数理解析研究所講究録
554巻 1985年 10-25

Weiss' Painlevé Test for 2-Dimensional Generalized Toda Lattice

東大・理　吉田春夫

Haruo Yoshida

It is shown that 'integrable' 2-dimensional generalized Toda lattice in the sense of Mikhailov, Olshanetsky and Perelomov is strongly characterized by the Weiss' Painlevé test (Painlevé property), or having a property of single-valuedness.

§1. Introduction

通常の有限自由度の Toda lattice

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial q_i} V(q) \quad , \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{1.1}$$

$$V(q) = \sum_i \exp(q_i - q_{i+1}) \quad , \tag{1.2}$$

に対する2重の意味での一般化として次の様な2次元の Generalized Toda Lattice (GTL)

$$\frac{\partial^2 q_i}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial}{\partial q_i} V(q) \quad , \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{1.3}$$

$$V(q) = \sum_{i=1}^{M} \varepsilon_i \exp\left\{\sum_{j=1}^{N} D_{ij} q_j\right\} \tag{1.4}$$

を考える。ここで ε_i ($i=1,\cdots,M$)、及び D_{ij} ($1\leq i\leq M$, $1\leq j\leq N$) は定数パラメーターである。容易に想像できる様に2次元GTLは一般には積分可能ではない。

今、独立変数 A_i ($i=1,\cdots,M$) 及び B_j ($j=1,\cdots,N$) を

$$A_i = \varepsilon_i \exp\left\{\sum_j D_{ij} q_j\right\} \tag{1.5}$$

$$B_j = \frac{\partial}{\partial t} q_j \tag{1.6}$$

で定義すれば (1.3) は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} A_i = A_i \displaystyle\sum_{j=1}^{N} D_{ij} B_j & (i=1,\cdots,M) \quad (1.7.a) \\ \dfrac{\partial}{\partial x} B_j = -\displaystyle\sum_{i=1}^{M} D_{ij} A_i & (j=1,\cdots,N) \quad (1.7.b) \end{cases}$$

という形になる。ε_i は (1.7) には表われないことに注意する。つまり ε_i の値は (1.7) or (1.3) の積分可能性に関与しない。

本稿ではまずパラメーター D_{ij} が特殊な条件を満す時、(1.7) が Zakharov-Shabat の方程式の形に表示できることを示す。(§2) 積分可能性に関するすべての情報は Zakharov-Shabat 方程式から導かれる。これらの積分可能系は「積分可能な2次元GTL」と呼ばれる。§3 では Weiss の Painlevé test (Painlevé property) についての説明を与える。多くの積分可能な偏微分方程式(系)は経験からこの Weiss の Painlevé propertyを有することが知られている。§4では(1.7)がWeissのPainlevé propertyを持つための必要条件として、次の

$$C_{ij} = 2\frac{(\mathbb{D}_i\cdot\mathbb{D}_j)}{(\mathbb{D}_j\cdot\mathbb{D}_j)}, \quad (\mathbb{D}_i \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{j=1}^{N} D_{ij}\mathbb{e}_j)$$

を行列要素とする行列 $C=(C_{ij})$ は Cartan行列(古典的, Euclid型)あるいはこれらの単なる直和とならなければならないことを示す。この時§2で述べる様に(1.7)はZakharov-Shabat方程式に表示できる。つまり知られた積分可能な2次元GTLはWeissの意味でのPainlevé propertyを持つ、という条件で強く特徴づけられることが主要結論である。

§2 積分可能な2次元Generalized Toda Lattice (GTL)

行列 U, 及び V を

$$\begin{cases} U = \sum_{j=1}^{N} B_j H_j - \lambda^{-1}\sum_{i=1}^{M} F_i & (2.1.a) \\ V = \lambda \sum_{i=1}^{M} A_i E_i & (2.1.b) \end{cases}$$

で定義する。[1] ここで A_i, B_j は(1.5), (1.6)で定義した従属変数, λは spectrum parameter という愛称を持つ定数, また E_i, F_i $(i=1,\cdots,M)$, H_j $(j=1,\cdots,N)$ は適当なサイズの定正方行列の組である。

直接計算から(2.1)で定義された U, V に対する Zakharov-

Shabat 方程式

$$\frac{\partial}{\partial x}U - \frac{\partial}{\partial t}V + [U, V] = 0 \qquad (2.2)$$

は行列 E_i, F_i, H_j 達が次の交換関係

$$[E_k, F_i] = \delta_{ki}\sum_{j=1}^{N} D_{ij}H_j \qquad (2.3.a)$$

$$[H_j, E_i] = D_{ij}E_i \qquad (2.3.b)$$

を満す時，2次元GTL (1.7) と同等となることが示せる。言いかえれば与えられたパラメーターの組 D_{ij} に対して，(2.3)の交換関係を満足する適当なサイズの行列の組が存在すれば(1.7)は Zakharov-Shabat 方程式 (2.2) に表示することができる，ということである。Z-S 方程式 (2.2)はよく知られている様に vector wave function ψ に対する2つの線形方程式

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = V\psi \quad , \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = U\psi \qquad (2.4)$$

a compatibility condition として得られる。無限個の保存則の存在など，積分可能性に関する情報はすべて(2.4)から導かれる。[1)]

(2.3) なる交換関係をみたす行列 E, F, H 達が存在するためのパラメーター D_{ij} に対する条件(必要十分条件)は知ら

れていない。しかし十分条件として，単純 Lie 代数と関連した D_{ij} に対しては実際に行列 E, F, H 達が存在することが知られている。

今 $\mathfrak{g}$ を複素数体上の半単純 Lie 代数とする。この時 $\mathfrak{g}$ の元で次の交換関係

$$\begin{cases} [H_i, H_j] = 0, \\ [H_j, E_i] = D_{ij} E_i, \quad [H_j, F_i] = -D_{ij} F_i \\ [E_i, F_j] = \delta_{ij} \sum_{k=1}^{N} D_{ik} H_k \end{cases} \qquad (2.5)$$

を満たすものが存在する。ただし $\mathfrak{g}$ が半単純となるためには D_{ij} は勝手な値をとり得ず

$$\mathbb{D}_i = \sum_{j=1}^{N} D_{ij} \mathbb{e}_j \qquad (2.6)$$

なる N 次元 Euclid 空間のベクトル達 $\mathbb{D}_i$ に対して

$$C_{ij} = 2 \frac{(\mathbb{D}_i \cdot \mathbb{D}_j)}{(\mathbb{D}_j \cdot \mathbb{D}_j)}, \qquad (2.7)$$

で定義される C_{ij} という量が，$i \neq j$ に対して常に 0 または負の整数 (−1, −2, −3, −4) となる，という制限がつく。逆にこの条件を満たす行列 $C = (C_{ij})$ は古典的 or Euclid 型の Cartan 行列（あるいは，それらの単なる直和）として完全に分類されている。[3] これらに対しては (2.5) を満たす行列 E, F, H 達が，$\mathfrak{g}$ の元の有限次元の表現として実際に存在し，結果として (1.7) は Z−S 方程式 (2.2) に表示可能となる。

例として3粒子 periodic Toda lattice の2次元版

$$\begin{cases} q_{1,xt} = \exp(q_3-q_1)-\exp(q_1-q_2) \\ q_{2,xt} = \exp(q_1-q_2)-\exp(q_2-q_3) \\ q_{3,xt} = \exp(q_2-q_3)-\exp(q_3-q_1) \end{cases} \tag{2.8}$$

を考える。この系に対して行列 $D=(D_{ij})$ 及び $C=(C_{ij})$ は

$$D=\begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdot \\ \cdot & 1 & -1 \\ -1 & \cdot & 1 \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

となり，この場合の行列 C は $A_2^{(1)}$ 型の Cartan 行列という愛称がついている。A_i, B_i を

$$A_i = \exp(q_i-q_{i+1}), \quad B_i = q_{i,t} \tag{2.10}$$

で定義すれば連立偏微分方程式系 (1.7) は

$$\begin{cases} A_{1,t} = A_1(B_1-B_2), & B_{1,x} = -(A_1-A_3) \\ A_{2,t} = A_2(B_2-B_3), & B_{2,x} = -(A_2-A_1) \\ A_{3,t} = A_3(B_3-B_1), & B_{3,x} = -(A_3-A_2) \end{cases} \tag{2.11}$$

となる。(2.5) を満たす行列 E, F, H としては

$$H_1=\begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad H_2=\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad H_3=\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_1=\begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad E_2=\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad E_3=\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$F_1={}^tE_1, \quad F_2={}^tE_2, \quad F_3={}^tE_3$$

をとればよい。これから(2.1)で構成される行列 U, V は

$$U = \begin{bmatrix} B_1 & \cdot & -\lambda^{-1} \\ -\lambda^{-1} & B_2 & \cdot \\ \cdot & -\lambda^{-1} & B_3 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \cdot & \lambda A_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda A_2 \\ \lambda A_3 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

となる。

§3 Weiss による Painlevé test

Weiss の Painlevé test あるいは Painlevé property の正確な定義を試みることは，その test 自身が手続きのレベルを超えて何を意味するかが理解されていない現時点においてはあまり意味が無いと思われる。唯一，意味があることは，多くの知られた積分可能な偏微分方程式(系)が次の意味での Weiss' Painlevé property を有しているという経験的事実だけである。

今，一般に n 独立変数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ に対するある偏微分方程式系の解

$$u_i = u_i(z_1, z_2, \cdots, z_n) \tag{3.1}$$

に対してある種の meromorphicity（一価性）の要請を考える。すなわち解(3.1)がある singularity manifold

$$\phi = \phi(z_1, z_2, \cdots, z_n) = 0, \quad \phi: \text{任意函数} \tag{3.2}$$

で実際に pole 的振舞いを示すとし，解 u_i はその singularity manifold の近傍で実際に一価であるという要請をするのである。言いかえれば $\phi=0$ の近傍で u_i は

$$u_i = \phi^{-m_i} \sum_{j=0}^{\infty} u_i^{(j)}(z_1,\cdots,z_n)\,\phi^j \qquad (3.3)$$

の様な Laurent 型の展開ができる。(収束性については何も触れない。) 今,考えている偏微分方程式系の order が N であるとすれば,その一般解は原理的に N 個の任意函数を使って表現されるべきである。よって解 (2.1) が一価であり,generic な初期条件に対して $\phi=0$ で特異性を持つとすれば,その (3.3) なる展開において,展開係数 $u_i^{(j)}$ の中には $(N-1)$ 個の任意函数が含まれていなければならない。(残りの 1 個は $\phi=\phi(z_1,\cdots,z_n)$ の任意性におしつける。) この様な要請は考える偏微分方程式の形,あるいはその係数に現われるパラメーターに制限を与える。ある与えられた偏微分方程式に対して,ここで述べた様な性質 (Weiss の Painlevé property) があるか否かを check することを Weiss による Painlevé test と呼ぶことにする。この test は常微分方程式系に対する Painlevé test [5] の自然な拡張として Weiss によって"考案"された。[2]

<u>例 1</u> Burger's 方程式[2]

$$u_t + uu_x = u_{xx} \qquad (\text{order} = 2) \qquad (3.4)$$

解の展開を

$$u = \phi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} u^{(j)} \phi^{j}, \qquad \phi = \phi(x, t) \tag{3.5}$$

と仮定する。(3.5) を (3.4) に直接代入することによって展開係数 $u^{(j)}$ の満たす漸化式

$$\phi_x^{\,2} (j+1)(j-2)\, u^{(j)} = F^{(j)}(u^{(j-1)}, \cdots, u^{(0)}, \phi_t, \phi_x, \cdots) \tag{3.6}$$

が得られる。これから

$$u^{(0)} = -2\phi_x \quad , \quad u^{(1)} = (\phi_{xx} - \phi_t)/\phi_x \tag{3.7}$$

と決まり、$j=2$ においては (3.6) の左辺、右辺共に 0 となるので $u^{(2)}$ は任意函数としてよい。残る $u^{(j)}$ ($j \geqq 3$) は (3.6) から一義的に定まる。Burger's 方程式 (3.4) は order が 2 で 2つの任意函数を含む Laurent 展開 (3.5) が可能なので Weiss の Painlevé property を有する。

例2. KdV 方程式[2)]

$$u_t + u u_x + u_{xxx} = 0 \,, \qquad (\text{order} = 3) \tag{3.8}$$

解の展開は

$$u = \phi^{-2} \sum_{j=0}^{\infty} u^{(j)} \phi^{j} \tag{3.9}$$

実際、計算から $u^{(4)}$, $u^{(6)}$ (及び ϕ) が任意函数にとれることがわかり、KdV 方程式は Weiss の Painlevé property を有することが check できる。その他の例として例えば[4)] がある。

§4. 2次元GTLに対するWeissのPainlevé test

本節ではWeissのPainlevé testを 2次元GTL(1.7)に適用し，その結果§2で述べた積分可能な2次元GTLだけがPainlevé propertyを有し得ることを示す。

(1.7)に対して解の展開を

$$\begin{cases} A_i = \phi^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} A_i^{(n)}\phi^n & (i=1,\cdots,M) \\ B_j = \phi^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} B_j^{(n)}\phi^n & (j=1,\cdots,N) \end{cases} \qquad (4.1)$$

と仮定する。これ以外の，さらに次数の大きな polar singularity を持つ可能性が有るかもしれないが今はそれを問題にしない。

(4.1)を(1.7)に代入して ϕ の各べきの係数を等置して

$$\begin{cases} \phi_t(n-2)A_i^{(n)} + \frac{\partial}{\partial t}A_i^{(n-1)} = \sum_{m=0}^{n} A_i^{(n-m)}\sum_{j=1}^{N} D_{ij}B_j^{(m)} \\ \phi_x(n-1)B_j^{(n)} + \frac{\partial}{\partial x}B_j^{(n-1)} = -\sum_{i=1}^{M} D_{ij}A_i^{(n)} \end{cases} \qquad (4.2)$$

が得られる。(4.2)で $n=0$ とおくことで，展開初項 $A_i^{(0)}, B_j^{(0)}$ 達の満たす「代数」方程式

$$\begin{cases} -2\phi_t A_i^{(0)} = A_i^{(0)}\sum_{j=1}^{N} D_{ij}B_j^{(0)}, & (i=1,\cdots,M) \\ -\phi_x B_j^{(0)} = -\sum_{i=1}^{M} D_{ij}A_i^{(0)}, & (j=1,\cdots,N) \end{cases} \qquad (4.3)$$

が得られる。(4.3)の解を1つ決めた時，(4.2)から各 $A_i^{(n)}, B_j^{(n)}$ を順次決める漸化式がベクトル形で

$$K^{(n)}\cdot \mathbb{X}^{(n)} = \mathbb{b}^{(n)}, \quad \mathbb{X}^{(n)} = {}^{t}[A_1^{(n)},\cdots,A_M^{(n)},\cdots B_N^{(n)}] \qquad (4.4)$$

の形で得られる。但し $K^{(n)}$ は $(M+N)\times(M\times N)$ の正方行列，$\mathbb{b}^{(n)}$ は $k\leqq(n-1)$ の $\mathbb{X}^{(k)}$ の成分からなる列ベクトルである。よって (1.7) が前節で述べた意味での Painlevé property を持つためには，$\det[K^{(n)}]=0$ の根はすべて整数とならなければならず，かつその（正）整数値の n において (4.4) が実際に compatible とならなければならない。(4.3) の解を以下の様に場合分けする。

(I) $A_k^{(0)}\neq 0$，残りの $A_i^{(0)}=0$ $(i\neq k)$ の場合

(II) $A_k^{(0)}\neq 0$, $A_\ell^{(0)}\neq 0$，残りの $A_i^{(0)}=0$ $(i\neq k,\ell)$ の場合

(III) 最も一般的に $A_1^{(0)}, A_2^{(0)}, \cdots, A_L^{(0)}\neq 0$，残りの $A_{L+1}^{(0)}=\cdots=A_M^{(0)}=0$ の場合

case (I)

(4.3) の解は

$$\begin{cases} A_k^{(0)} = \dfrac{-2}{(\mathbb{D}_k\cdot\mathbb{D}_k)}\phi_t\phi_x\,, \\ B_j^{(0)} = \dfrac{-2D_{kj}}{(\mathbb{D}_k\cdot\mathbb{D}_k)}\phi_t\,, \quad (j=1,\cdots,N) \end{cases} \tag{4.5}$$

となる。この時 (4.4) の係数行列式は

$$\det[K^{(n)}] = \phi_x^N\phi_t^M(n+1)(n-1)^{N-1}(n-2)\prod_{\substack{i=1\\(i\neq k)}}^{M}\{n-2+C_{ik}\} \tag{4.6}$$

となる。ここで C_{ij} は (2.7) で定義される量である。

case (II)

(4.4) の係数行列式は

$$\det[K^{(m)}] = \phi_x^N \phi_t^M (n+1)(n-1)^{N-2}(n-2) \times$$
$$\times \left\{ n^2 - n - 2\frac{(2-C_{k\ell})(2-C_{\ell k})}{4-C_{k\ell}C_{\ell k}} \right\} \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{M} \left\{ n-2+2\frac{C_{ik}(2-C_{k\ell})+C_{i\ell}(2-C_{\ell k})}{4-C_{k\ell}C_{\ell k}} \right\} \tag{4.7}$$

case (Ⅲ)

(4.4)の係数行列式は

$$\det[K^{(m)}] = \phi_x^N \phi_t^M (n-1)^{N-L} \times \det_{1\leqq i,j\leqq L}\{ n(n-1)\delta_{ij} + C_{ij}x_j \} \times$$
$$\times \prod_{i=L+1}^{M} \left\{ n-2-\sum_{j=1}^{L} C_{ij}x_j \right\} \tag{4.8}$$

ここで $x_1, \cdots, x_L$ は

$$\begin{bmatrix} C_{11}, & \cdots, & C_{1L} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{L1}, & \cdots, & C_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ \vdots \\ -2 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

の解である。(4.9) の係数行列は $D_1, D_2, \cdots, D_L$ が1次独立の時正則となり解 x_j が定まる。もし $D_1, \cdots, D_L$ が1次独立でないとすると、同時に $A_1^{(0)}, \cdots, A_L^{(0)} \neq 0$ となる解(4.1)の存在の仮定が誤まりとなる。

さて(1.7)が Weiss の Painlevé property を持つためにはまず(4.6)の根（ $\det[K^{(m)}]=0$ の根）がすべて整数とならなければならない。k は任意の添字 $(1\leqq k\leqq M)$ であったから、結局すべ

この i, j に対して

(i) C_{ij} は整数 (4.10)

となることが必要条件として課せられる。また (4.7) の n について2次式の部分

$$n^2 - n - 2\frac{(2-C_{ij})(2-C_{ji})}{4-C_{ij}C_{ji}} = 0 \qquad (4.11)$$

の根が、まず少なくとも実数となるためには

(ii) $(C_{ij} - 16/7)(C_{ji} - 16/7) \geqq (2/7)^2$ (4.12)

が条件となる。C_{ij} の定義 (2.7) から real vector D_i 達に対し Cauchy-Schwarz の不等式から

(iii) $0 \leqq C_{ij} \cdot C_{ji} \leqq 4$ (4.13)

が自動的に条件となる。残る $C_{ij} - C_{ji}$ 面上の格子点として $C_{ij} = C_{ji} = 1$ となる場合は (4.11) の根が無理数となるので除外される。また $C_{ij} = 2$ となる場合は (4.11) から $n = 0$ が根となるが、$n = 0$ で任意函数を含むためには logarithmic singularity を必要とするのでこれも除外される。以上の条件から (2.7) で定義された C_{ij} という量は 0 または負の整数 (−1, −2, −3, −4) しかとり得ず、より具体的には

(a) $C_{ij} = C_{ji} = -1$, (b) $C_{ij} = -1$, $C_{ji} = -2$ (& その逆),

(c) $C_{ij} = -1$, $C_{ji} = -3$ (& その逆), (d) $C_{ij} = -1$, $C_{ji} = -4$ (& その逆),

(e) $C_{ij} = C_{ji} = -2$, (f) $C_{ij} = C_{ji} = 0$,

の可能性しか無いことになる。よって(1.7)でWeissのPainlevé propertyを持つものは結局§2で述べたZakharov－Shabat表示を許す積分可能な2次元GTLしかないことが結論された。これらの場合に対して実際に十分な数の任意函数が展開(4.1)に含み得るかについてはcase(I), case(II)の様な場合にはcheckしてあるが，最も一般の場合case(III)ではまだcheckできていない。

§5. Comment

§4を通して，singularity manifoldを定義する函数$\phi(x,t)$は任意函数と仮定した。ϕを任意函数として進めた§4の議論は，ϕの函数形をspecifyしても通用するはずである。今，

$$\phi(x,t) = x + t \tag{5.1}$$

とおくとt,及びxに関する偏微分は

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\phi} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{d\phi} \tag{5.2}$$

よりϕに関する微分と思うことができ，(1.7)は

$$\frac{d}{d\phi}A_i = A_i \sum_{j=1}^{N} D_{ij} B_j \ , \quad \frac{d}{d\phi}B_j = -\sum_{i=1}^{M} D_{ij} A_i \tag{5.3}$$

と変身する。(5.3)はHamiltonian

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} p_j^2 + \sum_{i=1}^{M} \varepsilon_i \exp\{\sum_{j=1}^{N} D_{ij} q_j\} \tag{5.4}$$

から，(1.5),(1.6)の変数によって得られる常微分方程式系と化

し，ϕ は唯一の独立変数（時間）の役割りを果たす。そして展開

$$A_i = \phi^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} A_i^{(n)}\phi^n, \quad B_j = \phi^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} B_j^{(n)}\phi^n \tag{5.5}$$

によって A_i, B_j 達が ϕ の函数として一価となることを要請することは，通常の常微分方程式系に対する Painlevé test[5] に他ならない。そのためには §4 を通して

$$\phi_t = \phi_x = 1, \quad \phi_{xx} = \phi_{xt} = \phi_{tt} = \cdots = 0$$

$$\frac{\partial A_i^{(n)}}{\partial t} = \cdots\cdots = \frac{\partial B_j^{(n)}}{\partial x} = 0$$

なるおき換えを行えばよいが，(4.6)，(4.7) の行列式は ϕ_x, ϕ_t を factor に含むだけなので最後の結果は不変である。つまり，Hamilton系 (5.4) が今採用した従属変数 A_i, B_j に対して Painlevé property を持つためには，その (i,j) 成分が (2.7) で与えられる行列 $C = (C_{ij})$ は Cartan 行列（古典的，Euclid 型）及びそれらの単なる直和となるものでなければならないことが結論される。[6]

References

1) A.V.Mikhairov, M.A.Olshanetsky and A.M.Perelomov : Commun. Math. Phys. 79,(1981),473.

G. Wilson : Ergod. Th. and Dynam. Sys. 1,(1981),361.

2) J. Weiss, M. Tabor and G. Carnevale : J. Math. Phys. 24,(1983),522.

J. Weiss : J. Math. Phys. 24,(1983),1405,25,(1984),13 and 2226.

3) S. Helgason : "Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces", Academic press (1978).

岩堀長慶 : "Lie群論" 岩波講座·現代応用数学 (1957)

4) D. V. Chudnovsky and G. V. Chudnovsky : Phys. Lett. 97A,(1983),268.

W. H. Steep, M. Kloke and B. M. Spieker : J. Phys. A,17,(1984),L825.

5) 吉田春夫 : 数理科学 No.260 (1985), 43 及びその文献

M. Tabor : Nature, 310,(1984),277 及びその文献

6) M. Adler and P. van Moerbeke : Commun. Math. Phys. 83,(1982),83.

H. Yoshida : in "Non-linear integrable systems - Classical theory and quantun theory", ed. M.Jimbo and T.Miwa, 273 World Scientific, Singapore, (1983).