数理解析研究所講究録
556巻 1985年 272-281

多値論理関数の本質的極小閉集合

電気通信大学　町田　元
(Hajime Machida)

モントリオール大学　Ivo Rosenberg

1. はじめに

整数$k>1$に対し、$\underline{k}=\{0,1,\cdots,k-1\}$とおく。$\underline{k}$上の$n(>0)$変数関数$f$，すなわち，$f:\underline{k}^n\longrightarrow\underline{k}$を一般に<u>k値論理関数</u>とよぶ。$n$変数$k$値論理関数の全体を$O_k^{(n)}$，また，$k$値論理関数の全体$\bigcup_{n>0}O_k^{(n)}$を$O_k$と表わす。以下，$k$値論理関数を単に関数とよぶ。

関数の集合$F\subseteq O_k$は、(i)射影関数$e_i^n:(x_1,\cdots,x_n)\mapsto x_i$をすべて含み，(ii)関数の合成に関して閉じているとき，<u>閉集合</u>または<u>clone</u>という。閉集合の全体L_kは包含関係$\subseteq$の下で束をなす。

可算無限個の元からなる束L_2については[6]により完全に調べられているが，$k\geq 3$に対してはL_kの濃度が$2^{\aleph_0}$であることや、極大閉集合，すなわち，$L_k-\{O_k\}$の極大元，がすべて求められていること([7])などを除き，ま

だあまり調べられていない。

L_k（$k \geq 3$）の中の“小さい元”について最近得た結果を報告するのが本稿の目的である。

射影関数の全体を PR_k とおくとき，$L_k - \{PR_k\}$ の極小元を極小閉集合（minimal clone）とよぶ。Csákányは、$k=3$ に対しすべての極小閉集合を求めた（[1]）。L_k の代数的構造という観点からは最も“小さい元”として極小閉集合を考えるのが自然であろうが，一方，関数の合成という面に重きを置いて考えると，単に極小閉集合を考えるのでは十分とは言い難い。何故ならば，本質的1変数関数から生成される極小閉集合が多く存在するが，本質的1変数関数を何回合成しても本質的1変数関数しか得られないので，それらを考えることは $O_k^{(1)}$ の中だけで閉集合を考えるのとほとんど同じことだからである。（$O_k^{(1)}$ の極小閉集合を求めることは容易である。）

このようなつまらない極小閉集合を除外するため，筆者らは本質的極小閉集合という概念を定義し考察してきた（[2, 3, 4, 5]）。ここでは，おもに本質的2変数関数 f に対し，f によって生成される閉集合が本質的極小閉集合であるための条件をいくつか示す。例えば、次のことが成り立つ。

本質的2変数関数 f が次の a) — d) のいずれかをみたすな

らば、fが生成する閉集合は本質的極小閉集合である。(簡単のため、$f(x,y)$ を xy と表わす。)

a) $(xy)z = x(xy) = x(yy) = xy$,

b) $(xy)z = x(y(x(xx))) = xy$, $x(xy) = x(xx)$,

c) $x(yz) = xx$, $(xy)(xy) = (xy)y = (xx)y = xy$,

d) $(xy)z = xy$, $x(yz) = x(xx)$.

なお，紙面の都合上ほとんどの場合証明は省略する。

2. 定義

以下、$k>1$ は任意に固定して考えるので，添字の k は省略する。

<u>定義1</u>. 関数 $f \in O^{(n)}$, $n \geq 1$, に対し, $|f(a_1, \cdots, a_{i-1}, \underline{k}, a_{i+1}, \cdots, a_n)| \geq 2$ となる $a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i, \cdots, a_n \in \underline{k}$ が存在するとき、f は<u>オ i 変数に依存する</u>という。また、f が少なくとも 2 つの変数に依存するとき、f は<u>本質的</u> (essential) 関数であるという。

<u>定義2</u>. 閉集合 $C \in L$ は少なくとも 1 つ本質的関数を含むとき<u>本質的閉集合</u>であるという。

<u>定義3</u>. 閉集合 $C \in L$ は、(i) 極小閉集合ではなく, (ii) 本質的閉集合全体の中の極小元であるとき、<u>本質的極小閉集合</u> (essentially minimal clone) という。

言いかえると，閉集合Cが本質的極小であるのは，(i) Cは本質的集合であるが，Cの任意の真部分閉集合は本質的でなく，(ii) Cは恒等関数 e_1^1 以外に1変数関数を少なくとも1つ含む場合である。

記法. 集合 $F \subseteq O$ に対し、Fによって生成される閉集合，すなわち，Fを含む最小の閉集合を $[F]$ と表わす。とくに，$F=\{f\}$ のとき、$[\{f\}]$ を $[f]$ と表わす。

次に、本質的極小閉集合の基本的な性質を述べる。

命題. 本質的極小閉集合Fは、Fに属する任意の本質的関数fによって生成される（$F=[f]$）。

3．本質的極小閉集合

任意の関数 $f \in O$ に対し、fの対角線関数 $f^* \in O^{(1)}$ を次のように定める： 任意の $x \in \underline{k}$ に対し、$f^*(x) = f(x, \cdots, x)$。

また、$h \in O^{(1)}$ に対し $\langle h \rangle = \{x \in \underline{k} \mid \exists i > 0, h^i(x) = x\}$ とおき、さらに、$f \in O^{(n)}$ に対し $\langle f \rangle = \langle f^* \rangle$ とおく。例えば，$h \in O^{(1)}$ に対し，$\langle h \rangle = \underline{k}$ であることはhが全単射関数であることと同値である。

定義. $h \in O^{(1)}$ は $h^2 = h$ をみたすとき反射的(reflective)であるという。

まず、次の補題を導く。

<u>補題</u>. $f \in O^{(n)}$が本質的極小閉集合の生成元であるならば

$$\phi \neq \langle f \rangle \subsetneq \underline{k}$$

である。

<u>証明</u>. $\langle f \rangle \neq \phi$ は明らか。$\langle f \rangle \subsetneq \underline{k}$ を示すため、$\langle f \rangle = \underline{k}$ と仮定し矛盾を導く。$\langle f \rangle = \langle f^* \rangle = \underline{k}$ は f^* が置換であることを示す。f^* の位数を p とおき、新たに関数 $g \in O^{(n)}$ を次のように定める： $g(x_1, \cdots, x_n) = (f^*)^{p-1}(f(x_1, \cdots, x_n))$。このとき、$g$は本質的関数であるにもかかわらず $[g] \subsetneq [f]$ となるから矛盾である。 □

関数 $f \in O^{(n)}$に対し、fを $\langle f \rangle$ 上に制限した関数が本質的である場合には、本質的極小性を単なる極小性に帰着させることにより，fが生成する閉集合 $[f]$ が本質的極小であるための必要十分条件を与えることができる。

<u>定理 1</u>（[5]）. 関数 $f \in O^{(n)}$ に対し、$A = \langle f \rangle$ とおく。fのA上への制限 $f|_{A^n}$ が本質的関数であるとする。このとき、$[f]$ が本質的極小閉集合であるための必要十分条件は次の（i）－（iii）がすべて成り立つことである。

(i) $A \subsetneq \underline{k}$，

(ii) f^* は反射的であり，任意の $x_1, \cdots, x_n \in \underline{k}$ に対し

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f(f^*(x_1), \cdots, f^*(x_n))$$ となる。

(iii) a) $f(A^n) \subseteq A$ であり，$f|A^n$ はA上の極小閉集合を生成するか，または，b) $f^*(f(x_1, \cdots, x_n))$ は本質的関数でないか，いずれかである。

$k = 3$ の場合，定理１から得られる本質的極小閉集合は，（同型を除くと）全部で５個あるが，それらの中のいくつかの生成元を示す。ここで，$k = 2$ の場合の極小閉集合（のうち本質的関数を含むもの）は，次の４つの関数の各々から生成されるものに限られることを用いる：　$x \cdot y$，$x + y$，$x \oplus y \oplus z$，$x \cdot y \oplus y \cdot z \oplus z \cdot x$。

<u>例.</u>　$k = 3$ のとき，定理１によって本質的極小であることが示される閉集合のうち，２変数関数を生成元とするものは（同型を除くと）３つある。生成元を図によって示す。

(1)

0	0	0
0	1	0
0	0	0

(2)

0	1	0
1	1	1
0	1	0

(3)

0	2	0
1	1	1
0	2	0

残る場合は，f の $\langle f \rangle$ への制限が本質的でない場合であるが，これについては，（極小閉集合に帰着させるという意味においても，）まだ分類は完成していない。

次章で、生成元 f が2変数関数である場合について、これまでに得られた部分的結果を述べる。

4. 本質的極小 groupoid

2変数関数から生成される閉集合、または、単に2変数関数自身を groupoid とよぶことがある（ universal algebra の用語）。ここでは、本質的極小 groupoid について最近得られた結果を述べる。

任意の $f \in O^{(2)}$ ， $i \in N$ に対し、関数 $\underset{i}{*} \in O^{(2)}$ を

$$x \underset{i}{*} y = (f^*)^i(f(x, y))$$

と定める。（ただし， $\underset{0}{*} = f$ とする。）

<u>定理2</u>. $f \in O^{(2)}$ に対し、 $\langle f \rangle = \underline{l} \subsetneq \underline{k}$ とし，また、f は $\langle f \rangle$ 上で本質的でないと仮定する。さらに、任意の $i \in N$ に対し $x \underset{i}{*} y$ は本質的であり， f は $\underline{k} \times \underline{l}$ 上で本質的であるとする。このとき、 $[f]$ が本質的極小 groupoid であれば、f は次の a) または b) をみたす。（ここで、値 $f(x, y)$ を xy と表わす。）

a) $(xy)z = x(xy) = x(yy) = xy$,

b) $(xy)z = x(y(x(xx))) = xy$, $x(xy) = x(xx)$。

次に、$f \in O^{(2)}$が与えられたとき、任意の$y \in \underline{k}$に対し関数$c_y \in O^{(1)}$を、$c_y(x) = f(x, y)$により定める。このとき、すべての$y \in \underline{k}$に対しc_y^jが反射的となるような$j \in N$が存在する。このjに対し、新しい関数$\odot$を次のように定める：

$x \odot y = c_y^j(x)$.

<u>定理3.</u>　$f \in O^{(2)}$に対し、$\langle f \rangle = \underline{l} \subsetneq \underline{k}$とし、また、$f$は$\langle f \rangle$上で本質的でないと仮定する。さらに、任意の$i \in N$に対し$x \underset{i}{*} y$は本質的であり、$f$は$\underline{k} \times \underline{l}$上で本質的で<u>ない</u>が、$x \odot y$は本質的であるとする。このとき、$[f]$が本質的極小groupoidであれば、$f$は次のc)またはd)をみたす。

c)　$x(yz) = xx$,　$(xy)(xy) = (xy)y = (xx)y = xy$,

d)　$(xy)z = xy$,　$x(yz) = x(xx)$.

さらに、定理2，3の逆が成り立つ。

<u>定理4.</u>　$f(x, y) = xy$に対し、定理2のa), b), または、定理3のc), d)が成り立つならば、$[f]$は本質的極小groupoidである。

<u>証明</u>. a)の場合についてのみ，証明の概略を示す。

閉集合 $[f]$ に属する任意の本質的 n (>1) 変数関数 h に対し，$f \in [h]$ となることを示せばよい。

まず，a) の等式を駆使することにより次の性質1を導く。

<u>性質1</u>. ある $p>1$ および $1 \le i_1, \cdots, i_p \le n$ に対し，h は次のように表わされる。

$$\begin{cases} h(x_1, \cdots, x_n) = x_{i_1}(x_{i_2}(\cdots(x_{i_{p-1}} x_{i_p})\cdots)), \\ i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_p . \end{cases}$$

次に，関数 $h_j \in O^{(2)}$，$j>0$，を次のように定める。

$$\begin{cases} h_1(x, y) = x, \\ h_j(x, y) = f(x, h_{j-1}(y, x)) \qquad (j>1). \end{cases}$$

このとき，性質1において $h(x, y, \cdots, y)$ を考えることにより次の性質が示される。

<u>性質2</u>. ある $j>1$ に対し $h_j \in [h]$。

さて、ここで $j=2$ であれば，$h_2 = f$ であることから証明は終わる。$j>2$ の場合は、新たに関数 $\varphi(x, y) = h_j(x, h_j(y, y))$ を考え，再び a) の等式を用いると、$\varphi = f$ が導かれる。従って，$f = \varphi \in [h_j] \subseteq [h]$ となって，$[f]$ が本質的極小であることが示された。 □

REFERENCES

[1] Csákány, B., All minimal clones on the three-element set, Acta Cybernetica 6 (1983) 227-238.

[2] Machida, H., Essentially minimal closed sets in multiple-valued logic, Trans. IECE Japan, E64 (1981) 243-245.

[3] Machida, H., A theorem on essential minimality in k-valued logic, ibid., E65 (1982) 123-124.

[4] Machida, H., Toward a classification of minimal closed sets in 3-valued logic, Proceedings 12th Intern. Symposium Multiple-valued logic, IEEE (1982) 313-317.

[5] Machida, H.; Rosenberg, I.G., Classifying essentially minimal clones, Proceedings 14th Internat. Sympos. Multiple-valued logic, IEEE (1984) 4-7.

[6] Post, E.L., The two-valued iterative systems of mathematical logic, Annals of Math. Studies No. 5 (Princeton Univ. Press, 1941).

[7] Rosenberg, I.G., Uber die funktionale Vollständigkeit in dem mehrwertigen Logiken. Rozpravy Čs. Akademiě Věd. Ser. Math. Nat. Sci., 80 (1970) 3-93.

[8] Rosenberg, I.G., Minimal clones I: The five cases, preprint CRMA-1209, Université de Montréal, (1984) 21 pp.