数理解析研究所講究録
555巻 1985年 1-8

例外領域上の超幾何関数について

近畿大理工　長岡昇勇　(Shōyū Nagaoka)

G. Shimura は [3]において，非解析的 Eisenstein 級数への応用を念頭におき，拡張された合流型超幾何関数をいくつかの tube 型領域上で考察した．実際，拡張された超幾何関数は，非解析的 Eisenstein 級数の Fourier 係数を，あるアデール空間上の積分として表示したとき，その archimedean part に表われる．[3]の Introduction で述べられている様にその結果は，Jordan 環の理論を使い統一的に記述されるが，このノートでは，Cayley 数を成分とする unitary 行列からなる Jordan 環の場合（もちろん，これは例外型 Jordan 環の場合も含んでいる）に，[3]と同様の結果を記述する．

$\mathfrak{C}_{\mathbb{R}}$ を real Cayley algebra とし，その standard な基底を固定して考える（[2] 参照）．$1 \leqq m \leqq 3$ なる整数 m に対して $k(m) = 4m-3$ とおく．$\mathbb{R}$ 上の vector 空間 $\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$ を $\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{(m)} = \{x \in M_m(\mathfrak{C}_{\mathbb{R}}) \mid {}^t\bar{x} = x\}$ で定義する．ここで $\bar{x}$ は x の各成分の

Cayley conjugation を表わす. $\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$ は その中に積 $x \circ y = \frac{1}{2}(xy+yx)$ を定義することにより real Jordan algebra となる. $m=3$ のとき, すなわち $\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{(3)}$ が例外型 Jordan 環と呼ばれているものである([1]参照). $x=(x_{ij}) \in \mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$ に対して $\mathrm{tr}(x) = \sum x_{ii} \in \mathbb{R}$ と書き, $\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$ 上の内積 $(\ ,\ )$ を $(x, y) = \mathrm{tr}(x \circ y)$ で定義する. さらに, $\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$ 上の polynomial function det を次の様に定義する. $m = 3$ のとき

$$\det(x) = \prod_{i=1}^{3} x_{ii} - x_{11}N(x_{23}) - x_{22}N(x_{13}) - x_{33}N(x_{12}) + T((x_{12}x_{23})\bar{x}_{13}),$$

ここで $N(a) = a\bar{a} = \bar{a}a$, $T(a) = a + \bar{a}$ $(a \in \mathfrak{C}_{\mathbb{R}})$. $m = 2$ のとき $\det(x) = x_{11}x_{22} - N(x_{12})$. $\mathfrak{R}_m$ を $\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$ の元の square $x \circ x$ 全体のなす集合とし, $\mathfrak{R}_m^+$ をその部分集合で, $\det \neq 0$ なる条件を満たすものから成るものとする. $\mathfrak{R}_3^+$ は例外型錐と呼ばれているものである [1]. この錐を使って, $\mathfrak{J}_{\mathbb{C}}^{(m)} = \mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{(m)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の中に tube 領域 $\mathbb{H}_m = \mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{(m)} + i\,\mathfrak{R}_m^+$ を定義する. $\mathbb{H}_3$ は E_7 型の例外領域であり, $\mathbb{H}_2$ は 10 次元 IV 型領域, $\mathbb{H}_1$ は複素上半平面である. $\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$ を $\mathbb{R}^{mk(m)}$ と同一視することにより $\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$ 上に Euclidean measure dx を定義する. そこで我々は錐 $\mathfrak{R}_m^+$ に付随する gamma 関数 $\Gamma_m(s)$ を

$$\Gamma_m(s) = \int_{\mathfrak{R}_m^+} e^{-\mathrm{tr}(x)} \det(x)^{s-k(m)}\, dx$$

で定義する. 積分は $Re(s) > k(m) - 1$ なる条件のもとで

収束し，次の等式を満たす．

$$\Gamma_m(s) = \pi^{2m(m-1)} \prod_{n=0}^{m-1} \Gamma(s-4n) \quad ,$$

ここで $\Gamma(s)$ は 通常の gamma 関数である．

$g \in \mathfrak{R}_m^+$，$h \in \mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$，$(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ に対して，次の様におく

$$\eta_m(g, h; \alpha, \beta) = \int_{x \pm h \in \mathfrak{R}_m^+} e^{-(g, x)} \det(x+h)^{\alpha - K(m)} \det(x-h)^{\beta - K(m)} dx \, ,$$

$$\eta_m^*(g, h; \alpha, \beta) = \det(g)^{\alpha + \beta - K(m)} \eta_m(g, h; \alpha, \beta)$$

ここで 関数 η_m が 一般化された超幾何関数

$$\zeta_m(g; \alpha, \beta) = \int_{\mathfrak{R}_m^+} e^{-(g, x)} \det(\varepsilon_m + x)^{\alpha - K(m)} \det(x)^{\beta - K(m)} dx$$

で表わされることに注意しておく．ここで $g \in \mathfrak{R}_m^+$ で ε_m は m 次単位行列を表わす．実際，η_m と ζ_m の関係は次の通り．

$$\eta_m(g, \varepsilon_m; \alpha, \beta) = e^{-\mathrm{tr}(g)} \, 2^{\alpha + \beta - K(m)} \zeta_m(2g; \alpha, \beta) \, .$$

ここで，いくつかの記号を導入しておく．まず，$\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}(p, q, r)$ を $\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$ のえで p 個の正固有値，q 個の負固有値，r 個の零固有値をもつもの全体のなす集合とする．上記，固有値の定義を述べておく．$m=3$ のとき，$\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$ のえ h の固有値は

3次方程式 $t^3-tr(h)t^2+tr(h\times h)t-det(h)=0$ の解として定義される．ここで $x\times y$ は，x と y の cross 積を表わす．また，この3次方程式は重複をこめて 3実解をもつことに注意しておく．$m=2$ のときは，$h\in \mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(2)}$ の固有値は 2次方程式 $t^2-tr(h)t+det(h)=0$ の解として定義される．ここで，さらに，$h\in \mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$，$g\in \mathcal{R}_m^+$ に対して，g に相対する h の固有値という概念を，次の様に定義する．$m=3$ のとき，3次方程式 $t^3-(g,h)t^2+(g\times g, h\times h)t-det(g)det(h)=0$ の解として定義する．この3次方程式もまた，重複をこめて 3実解をもつ．$m=2$ のときは，2次方程式 $t^2-(g,h)t+det(g)det(h)=0$ の解として定義される．そこで，g に相対する h の固有値のうち正なるもの全体の和，積を それぞれ $\tau_+(hg)$，$\delta_+(hg)$ で表わそう．さらに $\tau_-(hg)=\tau_+((-h)g)$，$\delta_-(hg)=\delta_+((-h)g)$，$\tau(hg)=\tau_+(hg)+\tau_-(hg)$ とおく．また $\mu(hg)$ で，g に相対する h の固有値のうち非零なるものの最小絶対値を表わすものとする．

今，$g\in \mathcal{R}_m^+$，$h\in \mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}(p,q,r)$，$(\alpha,\beta)\in \mathbb{C}^2$ に対して

$$\omega_m(g,h;\alpha,\beta)=2^{-p\alpha-q\beta}\,\Gamma_p(\beta-4(m-p))^{-1}\,\Gamma_q(\alpha-4(m-q))^{-1}$$
$$\cdot\,\Gamma_r(\alpha+\beta-k(m))^{-1}\,\delta_+(hg)^{k(m)-\alpha-2q}\,\delta_-(hg)^{k(m)-\beta-2p}$$
$$\cdot\,\eta_m^*(g,h;\alpha,\beta)$$

と定義する．最初の主定理は次の様に述べられる．

定理 1．関数 ω_m は (α,β) の関数として，$\mathbb{C}^2$ 全体に holomorphic に解析接続され，次の関数等式を満たす．

$$(1)\qquad \omega_m(g,h;\alpha,\beta) = \omega_m(g,h;\kappa(m)+4r-\beta,\ \kappa(m)+4r-\alpha)$$

さらに，$\mathbb{C}^2$ の任意の compact set T に対して，正定数 A, B が存在して，

$$(2)\qquad |\omega_m(g,h;\alpha,\beta)| \leqq A\, e^{-\tau(hg)/2}\,(1+\mu(hg)^{-B})$$

for every $(g,h) \in \mathfrak{k}_m^+ \times \mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$ and every $(\alpha,\beta) \in T$，

が成立する．

この結果は [3] の Theorem 4.2 の analogy である．

次の様な級数を考える．

$$S_m(z, L_m;\alpha,\beta) = \sum_{a\in L_m} \det(z+a)^{-\alpha}\det(\bar{z}+a)^{-\beta} .$$

ここで z は $\mathbb{H}_m$ 上の変数，L_m は $\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$ 内の lattice，$(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$．この級数は，$\mathbb{H}_m \times \{(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2 \mid \mathrm{Re}(\alpha+\beta) > 2\kappa(m)-1\}$ 上で locally uniformly に収束することが確かめられる．[3] に従って，$\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$ 内の lattice L が algebraic である，ということを，次の様に定義する．すなわち，

$\mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$を $\mathbb{R}^{mK(m)}$ と同一視したとき、各成分が代数的数からなっているときを、いう. 定理1の応用として、次の定理が得られる.

定理2. Lを、$\mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$ 内の algebraic lattice とする. すると

$$\text{関数}\quad \Gamma_m(\alpha+\beta-K(m))^{-1}\, S_m(z, L : \alpha, \beta)$$

は、(α, β) に関して holomorphic function として、$\mathbb{C}^2$ 全体に解析接続される.

ここで

$$S_m(z, L\,;\alpha) = \sum_{a\in L} \det(z+a)^{-\alpha}$$

$$S_m^*(z, L\,;\alpha) = \lim_{s\to 0} S_m(z, L\,;\alpha+s, s),\qquad \text{とおく.}$$

すると、級数 $S_m(z, L\,;\alpha)$ は. $Re(\alpha) > 2K(m)-1$ で収束し (z, α) に関する holomorphic function となる. 明らかに $Re(\alpha) > 2K(m)-1$ なら、$S_m^*(z, L\,;\alpha)$ は. $S_m(z, L\,;\alpha)$ に一致する. これについて 次が成立する.

定理3. Lを $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}$ 内の algebraic lattice とする. すると、$Re(\alpha) > K(m)$ に対して $S_m^*(z, L\,;\alpha)$ は. $S_m(z, L\,;\alpha)$ に一致する. さらに、次式が成立する:

$$\mu(\mathcal{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}/L)\, S_m^*(z, L\,; K(m))$$
$$= 2^{-4m(m-1)}\, i^{-mK(m)}\, \Gamma_m(K(m))^{-1} \sum 2^{-r(h)}\, e^{2\pi i(h, z)},$$

ここで，最後の和は，$L' \cap \mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{(m)}(P,0,r)$ の元全体にわたる．
L'は，L の dual lattice，$r(h)=r$．とする．

最後に，いくつかの remarks を与えよう．W. L. Baily, Jr. は論文[1]において，例外 modular 群 Γ に関する Eisenstein 級数を研究した．我々は次の級数を考えよう．

$$E(z,s)=\sum_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_0}|j(z,\gamma)|^s \quad , \quad (s\in\mathbb{C}, \quad z\in\mathbb{H}_3),$$

ここで Γ_0 は Γ とある parabolic 部分群との共通部分．
ここで

$$\gamma_m(s)=\pi^{-ms}\Gamma_m(s) \quad , \quad \zeta_m(s)=\prod_{n=0}^{m-1}\zeta(s-4n)$$

とおく．$\zeta(s)$ は Riemann の zeta 関数．そこで，

$$\xi(s)=\gamma_3\left(\frac{s}{2}\right)\zeta_3(s)\det(\mathrm{Im}(z))^{\frac{s}{2}}E(z,s)$$

とおいてみる．$E(z,s)$ の Fourier 係数は singular series と上記 ω_3 の積として表現される．ω_3 の性質より次の事実が予想される．すなわち，$\xi(s)$ は s に関する meromorphic function として解析接続され，関数等式

$$\xi(s)=\xi(18-s)$$

を満たす．

文献

[1] W. L. Baily, Jr.: An exceptional arithmetic group and its Eisenstein series. Ann. of Math., 91, 512-549 (1970)

[2] ____: Introductory Lectures on Automorphic Forms. Publication of Math. Soc. of Japan, 12 (1973).

[3] G. Shimura: Confluent hypergeometric functions on tube domains. Math. Ann., 260, 269-302 (1982).

[4] ____: On Eisenstein series. Duke Math. J., 50, 417-476 (1983).