数理解析研究所講究録
556巻 1985年 260-271

グラフパッキング問題の計算複雑度

(Computational complexity of Graph Packing Problems)

増山　繁 (京都大学工学部)
張　澤増 (西北電訊工程学院、西安)
茨木俊秀 (豊橋技術科学大学)
三根　久 (京都大学工学部)

あらまし　　本稿では、グラフのビンパッキング問題を辺パッキング問題と節点パッキング問題とに分けて定義し、その計算の複雑さを明らかにする。一般のグラフを箱とし、その部分グラフを品物とすると、節点パッキング問題については、既に強NP完全であることが知られているが、辺パッキング問題も強NP完全であることを示す。更に、箱が一様(d,H)木の場合も一般には辺パッキング問題も節点パッキング問題も強NP完全であることを示す。一方、箱が一様(d,H)木で品物の種類が定数とした場合に対しては、動的計画法に基づく効率のよいアルゴリズムを求めた。特に、品物も一様 (k,d)木一種のみの場合等に対しては、箱の必要数をk,d,Hで陽に表現する式を求めた。

1．まえがき

ビンパッキング問題は、長さp_i $(1\leq i\leq n)$の品物を全長Bの箱に詰めるときに必要な箱の個数kを最小にする問題である。この問題は強NP完全であることが知られており、[JOHN 74]以来、主に各種近似解法の性能評価の観点から精力的に研究されてきた(要約 [COFF 84]等参照)。さらに、[BAKE 80]以来、長方形の品物を長方形の箱に詰める二次元パッキング問題に対する各種近似解法の性能評価に関する研究も活発になされてきている(やはり、要約[COFF 84]参照)。

ところが、規格品のパッケージを用いて回路を実現する場合のように、現実の問題には箱や品物にグラフ等の何等かの構造をもたせて定式化すべき問題が少なからずある。そこで本稿では、ビンパッキング問題で、箱も品物もグラフである場合を、箱に詰める際に品物の間で節点の重なりは許すが辺の重なりは許さない辺パッキング問題と、辺も節点も重なりを許さない節点パッキング問題とに分けて定義し、その計算の複雑さを明らかにする。

第２節では以下の議論に必要な範囲で定義を与える。節点パッキング問題に関しては、[KIRK 83] の結果から、品物が一種類の場合でも、品物が節点数３以上の連結成分を含めば、強NP完全であることが直ちに分るが、第３節では、辺パッキング問題も、品物を一種類K_3に限り、しかも箱を平面グラフに限っても強NP完全であることを示す。さらに、箱が

一様(d,H)木で、品物もすべて(d,h_i)木(i=1,2,･･･,k)の場合も、辺パッキング問題、節点パッキング問題の何れも、一般には強NP完全であることを示す。一方、第４節では、箱が一様(d,H)木の場合、品物の数を定数とすると、動的計画法に基づき、効率良く解けることを示す。特に、品物も一様(d,h)木一種の場合等に対しては、箱の必要数をh,d,Hで表現する式を求める。

２．諸定義

グラフＧ＝(Ｖ,Ｅ)(但し､V,Eはそれぞれ節点と辺の集合)を箱､Ｇの部分グラフG_i (1≦ｉ≦ｎ)にそれぞれ同型なＧの部分グラフ$G'=(V', E')$(1≦ｉ≦ｎ)が存在して、

$$\bigcup_i E'_i \subset E,\ E'_i \cap E'_j = \phi \ \text{ for } \ i \neq j \tag{2.1}$$

が成り立つとき、辺パッキング可能であるという。さらに、式(2.1)とともに、

$$\bigcup_i V'_i \subset V,\ V'_i \cap V'_j = \phi \ \text{ for } \ i \neq j \tag{2.2}$$

も成り立つとき、節点パッキング可能であるという。グラフＧを箱とし、その部分グラフ(1≦i≦n)を品物とする辺(節点)パッキング問題は、ｎ個すべての品物を辺(節点)パッキングするのに必要な箱の個数ｋを最小にする問題である。両者を併せてグラフパッキング問題と呼ぶ。たとえば、図1(a)の箱に品物K_3（節点数３の完全グラフ）が３個辺パッキング可能であるのに対し、節点パッキングは１個しか可能でない(図1(b),(c)参照)。従って､品物K_3が５個あるとき、箱を図1(a)のグラフとする辺パッキング問題と節点パッキング問題の解はそれぞれ２と５である。

次に、根付き木で、ある節点の深さとは、根からその節点までの道上の辺数である。さらに、最も深さの大きい葉の深さをその根付き木の高さという。正則(d,h)木とは、葉以外の節点すべてがｄ個ずつ子をもつ高さＨの根付き木である。また、一様(d,H)木とは、すべての葉の深さがＨである正則(d,H)木である。さらに、櫛形(d,H)木とは、根からの深さが等しい節点の各集合S_i(ｉは深さ)に対して、S_i(1≦i≦Ｈ－１)に属する節点のうち、最も左の節点のみが子をもつ正則(d,H)木である。

３．グラフパッキング問題の計算の複雑さ

本節では、グラフパッキング問題の計算の複雑さを明らかにする。まず、辺パッキング問題が強NP完全であることを示そう。

定理３．１．箱を平面グラフ、品物をK_3に限っても辺パッキング問題は強NP完全である。

(証明)この問題がクラスNPに属することは明らかである。そこで、平面Cubicグラフ(即ち、各節点の次数がすべて３のグラフ)の独立集合問題[GARE 79]からの多項式時間の帰着を行う。但し、グラフの独立集合問題とは、整数ｋに対し、ｋ以上の要素からなる互に辺で接さない 節点の集合が存在するかどうかを決定する問題であり、既にNP完全であることが知られている[GARE 79]。

さて、平面CubicグラフＧに対し、その双対グラフG^*を考える。すると、Ｇの各節点とG^*の部分グラフとしてのK_3とが１対１に対応することに着目すると(図２参照)、

Ｇがｋ個以上の節点からなる独立集合をもつ

<=======>

G^*にｋ個以上のK_3が辺パッキングできる

となる。これで、平面CubicグラフＧの独立集合問題からの多項式時間の帰着が示せ、辺パッキング問題の強NP完全性が示せた。□

一方、節点パッキング問題に関しては、[KIRK 83]が既に次の一般的な結果を得ている。

定理３．２[KIRK 83]．Ｇをグラフ、G_1をＧの部分グラフとする。ＧのG_1による因子分解問題、すなわち、Ｇを箱とし、G_1を品物とする辺パッキングで、Ｇのすべての節点が被覆されるものがあるかどうかを決定する問題はG_1がその部分グラフとしてK_1，K_2のみを含む場合を除き強NP完全である。□

次に、箱を櫛形(d,H)木や一様(d, H)木に限っても辺パッキング問題が共に強NP完全であることを、何れも３分割問題[GARE 79]からの多項式時間の帰着で示そう。

定義３．１． ３分割問題とは、３ｍ個の要素から成る集合Ａと正整数Ｂ、および、$B/4<s(a)<B/2$かつ$\sum_{a\in A}s(a)=mB$を満たす大きさs(a)が各$a\in A$に与えられたとき、Aの要素の３

個ずつの組(計m組)で、それぞれの和が丁度Bになるものが存在するかどうかを決定する問題である。□

これは強NP完全であることが知られている[GARE 79]。

<u>定理3．3．</u>辺パッキング問題は箱を櫛形(d,H)木や一様(d,H)木に限っても強NP完全である。

(証明)何れもクラスNPに属することは明らかである。まず、箱が櫛形の場合について、3分割問題から多項式時間の帰着が出来ることを示す。定義3.1の3分割問題に対し、箱を櫛形(d,B)木、また、定義3.1の各a ε Aに対し、櫛形(d,s(a))木を一個ずつ品物とすると(図3参照)、

3分割問題が解をもつ ＜＝＝＞ 丁度m個の箱で3m個のすべての品物が詰められる

がなりたつ。これで、3分割問題から箱を櫛形(d,H)木とした場合の辺パッキング問題の強NP完全性が示せた。

次に、上記の帰着において、3m個の品物の他に更に一様(d,H)木(1<h<H-1)をそれぞれm個ずつ用意すると

3分割問題が解を持つ ＜＝＝＞ 丁度m個の箱で3m+(d-1)m個の品物すべてが詰められる

が成り立ち、箱が一様(d,H)木の場合の強NP完全性も示せる。□

今の定理の証明で、箱を櫛形(d,B+2)木とすると、箱を櫛形木としたときの節点パッキング問題の強NP完全性も示せる。また、箱を一様(d,B+2)木とし、品物としてさらに一様(d,h)木(1≦h≦H)をそれぞれd(d-1)m個ずつ用意すると、箱が一様(d,H)木の場合の強NP完全性も同様に示せる。

<u>定理3．4．</u>節点パッキング問題は箱が櫛形(d,H)木や一様(d,H)木に限っても強NP完全である。□

以上に見るように、辺パッキング問題、節点パッキング問題の何れも多くの場合強NP完全となり、それを解く効率のよいアルゴリズムは望めそうにないが、次節では、箱を一様(d,H)木とし、品物の種類を定数とした場合に対し、動的計画法に基づく効率の良いアルゴリズムを与える。

<u>4．箱が一様（d，H）木で、品物の種類を定数とした場合に対する効率よい解法</u>

本節では、箱が一様(d,H)木の場合、品物の種類を定数とすると、動的計画法に基づき効率よく解けることを示そう。なお、節点パッキング問題も同様に出来るので、辺パッキング問題のみ扱う。

グラフパッキング問題を解くため、まず、それにある意味で双対な、品物すべてを詰めるのに必要な一様(d,H)木の最小の高さHを求める問題を考える。簡単のため、箱は一様

(2,H)木、品物は一様(2,1)木がm個、一様(2,2)木がｎ個ある場合で説明する。品物を全て詰めるのに必要な木の高さをh(m,n)とすると、動的計画法が適用でき、再帰的に

$$h(m,n)=\min\Bigl\{\min_{\substack{0\leq i\leq m-1\\ 0\leq j\leq n}} \max\{h(i,j),\ h(m-i-1,\ n-j)\}+1,$$

$$\min_{\substack{0\leq i\leq m\\ 0\leq j\leq n\\ 0\leq k\leq m-i\\ 0\leq t\leq n-j\\ 0\leq k\leq m-i\\ 0\leq p\leq m-i-k\\ 0\leq q\leq n-j-t}} \max\{h(i,j),h(k,t)\ h(p,q),h(m-i-k-p,n-j-t-q)\}+2\Bigr\} \qquad (4.1)$$

と表される。なお、右辺のmin中の前半部と後半部は、それぞれ、一様(2,1)木である品物と、一様(2,2)木である品物とを、箱の根と品物の根が重なるように詰めた場合の、箱の必要な最小の高さである(図4参照)。これはｍ＋ｎの小さい順に計算できる。一般の場合も同様に出来るが、表現が繁雑になるので詳細は略す。

今の解法を利用して、箱が一様(d,H)木で品物の種類を定数とする場合、品物jをn_j個詰めるのに必要な箱の最小数を$b(n_1,n_2,\cdots,n_k)$とすると、動的計画法に基づき次式が得られる。

$$b(n_1,n_2,\cdots,n_k)=\begin{cases} 1 & \text{全部の品物が一個の箱に入る場合} \\ \Bigl[\min\limits_{\substack{0\leq x_1\leq n_1\\ \vdots\\ 0\leq x_k\leq n_k\\ 0\leq \sum_{i=1}^{k} x_i}} b(n_1-x_1,n_2-x_2,\cdots,n_k-x_k)\Bigr]+1 & \text{かつ、}(x_1,x_2,\cdots,x_k)\text{は一つの箱に入る} \end{cases} \qquad (4.2)$$

これは$\sum_{i=1}^{k} n_i$の小さいほうから順に解ける。その際、品物が箱に入るかどうか、(4.1)式を用いて、それらを詰めるのに必要な箱の最小の高さを求めて判定する。計算時間は$O(n^{2k})\times$(与えられた品物の集合が箱に入るかどうかの判定時間)である。ここで、$n=\max n_k$である。

特に、箱が一様(d,H)木で品物も一様(d,h)木(h≦H)の場合等に対して、それぞれ箱の必要な最小数をＨ，ｄ，ｈ等の陽な関数として表すことを考えよう。

まず、箱が一様(d,H)木で品物も一様(d,H)木の場合、その箱に辺パッキング出来る品物の最大数f(H,h,d)を求める。

補題４．１．f(H,h,d)は次の漸化式を満たす。

$$f(H,h,d)=d^{H-h}+f(H-h,h,d) \tag{4.3}$$

(証明)まず、

$$f(H,h,d)\geqq d^{H-h}+f(H-h,h,d) \quad 但し、f(H,h,d)=0 \text{ for } H\leqq h-1 \tag{4.4}$$

を示す。Ｈ＝ｈのとき、$d^{H-h}+f(H-h,h,d)=1$だから明らか。Ｈ≧ｈ＋１のとき、一様(d,d^{H-h})木の葉の数がd^{H-h}であることに注意すると、図5のように式(4.4)が成り立つ。

次に、

$$f(H,h,d)\leqq d^{H-h}+f(H-h,h,d) \quad (H\geqq h) \tag{4.5}$$

を示そう。最大個数の品物が詰まる詰め方において、そのどの葉も子孫を持たない品物の集合$T_1^0,T_2^0,\cdots,T_k^0$を考える。但し、ある節点が子孫に品物を持たないとは、その節点から葉に至るどの道も、その節点を含むもの以外の品物に出会わないことをいう。$T_1^0,T_2^0,\cdots,T_k^0$の根$r_1,r_2,\cdots,r_k$及び、$T_1^0,T_2^0,\cdots,T_k^0$以外の品物の葉で子孫に品物をひとつも持たないものを葉とし、根は箱の根である箱の部分木T_0を考える(図6参照)。

一方箱で、根からH-hにある節点を葉とする部分木Tと、それ以外の部分を考える。$r_1, r_2,$ $\cdots, r_k$のなかに、少なくともひとつｈよりも高いものがあること、及び、それらの高さが少なくともｈ以上であることに注意すると$T_0 \subset T$だから、ｉをT_0に詰まっている品物数とすると、

$$i \leqq f(H-h,h,d) \tag{4.6}$$

である。また、

$$k \leqq 2^{H-h} \tag{4.7}$$

でもある。従って

$$f(H,h,d)=i+k \leqq f(H-h,h,d)+2^{H-h} \tag{4.8}$$

となり、式(4.5)式が示せた。式(4.4),(4.5)を併せて式(4.3)が成り立つ。□

この漸化式(4.3)は陽に解ける。

<u>定理４．２．</u>$f(H,h,d)=d^r(d^{rq}-1)/d^r-1$ (4.9)

但し、Ｈ＝ｑｈ＋ｒ，０≦ｒ≦ｈ－１。□

この結果を用いて、ｎ個の一様(d,H)木である品物をすべて詰めるのに必要な一様(d,H)木の箱の必要数Bは

$$B=\lceil n(d^h-1)/d^r(d^h-1)\rceil \tag{4.10}$$

である。節点パッキングの場合も同様であるので結果のみ示す。

箱が一様(d, h)木で、品物も一様(d,H)木の場合、その箱に節点パッキング出来る品物の最大数をg(H, h, d)とすると、

$$g(H,\ h,\ d)= d^r(d^{(h+1)q}-1)/d^{h+1}-1 \tag{4.11}$$

但し、Ｈ＝ｑｈ＋ｒ，０≦ｒ≦ｈ－１。また、ｎ個品物があるときの箱の必要数は

$$B=\lceil n(d^{h+1}-1)/d^r(d^{(h+1)}-1)\rceil \tag{4.12}$$

5．あとがき

本稿では、グラフのパッキング問題を辺パッキング問題と節点パッキング問題に分けて定義しその計算の複雑さを明らかにした。また、幾つかの部分クラスに対して効率のよいアルゴリズムを求めた。

今後の課題としては、

（1）NP完全であると分った各場合に対する、よい近似アルゴリズムの開発とその性能評価

（2）本稿で扱った以外の、多項式で解ける部分クラスを求めること

などが挙げられる。(2)について、箱を無向木、品物を長さ一定の鎖とした場合などに対し、既に幾つかの成果を得ており、別の機会に報告する予定である。

謝辞　日頃御指導賜る、京都大学の長谷川利治教授に深謝の意を表する。

参考文献

[BAKE 80]　Baker, B. S., Coffman, E. G., Jr., and Rivest, R. L., "Orthogonal packings in two dimensions", SIAM J. Compt. 9, pp.846-855, 1980.

[COFF 84]　Coffman Jr., E. G., Garey, M.R., and Johnson, D. S., "Approximation algorithms for bin packing-an updated survey", working paper, 1984.

[GARE 79]　Garey,M.,R. and Johnson,D.S., Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness, W.H., Freeman and Company, San Fransisco, 1979.

[JOHN 74]　Johnson, D.S., Demers, A., Ullman,J.D., Garey,M.R. and Graham,R.L., "Worst-case performance bounds for simple one-dimensional packing algorithms", SIAM J. Compt., Vol.3,No.4,pp.601-609,1983.

[KIRK 83]　Kirkpatric, D. G. and Hell,P., "On the complexity of general graph factor problems", SIAM J.Compt.Vol.12,No.3,pp.601-609,1983.

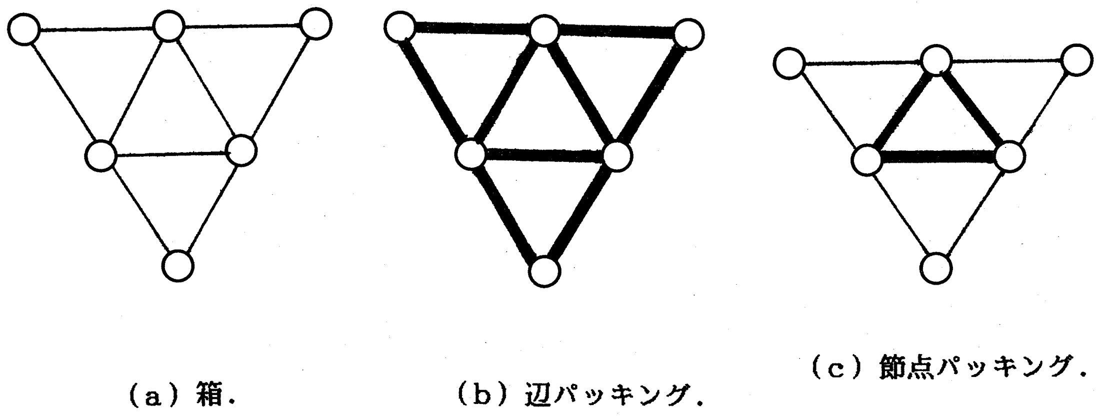


図１．グラフパッキング（品物はK_3，但し、品物は連結でなくても良い．）

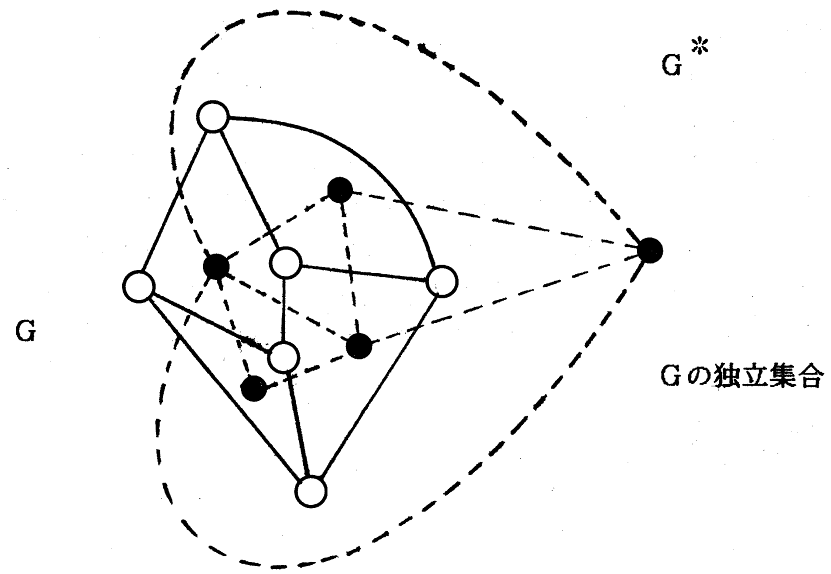
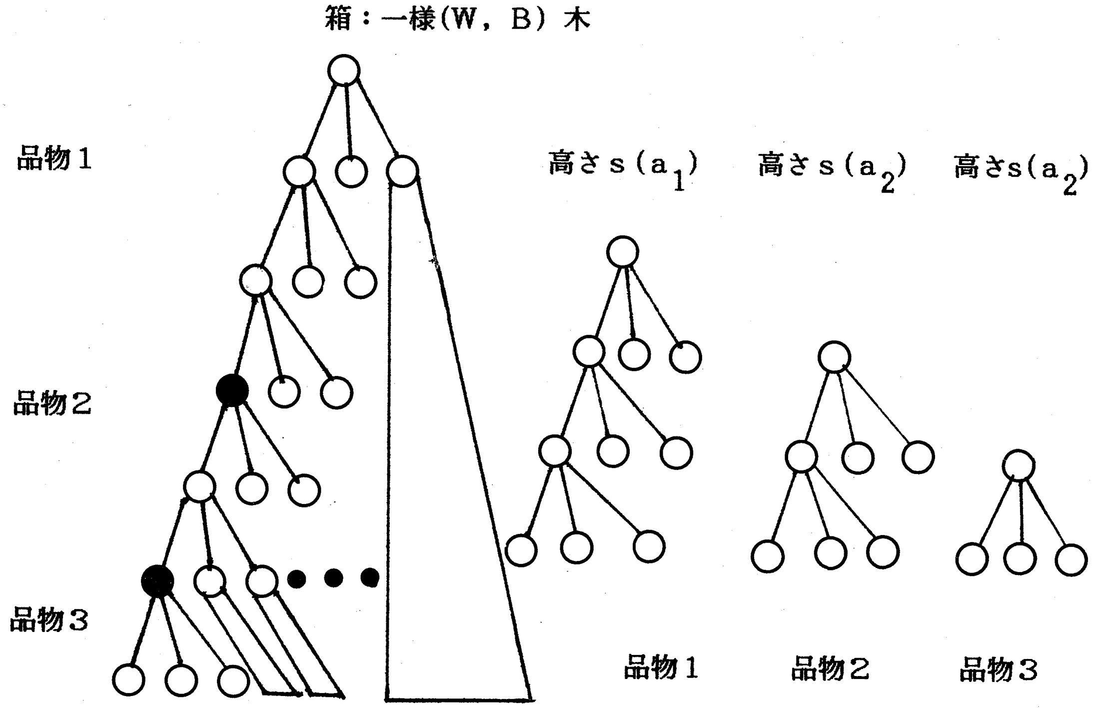
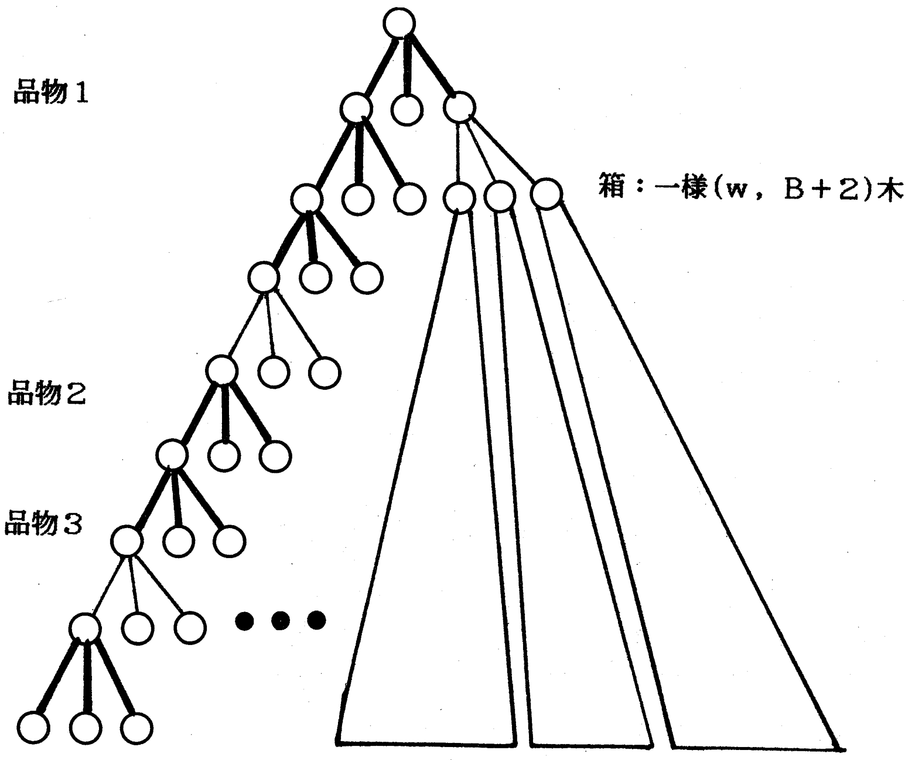


図２．平面cubicグラフＧとその双対グラフG^*(Ｇは白丸が節点、実線が辺、G^*は黒丸が節点、破線が辺)．



（a）辺パッキング(●は二つの品物の節点が重なっていることを示す).



（b）節点パッキング.

図３．３分割問題から箱が一様(d，H)木の場合のグラフパッキング問題への多項式時間帰着.

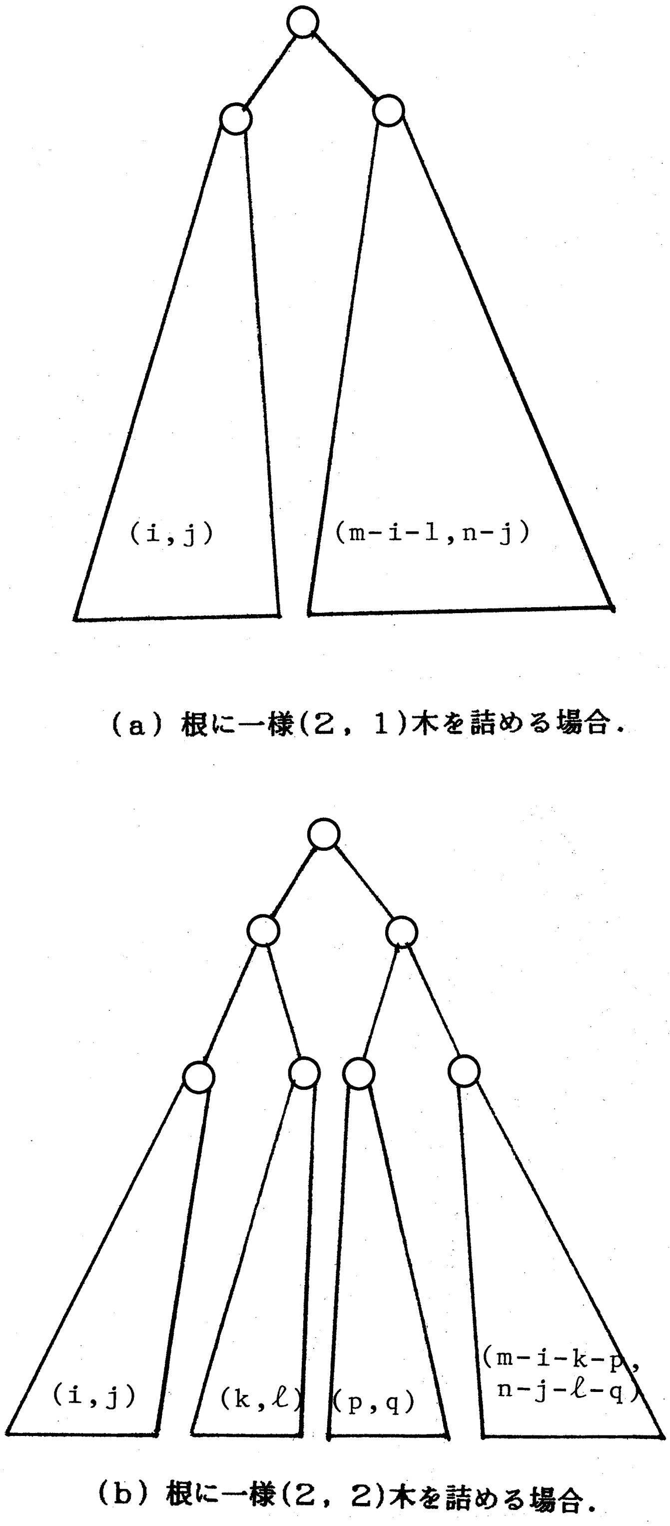


図4. 式(4.1)の説明.

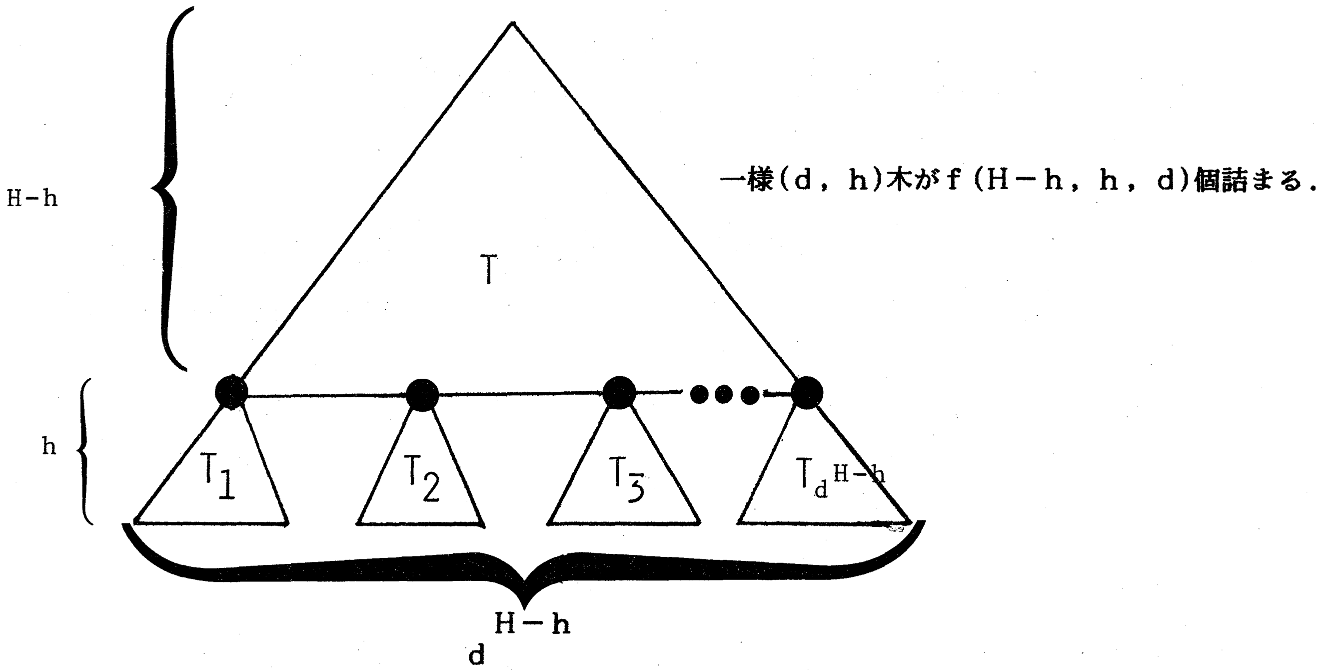


図5．補題4.1、式(4.4)の証明(●がTの葉)．

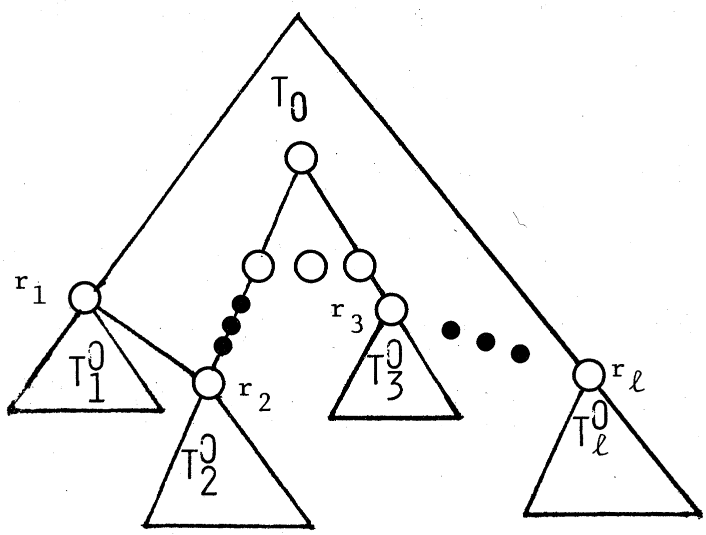


図6．補題4.1、式(4.5)の証明(●がT_0の葉)．