad \text{—} (2\text{-}9)$$

と置くと，

$$f'(x) = -2(1-x)\int_{-1}^{x}(1+t)^2(1-t^2)^{-\alpha} dt + 2(1+x)\int_{x}^{1}(1-t)^2(1-t^2)^{-\alpha} dt \qquad \text{—} (2\text{-}10)$$

$$f''(x) = -4(1-x^2)^{-\alpha+1} + 2\int_{-1}^{x}(1+t)^2(1-t^2)^{-\alpha} dt + 2\int_{x}^{1}(1-t)^2(1-t^2)^{-\alpha} dt \qquad \text{—} (2\text{-}11)$$

$$f^{(3)}(x) = 8(2-\alpha)x(1-x^2)^{-\alpha} \qquad \text{———} (2\text{-}12)$$

$\alpha < 2$ で，$(1-x^2)^{-\alpha} \geq 0$ であるから，$f^{(3)}(x)$ は $x<0$ で 0 以下，$x \geqq 0$ で 0 以上。故に $f'(x)$ は $x<0$ で上に凸，$x \geq 0$ で下に凸である。さらに，f' は奇関数故

$$-f'(-1) = f(1) = 2\lim_{x\to 1}(x-1)\int_{-1}^{x}(1+t)^2(1-t^2)^{-\alpha} dt$$

$$= 2\lim_{x\to 1}\left\{\int_{-1}^{x}(1+t)^2(1-t^2)^{-\alpha} dt\right\} \Big/ (x-1)^{-1}$$

$$= -2\lim_{x\to 1}(1+x)^2(1-x^2)^{-\alpha} \Big/ (x-1)^{-2}$$

$$= -2 \lim_{x \to 1} (1+x)^{2-\alpha}(1-x)^{2-\alpha} = 0 \qquad \text{(2-13)}$$

故に $f'(x)$ は $x<0$ で 0 以上，$x \geq 0$ で 0 以下。 即ち

$$\max_{|x| \leq 1} f(x) = f(0) \qquad \text{(2-14)}$$

以上より (2-6) の第一因子

$$\int_{-1}^{1} g^2(x,t)(1-t^2)^{-\alpha} dt \leq \frac{1}{4} f(0)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^2 (1-t^2)^{-\alpha} dt \qquad \text{(2-15)}$$

(2-6), (2-8), (2-15) より

$$\left| \int_{-1}^{1} g(x,t) \left\{ \sum_{i=1}^{n} e_i l_i(t) \right\} dt \right|^2 \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^2 (1-t^2)^{-\alpha} dt \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha} dt \qquad \text{(2-16)}$$

(2-16) の右辺は n によらないのでこれを $\Lambda^2(\alpha)$ と書くと，(2-5) より，

$$\| G_n \|_\infty \leq \Lambda(\alpha) \qquad \text{(2-17)}$$

となる。 ベータ関数の定義より

$$\Lambda^2(\alpha) = \frac{1}{4} \left\{ B\left(\frac{1}{2}, 1-\alpha\right) - 2B(1, 1-\alpha) + B\left(\frac{3}{2}, 1-\alpha\right) \right\} B\left(\frac{1}{2}, 1+\alpha\right) \qquad \text{(2-18)}$$

となり，これを Γ 関数を使って書き更えて整理すれば (2-4) 式も得る。 ≪証明終≫

3. 収束性と精度

定理 2-2 の条件で α を固定した近似作用素の列 $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ について考察する。

[定理 3-1] (収束性)

「任意の $f \in C[-1,1]$ に対して $G_n f$ は Gf に一様収束する。

《証明》

定理2-2より$\|G_n\|_\infty$は一様有界，しかもfが多項式なら，$n>\dim f$で$G_n f = Gf$。故にBanach-Steinhausの定理より，定理3-1は明らか。 《証明終》

関数fの滑らかさを仮定すれば収束の速度と$G_n f$の精度についてもう少し詳しい事が言える。まず最良多項式近似に関するJacksonの定理を引用しておく。

[定理3-2]（D. Jackson[2]）

$f \in C^k[-1,1]$，$f^{(k)}(x) \in Lip_M \beta$，$\tilde{f}_n$を$[-1,1]$における$f$の$n$次の最良近似多項式とすると，

$$\|f-\tilde{f}_n\|_\infty \leq d\, C^{k+1} M n^{-k-\beta} \qquad n>k\geq 1 \qquad \text{——(3-1)}$$

ただし$C=1+\pi^2/2$，dは次式を満す任意の実数である。

$$d \geq \frac{n^{k+\alpha}}{n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)(n-k)^\alpha} \qquad \text{——(3-2)}$$

[定理3-3]

fが定理3-2の条件を満たすなら$\alpha\neq 1$の時，$n>k+1$で

$$\|G_n f - Gf\|_\infty \leq \left(\Lambda(\alpha)+\frac{1}{2}\right) d\, C^{k+1} M (n-1)^{-k-\beta} \qquad \text{——(3-3)}$$

又$\alpha=1$の時は，$n>k$で

$$\|G_n f - Gf\|_\infty \leq \left(\Lambda(\alpha)+\frac{1}{2}\right) d\, C^{k+1} M n^{-k-\beta} \qquad \text{——(3-4)}$$

d, Cは定理3-2の記号である。いずれにしても

$$\|G_n f - Gf\|_\infty = O(n^{-k-\beta}) \qquad \text{——(3-5)}$$

≪証明≫

$\alpha \neq 1$ のとき，G_nは標本点上 $n-1$ 次である。 f の $n-1$ 次最良近似多項式を $\tilde{f}_{n-1}$ とすれば，$G_n \tilde{f}_{n-1} = G \tilde{f}_{n-1}$ 故，

$$\begin{aligned}\|G_n f - Gf\|_\infty &\leq \|G_n f - G_n \tilde{f}_{n-1}\|_\infty + \|G_n \tilde{f}_{n-1} - Gf\|_\infty \\ &= \|G_n (f - \tilde{f}_{n-1})\|_\infty + \|G(\tilde{f}_{n-1} - f)\|_\infty \\ &\leq \|G_n\|_\infty \|f - \tilde{f}_{n-1}\|_\infty + \|G\|_\infty \|f - \tilde{f}_{n-1}\|_\infty \\ &= (\|G_n\|_\infty + \|G\|_\infty) \|f - \tilde{f}_{n-1}\|_\infty \end{aligned} \qquad (3\text{-}6)$$

さて，

$$\begin{aligned}\|G\|_\infty &= \sup_{\|f\|_\infty = 1} \max_{|x| \leq 1} \left| \int_{-1}^{1} g(x,t) f(t)\, dt \right| \\ &\leq \max_{|x| \leq 1} \int_{-1}^{1} |g(x,t)|\, dt = \max_{|x| \leq 1} \frac{1-x^2}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned} \qquad (3\text{-}7)$$

これと(2-2)より

$$\|G\|_\infty = \frac{1}{2} \qquad (3\text{-}8)$$

以上と定理 2-2，定理 3-2 より (3-3) が成立する。 $\alpha = 1$ の場合も同様に証明できる。 ≪証明終≫

4．等間隔標本点による近似作用素の不安定性

この章では等間隔標本点 $\left\{\xi_i = \frac{2i-n-1}{n-1}\right\}_{i=1}^{n}$ に対して (0-7) で定義される近似作用素 G_n を扱う。

$\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ を選点とする選点法では，G_n は

$$\tilde{G}_n : R^n \longrightarrow R^n \quad , \quad \tilde{G}_n = \left(s_j(\xi_i)\right)_{i,j=1}^{n} \qquad (4\text{-}1)$$

と行列表現されるが，

［定理 4-1］

$\|G_n\|_\infty$，$\|\tilde{G}_n\|_\infty$ は共に $O(2^n \cdot n^{-\frac{q}{2}})$ より速く発散する。

この定理により $G_n f$ はもはや Gf への収束を保証されない。又，選点法における $\tilde{G}_n$ の作用は，n が大きい時には数値的に非常に不安定となる。

定理 4-1 を証明するには，次の命題を示せば十分である。

［命題 4-1］

$m = [\frac{n}{2}] + 1$ とすると，

$$S_m(\xi_{n-1}) = \int_{-1}^{1} g(\xi_{n-1}, t)\, l_m(t)\, dt \qquad (4\text{-}2)$$

は $O(2^n \cdot n^{-\frac{q}{2}})$ 以上の速さで発散する。

《証明》

〈1〉 標本点数が $2n+1$ のとき

$n \geq 4$ とする。 $m = n+1$ で

$$S_m(\xi_{2m}) = S_{n+1}(\tfrac{n-1}{n}) = \int_{-1}^{1} g(\tfrac{n-1}{n}, t) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n+1}}^{2n+1} (t - \tfrac{i-n-1}{n}) / (0 - \tfrac{i-n-1}{n})\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} g(\tfrac{n-1}{n}, t) \prod_{i=1}^{n} ((\tfrac{i}{n})^2 - t^2) / (\tfrac{i}{n})^2\, dt$$

$$= \frac{1}{n(n!)^2} \int_{-n}^{n} g(\tfrac{n-1}{n}, \tfrac{x}{n}) \prod_{i=1}^{n} (i^2 - x^2)\, dx \qquad (4\text{-}3)$$

$$g(\tfrac{n-1}{n}, t) = \begin{cases} -\frac{1}{2n}(t+1) & -t \leq \frac{n-1}{n} \\ \frac{2n-1}{2n}(t-1) & t > \frac{n-1}{n} \end{cases}$$

であるから，

$$\int_{|x|\le n-1} g\left(\frac{n-1}{n},\frac{x}{n}\right)\prod_{i=1}^{n}(i^2-x^2) = -\frac{1}{n}\int_0^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(i^2-x^2)\,dx \qquad (4\text{-}4)$$

$$\int_{n-1\le|x|\le n} g\left(\frac{n-1}{n},\frac{x}{n}\right)\prod_{i=1}^{n}(i^2-x^2) = -\frac{1}{n}\int_{n-1}^{n}(n-x)\prod_{i=1}^{n}(i^2-x^2)\,dx \qquad (4\text{-}5)$$

従って

$$I^{(n)} = \int_0^{n-3}\prod_{i=1}^{n}(i^2-x^2)\,dx \qquad (4\text{-}6)$$

$$I_k^{(n)} = \int_k^{k+1}\prod_{i=1}^{n}(i^2-x^2)\,dx \qquad 0\le k\le n-2 \qquad (4\text{-}7)$$

$$I_{n-1}^{(n)} = \int_{n-1}^{n}(n-x)\prod_{i=1}^{n}(i^2-x^2)\,dx \qquad (4\text{-}8)$$

と置けば

$$S_n(\xi_{2n}) = -\frac{1}{n^2(n!)^2}\left\{I^{(n)}+I_{n-3}^{(n)}+I_{n-2}^{(n)}+I_{n-1}^{(n)}\right\} \qquad (4\text{-}9)$$

まず

$$|I_{n-1}^{(n)}| = \int_{n-1}^{n}(n-x)^2(x-n+1)\prod_{i=1}^{n}(x+i)\prod_{i=1}^{n-2}(x-i)\,dx \qquad (4\text{-}10)$$

乗積の部分は $[n-1,n]$ で単調増加であるから

$$|I_{n-1}^{(n)}| \ge \prod_{i=1}^{n}(n-1+i)\prod_{i=1}^{n-2}(n-1-i)\int_{n-1}^{n}(n-x)^2(x-n+1)\,dx = \frac{(2n-1)!}{12(n-1)} \qquad (4\text{-}11)$$

次に

$$|I_{n-1}^{(n)}| = \int_{n-1}^{n}\left|(n-x)\prod_{i=1}^{n}(i^2-x^2)\right|dx$$

$$= \int_n^{n+1}\frac{x}{(x-1)(x+n)(x+n+1)}\left|(n+1-x)\prod_{i=1}^{n+1}(i^2-x^2)\right|dx \qquad (4\text{-}12)$$

で $x/(x-1)$, $1/(x+n)(x+n+1)$ は単調減少だから

$$|I_{n-1}^{(n)}| \le \frac{n}{(n-1)\cdot 2n\cdot(2n+1)}\int_n^{n+1}\left|(n+1-x)\prod_{i=1}^{n+1}(i^2-x^2)\right|dx$$

$$= \frac{1}{2(n-1)(2n+1)}|I_n^{(n+1)}| \qquad (4\text{-}13)$$

同様にして

$$|I_{n-2}^{(n)}|=\int_{n-1}^{n}\frac{x}{(x-1)(x+n)(x+n+1)}\left|\prod_{i=1}^{n+1}(i^2-x^2)\right|dx \geq \frac{|I_{n-1}^{(n+1)}|}{2(n-1)(2n+1)} \quad \text{—(4-14)}$$

(4-13), (4-14) より

$$|I_{n-2}^{(n)}|/|I_{n-1}^{(n)}| \geq |I_{n-1}^{(n+1)}|/|I_{n}^{(n+1)}| \quad \text{——(4-15)}$$

さらに実際定積分も行えば

$$|I_{2}^{(4)}|/|I_{3}^{(4)}| = r = \frac{263456}{417793} < 1 \quad \text{——(4-16)}$$

故に $n \geqq 4$ で

$$|I_{n-2}^{(n)}| \leq r|I_{n-1}^{(n)}| \quad \text{——(4-17)}$$

さて

$$|I_{n-3}^{(n)}| = \int_{n-3}^{n-2}\left|\prod_{i=1}^{n}(i^2-x^2)\right|dx = \int_{n-2}^{n-1}\frac{(n+1-x)\,x}{(x-1)(n+x)}\left|\prod_{i=1}^{n}(i^2-x^2)\right|dx \quad \text{—(4-18)}$$

$x/x-1$, $(n+1-x)/(n+x)$ は単調減少だから

$$|I_{n-3}^{(n)}| \leq \frac{3(n-2)}{(n-3)(2n-2)}\int_{n-2}^{n-1}\left|\prod_{i=1}^{n}(i^2-x^2)\right|dx = \frac{3(n-2)}{3(n-1)(n-3)}|I_{n-2}^{(n)}|$$

$$\leq \frac{3(n-2)}{2(n-1)(n-3)}r|I_{n-1}^{(n)}| = o(|I_{n-1}^{(n)}|) \quad \text{—(4-19)}$$

さらに補題4-1より

$$\max_{0\leq x\leq n-3}\left|\prod_{i=1}^{n}(i^2-x^2)\right| \leq \frac{(2n-7)(2n-4)!\,4!}{n-3} \quad \text{——(4-20)}$$

故に

$$|I^{(n)}| \leq \int_{0}^{n-3}\left|\prod_{i=1}^{n}(i^2-x^2)\right|dx \leq \frac{4!\,(2n-7)(2n-4)!}{n-3}$$

$$= \frac{4!\,(2n-7)12(n-1)}{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}\,\frac{(2n-1)!}{12(n-1)} \quad \text{——(4-21)}$$

これと(4-11)より

$$|I^{(n)}| = o(|I_{n-1}^{(n)}|) \quad \text{——(4-22)}$$

以上 (4-9), (4-17), (4-19), (4-22) より

$$|S_m(\xi_{2n})| = O\left(\frac{1}{n^2(n!)^2}\left|I_{n-1}^{(n)}\right|\right) \qquad (4\text{-}23)$$

(4-11) と Stirling の公式より

$$\frac{1}{n^2(n!)^2}\left|I_{n-1}^{(n)}\right| \geq \frac{(2n-1)!}{12\,n^2(n-1)(n!)^2} = O\left(\frac{1}{n^3}\,2^{2n+1}n^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$= O\left(2^{2n+1}n^{-\frac{9}{2}}\right) \qquad (4\text{-}24)$$

これと (4-23) より求める結果を得る。

<2> 標本点数が $2n$ のとき

$n \geq 4$ を仮定しておく。 $m = n+1$ であり

$$S_m(\xi_{2n-1}) = \int_{-1}^{1} g(\xi_{2n-1}, t)\prod_{i=1}^{n}\frac{t+\frac{2n-2i+1}{2n-1}}{\frac{1}{2n-1}+\frac{2n-2i+1}{2n-1}}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{t-\frac{2n-2i+1}{2n-1}}{\frac{1}{2n-1}-\frac{2n-2i+1}{2n-1}}\,dt \qquad (4\text{-}25)$$

(4-3) と同様の変数変換により

$$S_m(\xi_{2n-1}) = \frac{-4}{(2n-1)^3\,n!\,(n-1)!}\left\{\int_{-n}^{n-2}(n+x)^2\prod_{i=1}^{n-1}(i^2-x^2)\,dx\right.$$

$$\left.+\int_{n-2}^{n-1}(2n-2)(n-1-x)(n+x)\prod_{i=1}^{n-1}(i^2-x^2)\,dx\right\} \qquad (4\text{-}26)$$

ここで

$$I^{(n)} = \int_{-n+1}^{n-4}(n+x)^2\prod_{i=1}^{n-1}(i^2-x^2)\,dx \qquad (4\text{-}27)$$

$$I_k^{(n)} = \int_{k}^{k+1}(n+x)^2\prod_{i=1}^{n-1}(i^2-x^2)\,dx \qquad -n \leq k \leq n-3 \qquad (4\text{-}28)$$

$$I_{n-2}^{(n)} = \int_{n-2}^{n-1}(2n-2)(n-1-x)(n+x)\prod_{i=1}^{n-1}(i^2-x^2)\,dx \qquad (4\text{-}29)$$

とおけば

$$S_m(\xi_{2n-1}) = \frac{-4}{(2n-1)^3\,n!\,(n-1)!}\left\{I_{-n}^{(n)}+I_{-n+1}^{(n)}+I_{-n+2}^{(n)}+I^{(n)}+I_{n-4}^{(n)}+I_{n-3}^{(n)}+I_{n-2}^{(n)}\right\} \qquad (4\text{-}30)$$

まず

$$\left|I_{n-2}^{(n)}\right| = \int_{n-2}^{n-1}(2n-2)(n-1-x)^2(x-n+2)\left\{(n+x)\prod_{i=1}^{n-1}(i+x)\prod_{i=1}^{n-3}(x-i)\right\}dx \qquad (4\text{-}31)$$

{ }内の因子は単調増加だから

$$|I_{n-2}^{(n)}| \geq \frac{(2n-2)(2n-2)!}{(n-2)} \int_{n-2}^{n-1} (n-1-x)^2 (x-n+2)\, dx$$

$$= \frac{2(n-1)(2n-2)!}{(n-2)} \cdot \frac{1}{12} \geq \frac{(2n-2)!}{6} \qquad \text{——(4-32)}$$

次に

$$|I_{n-2}^{(n)}| = \int_{n-2}^{n-1} |(2n-2)(n-1-x)(n+x) \prod_{i=1}^{n-1} (i^2-x^2)|\, dx$$

$$= \int_{n-1}^{n} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{x}{x-1} \cdot \frac{1}{(n+x+1)(n+x)} |2n(n-x)(n+1+x) \prod_{i=1}^{n} (i^2-x^2)|\, dx \qquad \text{——(4-33)}$$

$x/x-1$, $1/(n+x+1)(n+x)$ の単調増加より

$$|I_{n-2}^{(n)}| \leq \frac{(n-1)^2}{2n^2(n-2)(2n-1)} |I_{n-1}^{(n+1)}| \qquad \text{——(4-34)}$$

さらに $|I_{n-3}^{(n)}|$ の上界として

$$M_{n-3}^{(n)} = \int_{n-2}^{n-1} |(2n-2)(n+x) \prod_{i=1}^{n-1} (i^2-x^2)|\, dx \qquad \text{——(4-35)}$$

をとると (4-34) と同様にして

$$M_{n-3}^{(n)} \geq \frac{(n-1)^2}{2n^2(n-2)(2n-1)} M_{n-2}^{(n+1)} \qquad \text{——(4-36)}$$

(4-34), (4-36) より

$$M_{n-3}^{(n)} / |I_{n-2}^{(n)}| \geq M_{n-2}^{(n+1)} / |I_{n-1}^{(n+1)}| \qquad \text{——(4-37)}$$

しかるに

$$M_1^{(4)} / |I_2^{(4)}| = r = \frac{13\ 43\ 91}{15\ 75\ 13} < 1 \qquad \text{——(4-38)}$$

となるので $n \geq 4$ で

$$|I_{n-3}^{(n)}| \leq M_{n-3}^{(n)} \leq r |I_{n-2}^{(n)}| \qquad \text{——(4-39)}$$

さて

$$|I_{n-4}^{(n)}| = \int_{n-4}^{n-3} |(n+x)^2 \prod_{i=1}^{n-1}(i^2-x^2)|\,dx = \int_{n-3}^{n-2} |(n-1+x)^2 \prod_{i=1}^{n-1}(i^2-(x-1)^2)|\,dx$$

$$= \int_{n-3}^{n-2} \frac{(n+x-1)(n-x)}{(n+x)^2}\cdot\frac{x}{x-1}|(n+x)^2 \prod_{i=1}^{n-1}(i^2-x^2)|\,dx \qquad (4\text{-}40)$$

$(n+x-1)/(n+x)<1$ で $(n-x)/n+x$, $x/x-1$ は単調減少だから (4-39) より

$$|I_{n-4}^{(n)}| \le \frac{3(n-3)}{(2n-3)(n-4)}|I_{n-3}^{(n)}| \le \frac{3(n-3)}{(2n-3)(n-4)}\,r\,|I_{n-2}^{(n)}| = o(|I_{n-2}^{(n)}|) \qquad (4\text{-}41)$$

又，補題 4-2 と (4-32) より

$$|I^{(n)}| = \int_{-n+3}^{n-4} |(n+x)^2 \prod_{i=1}^{n-1}(i^2-x^2)|\,dx \le \frac{(2n-7)(2n-9)}{n-4}(2n-4)^2(2n-6)!\,4!$$

$$= \frac{(2n-7)(2n-9)(2n-4)^2\,4!\,6}{(2n-5)(2n-4)(2n-3)(2n-2)(2n-1)}\cdot\frac{(2n-2)!}{6}$$

$$= o(|I_{n-2}^{(n)}|) \qquad (4\text{-}42)$$

次に

$$|I_{-k-1}^{(n)}| = \int_{-k-1}^{-k} |(n+x)^2 \prod_{i=1}^{n-1}(i^2-x^2)|\,dx = \int_{k-1}^{k} |(n+(-1-y))\prod_{i=1}^{n-1}(i^2-(-1-y)^2)|\,dy$$

$$= \int_{k-1}^{k} \frac{y(n-y-1)}{(y+1)(n+y)}|(n+y)^2 \prod_{i=1}^{n-1}(i^2-y^2)|\,dy \qquad (4\text{-}43)$$

$y/(y+1)<1$ で $(n-y-1)/(n+y)$ は単調減少だから，

$$|I_{k-1}^{(n)}| \le \frac{n-k}{n+k-1}|I_{k-1}^{(n)}| \qquad (4\text{-}44)$$

故に

$$|I_{-n+1}^{(n)}| \le \frac{2}{2n-3}|I_{n-3}^{(n)}| = o(|I_{n-3}^{(n)}|) = o(|I_{n-2}^{(n)}|) \qquad (4\text{-}45)$$

$$|I_{-n+2}^{(n)}| \le \frac{3}{2n-4}|I_{n-4}^{(n)}| = o(|I_{n-4}^{(n)}|) = o(|I_{n-2}^{(n)}|) \qquad (4\text{-}46)$$

最後に

$$|I_{-n}^{(n)}| = \int_{-n}^{-n+1} (n+x)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (i^2-x^2)\,dx$$

$$= \int_{n-2}^{n-1} \frac{y}{(y+1)(2n-2)} \left| (2n-2)(n-1-y)(n+y) \prod_{i=1}^{n-1} (i^2-y^2) \right| dy$$

$$\leq \frac{1}{2n-2} |I_{n-2}^{(n)}| = o(|I_{n-2}^{(n)}|) \qquad \text{(4-47)}$$

以上 (4-30), (4-39), (4-41), (4-42), (4-45), (4-46), (4-47) より

$$S_m(\tilde{\xi}_{2n-1}) = O\left(\frac{|I_{n-2}^{(n)}|}{(2n-1)^3\, n!\,(n-1)!}\right) \qquad \text{(4-48)}$$

(4-32) と Stirling の公式より

$$\frac{|I_{n-2}^{(n)}|}{(2n-1)^3\, n!\,(n-1)!} \geq \frac{(2n-2)!}{6(2n-1)^3\, n!\,(n-1)!}$$

$$= O(2^{2n} \cdot n^{-\frac{9}{2}}) \qquad \text{(4-49)}$$

これと (4-48) より求める結果を得る。 《証明終》

[補題 4-1]

$$\max_{0 \leq x \leq k} \prod_{i=1}^{n} (i^2-x^2) \leq \frac{2k-1}{k} (n+k-1)!\,(n-k+1)! \qquad 1 \leq k \leq n \qquad \text{(4-50)}$$

《証明》

$$M_k = \max_{k-1 \leq x \leq k} \prod_{i=1}^{n} (i^2-x^2) \qquad 1 \leq k \leq n \qquad \text{(4-51)}$$

とすると，$[k-1, k]$ で

$$\left| \prod_{i=1}^{n} (i^2-x^2) \right| = \prod_{i=1}^{k-1} (x^2-i^2) \prod_{i=k}^{n} (i^2-x^2) \qquad \text{(4-52)}$$

で右辺第一因子は単調増加，第二因子は単調減少故

$$M_k \leq \prod_{i=1}^{k-1} (k^2-i^2) \prod_{i=k}^{n} (i^2-(k-1)^2) = \frac{2k-1}{k} (n+k-1)!\,(n-k+1)! \qquad \text{(4-53)}$$

右辺を $\bar{M}_k$ とおくと，

$$\overline{M}_{k+1}/\overline{M}_k = \frac{k(2k+1)(n+k)}{(k+1)(2k-1)(n-k+1)} \geq \frac{k(2k+1)}{(k+1)(2k-1)} = \frac{2k^2+k}{2k^2+k-1} \geq 1 \qquad \text{———(4-54)}$$

故に

$$\max_{0\leq x\leq k} \left| \prod_{i=1}^{n} (i^2-x^2) \right| \leq \overline{M}_k = \frac{2k-1}{k} (n+k-1)!\,(n-k+1)! \qquad \text{———(4-55)}$$

≪証明終≫

[補題 4-2]

$$\left[\max_{-k-1\leq x\leq k} \left| (n+x)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (i^2-x^2) \right| \leq \frac{2k-1}{k} (n+k)^2 (n+k-2)!\,(n-k)! \qquad \text{———(4-56)} \right.$$
$$1 \leq k \leq n-1$$

≪証明≫

補題4-1 より

$$\max_{0\leq x\leq k} \left| (n+x)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (i^2-x^2) \right| = \max_{0\leq x\leq k} (n+x)^2 \max_{0\leq x\leq k} \prod_{i=1}^{n-1} (i^2-x^2)$$
$$\leq \frac{2k-1}{k} (n+k)^2 (n+k-2)!\,(n-k)! \qquad \text{———(4-57)}$$

さらに

$$\max_{-k-1\leq x\leq -1} \left| (n+x)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (i^2-x^2) \right| = \max_{0\leq y\leq k} \left| (n+(-y-1))^2 \prod_{i=1}^{n-1} (i^2-(-y-1)^2) \right|$$
$$= \max_{0\leq y\leq k} \frac{y}{y+1} \cdot \frac{n+y}{n-1-y} \cdot \frac{(n-y-1)^2}{(n+y)^2} \cdot \left| (n+y)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (i^2-y^2) \right|$$
$$\leq \max_{0\leq y\leq k} \left| (n+y)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (i^2-y^2) \right| \qquad \text{———(4-58)}$$

又、

$$\max_{-1\leq x\leq 0} \left| (n+x)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (i^2-x^2) \right| = \max_{0\leq y\leq 1} \left| (n-y)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (i^2-y^2) \right|$$
$$\leq \max_{0\leq y\leq 1} \left| (n+y)^2 \prod_{i=1}^{n-1} (i^2-y^2) \right| \qquad \text{———(4-59)}$$

以上 (4-57), (4-58), (4-59) より (4-54) を得る。 ≪証明終≫

< 文献表 >

1) Suzuki, C. : Some Poised Lacunary Interpolation Polynomials.
Journal of Information Processing, Vol. 5, No. 1, PP. 38~44
(1982)

2) Jackson, D. : The Theory of Approximation.
New York (1930)