数理解析研究所講究録
556巻 1985年 209-218

Positive relativizations of low level complexity classes

国文学研究資料館　戸田誠之助(Seinosuke Toda)

あらまし

本稿では，ある制限された領域限定 oracle Turing machine (OTM と略す)を用いることによって，低レベルの計算量のクラス間の包含関係が肯定的に相対化できることを示す。

1.　諸定義

本節では，本稿特有の概念のみを定義し，他の基本的概念については[3]に従う。

OTM M は，1本の読み込み専用入力テープ，1本の作業テープ，オラクルテープと呼ばれる特別な出力テープと QUERY, YES, NO という特別な3つの状態をもつ Turing machine (TM と略す)である。M は，オラクル A と入力 x が与えられたとき次のように動作する。まず，M はオラクルテープに文字を出力しながら通常の TM と同様に動作しながら，ある時点で QUERY に遷移する。QUERY に遷移した M は，オラクルテー

プ上の語がAに属するときYESに遷移し，そうでないときNOに遷移する。その後は，上述の動作を繰り返す。

本稿では，決定性，非決定性とalternating OTM（各々，DOTM，NOTM，AOTM）を扱う。

$\mathbb{N}$を自然数全体とし，$S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$とする。M，A，$x$を各々，任意のOTM，オラクルと$M^A$への入力とする。Mが S領域限定であるとは，$x$に関する$M^A$の計算中に用いる作業テープセル数が高々$S(|x|)$個であるときをいう。但し，オラクルテープは領域限定の対象としない。入力xに関するMの ID αは，4組（q, i, j, w）である。ここで，qはMの状態，iは入力ヘッドの位置，jは作業ヘッドの位置，wは作業テープの内容を表わす。qがQUERY（YES，NO）のとき，αをQUERY（YES，NO）IDと呼ぶ。αがxに関するMのオラクル開始IDであるとは，xに関するMのID β_1，β_2が存在して，$\beta_1 \overset{M,x}{\vdash} \alpha$かつ$\alpha \overset{M,x}{\vdash} \beta_2$かつ$\beta_1$から$\alpha$への遷移でMはオラクルテープに文字を書かずかつ$\alpha$から$\beta_2$への遷移でMはオラクルテープに才1文字目を書くときをいう。(より正確に定義するためには，オラクルテープ上に書かれている文字数を保存存するための作業テープを別に用意して，αに於けるその作業テープの内容が0でかつβ_2に於けるその作業テープの内容が1のとき，αをオラクル開始IDと呼ぶことにすればよい。このように

定義しても以後の議論に影はない)。α_1, α_ℓ を x に関する M の任意の ID とする。α_1 から α_ℓ へ直接到達可能であるとは, x に関する M の計算列 $\alpha_1 \vdash_{M,x} \alpha_2 \vdash_{M,x} \cdots \vdash_{M,x} \alpha_\ell$ が存在して, どの α_i ($1 \leq i < \ell$) も QUERY ID でないときをいう。また, この計算列を α_1 から α_ℓ への直接計算列と呼ぶ。$h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ とする。M が h オラクル限定であるとは, x に関する M のオラクル開始 ID から QUERY ID への任意の直接計算列に於ける非決定的(又は alternating)な動作の回数が高々 $h(|x|)$ であるときをいう。M が h 道限定であるとは, x に関する M の任意のオラクル開始 ID α と QUERY ID β に対し, α から β への相異なる直接計算列の数が高々 $h(|x|)$ であるときをいう。

任意の $r \geq 1$ に対し, $\log^r = \{ f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid (\exists c>0)(\forall n \in \mathbb{N})\ f(n) \leq c(\log_2 n)^r \}$ とする。特に, $\log^1$ を $\log$ で表わす。また, $\mathrm{polylog} = \bigcup_{r \geq 1} \log^r$ とする。$\mathrm{poly} = \{ f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid (\exists c, k > 0)(\forall n \in \mathbb{N})\ f(n) \leq cn^k \}$ とする。

$h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $r \geq 1$ に対し, 言語のクラスを次のように定める。

$\mathrm{DL}^r(A)$ = オラクル A を用いる $\log^r$ 領域限定 DOTM で受理される言語のクラス

$\mathrm{NL}_h(A)$ = オラクル A を用いる $\log$ 領域限定かつ h オラクル限定 NOTM で受理される言語のクラス

$\text{co-}NL_h(A)$ = $NL_h(A)$に属する言語の補集合全体

$AL_h(A)$ = オラクルAを用いるlog領域限定かつhオラクル限定AOTMで受理される言語のクラス

$ALP_h(A)$ = オラクルAを用いるlog領域限定かつh道限定AOTMで受理される言語のクラス

$POLYLOG(A) = \bigcup_{r \geq 1} DL^r(A)$

$DL^r = DL^r(\phi)$, $NL = NL_0(\phi)$, $\text{co-}NL = \text{co-}NL_0(\phi)$,
$P = AL_0(\phi)$, $POLYLOG = POLYLOG(\phi)$.

特に，$DL^1(A)$を$DL(A)$，DL^1をDLで表わす。また，上記のクラスはhを関数族としたときも自然に定義される。

2. 肯定的相対化

まず，本節の典型的な結果を示す。

［定理2.1］ $DL = NL \Leftrightarrow DL(A) = NL_{log}(A)$ for any A.

（略証）（⇐）明らか。（⇒）任意のオラクルAに対して，$NL_{log}(A) = NL_0(A)$となることは容易に示せる。また，$DL(A) \subseteq NL_0(A)$は明らかである。従って，以下では，$DL = NL$を仮定して，$NL_0(A) \subseteq DL(A)$となることを示せばよい。

Aを任意のオラクル，Mを任意のlog領域限定かつ0オラクル限定NOTM，xをM^Aへの任意の入力とする。まず，証明に必要な概念と記法を定める。xに関するMの任意のIDは，$\{0,1\}$上の語に適当に符号化される。$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$を$x$に

関するMの全てのオラクル開始IDとし, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m$ とする。ここで, $<$ は $\{0,1\}$ 上の語の間の辞書式順序である。$\widetilde{\alpha_{M,x}} = \#\alpha_1\#\alpha_2\cdots\#\alpha_m$ とする。代入 $f : \{0,1,\#\}^* \to 2^{\{0,1,\#,Y,N\}^*}$ を $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(\#)\in\{\#Y,\#N\}$ と定める。任意の $\sigma = \#X_1\alpha_1\#X_2\alpha_2\#\cdots\#X_m\alpha_m \in f(\widetilde{\alpha_{M,x}})$ に対し, $\mathrm{oracle}(\sigma) = \{y \mid$ ある i $(1\leq i\leq m)$ が存在し, $X_i = Y$ かつ y は α_i から始まり QUERY ID で終る x に関する M の計算でオラクルテープに出力される$\}$ と定める。σ が (M,x,A)-valid であるとは, $\mathrm{oracle}(\sigma)\subseteq A$ かつ $(\forall\sigma'\in f(\widetilde{\alpha_{M,x}}))[\mathrm{oracle}(\sigma)\subseteq \mathrm{oracle}(\sigma') \Rightarrow \sigma=\sigma']$ となるときをいう。

$\widetilde{L_M} = \{x\sigma \mid \sigma\in f(\widetilde{\alpha_{M,x}})$ かつ x は $M^{\mathrm{oracle}(\sigma)}$ によって受理される$\}$ と定める。$\widetilde{L_M}\in NL$ となることは次のアルゴリズムによって示される。

input $x\#X_1\alpha_1\#X_2\alpha_2\#\cdots\#X_m\alpha_m$;

$\gamma \leftarrow x$ に関するMの初期ID;

while γ は x に関するMの停止IDでない **do**

  if $\gamma = \alpha_i$ **for some** i $(1\leq i\leq m)$

    then begin

      α_i から QUERY ID に到達するまでMを x に関して simulateし, 到達したQUERY ID を β とおく (但し, オラクルテープへの出力動作は全て無

視する）;

if $X_i = Y$ then $\gamma \leftarrow \beta$ に対応する YES ID

else $\gamma \leftarrow \beta$ に対応する NO ID

end

else x に関して M を γ から 1 step だけ simulate し，新たに得られた ID を γ とおく；

if γ は M の受理 ID then accept else halt

仮定より，$\widetilde{L_M} \in DL$ であるから，$\widetilde{L_M}$ を受理する log 領域限定 DTM を M_1 とおく。そこで，$L(M^A)$ を受理する log 領域限定 DOTM M_2 を次のように構成する。

input x ;

$Ihead_{M_1} \leftarrow 1$; { $Ihead_{M_1}$ は M_1 の入力ヘッドの位置を表わす }

$\gamma \leftarrow x$ に関する M_1 の初期 ID ;

while γ は M_1 の停止 ID でない do

if $Ihead_{M_1} > |x|$

then begin

(M,x,A)-valid な $\sigma \in f(\widetilde{\alpha_M}, x)$ の第 $Ihead_{M_1} - |x|$ 番目の文字 a を次のように求める；

$j \leftarrow Ihead_{M_1} - |x|$;

$i \leftarrow 0$; $z \leftarrow \lambda$; $\alpha_0 \leftarrow \lambda$;

repeat

$i \leftarrow i+1$; $j \leftarrow j-|z|$;
α_iからQUERY IDに到達するまでxに関してMをsimulateし，オラクルAにqueryする；
<u>if</u> answer = "yes" <u>then</u> $z \leftarrow \#Y\alpha_i$
<u>else</u> $z \leftarrow \#N\alpha_i$

<u>until</u> $j \leq |z|$;
$a \leftarrow z$の第j番目の文字；
M_1の入力ヘッドが文字aを見ているものとして，
γからM_1を1stepだけsimulateする；
新たに得られたM_1のIDをγとおく；

<u>else</u> γからM_1を1stepだけsimulateして，新たに得られたM_1のIDをγとおく ；

<u>if</u> γがM_1の受理ID <u>then</u> <u>accept</u> <u>else</u> <u>reject</u> ;

$L_{\tilde{M}}$の定義とM_2の構成より，M_2^Aがxを受理する ⇔ (M, x, A)-validな$\sigma \in f(\widetilde{\alpha_M, x})$に対して $x\sigma \in L_{\tilde{M}}$ ⇔ M^Aがxを受理する，となる。よって，$NL_\ell(A) \subseteq DL(A)$である。■

定理２．１と同様の証明方法によって次の定理が得られる。

［定理２．２］ 任意の$\alpha \geq 1$に対し，次が成り立つ。

(1) $NL \subseteq DL^\alpha \Leftrightarrow NL_{log^\alpha}(A) \subseteq DL^\alpha(A)$ for any A.
(2) $NL = co\text{-}NL \Leftrightarrow NL_{log}(A) = co\text{-}NL_{log}(A)$ for any A.
(3) $P \subseteq DL^\alpha \Leftrightarrow AL_{log^\alpha}(A) \subseteq DL^\alpha(A)$ for any A.

(4) $P \leq POLYLOG \Leftrightarrow AL_{polylog}(A) \subseteq POLYLOG(A)$ for any A.

［定理２．３］ $DL = P \Leftrightarrow DL(A) = ALP_{poly}(A)$ for any A.

（略証） ($\Leftarrow$)明らか。($\Rightarrow$) $DL = P$を仮定して，$ALP_{poly}(A) \leq DL(A)$ を示せばよい。M，A，xを各々，log領域限定かつp道限定AOTM，任意のオラクルとMへの入力とする。ここで，pはある多項式である。以下では，Mのオラクルテープアルファベットを$\{0,1\}$とする。また，xに関するM^Aの任意の計算列に於いて，同じIDが２度以上現われないと仮定する。このように仮定しても一般性を失うことはない。

ある多項式qが存在して，xに関するMのIDの数及びqueryされる語の長さは高々$q(|x|)$であり，Mがqueryする語の数は高々$q(|x|)^2 \cdot p(|x|)$である。そこで，言語$S_{M,x} \leq \{0,1,\#\}^*$を次のように定める。$\alpha = \#\alpha_1\#\alpha_2\#\cdots\#\alpha_t$ ($\alpha_i \in \{0,1\}^*$, $1 \leq i \leq t$) に対し，$\alpha \in S_{M,x} \Leftrightarrow (\forall i,j)[i<j \Rightarrow \alpha_i < \alpha_j]$ かつ $t \leq q(|x|)^2 \cdot p(|x|)$ かつ $(\forall i)[|\alpha_i| \leq q(|x|)]$ である。代入$f: \{0,1,\#\}^* \to 2^{\{0,1,\#,Y,N\}^*}$を$f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(\#) \in \{\#Y, \#N\}$と定める。$\sigma = \#X_1\alpha_1\#\cdots\#X_t\alpha_t \in f(S_{M,x})$に対し，$oracle(\sigma) = \{\alpha_i \mid X_i = Y\}$と定める。$\sigma$が$(M,x,A)$-validであるとは，

(i) 任意のi ($1 \leq i \leq t$)に対し，xに関するMのオラクル開始ID IとQUERY ID Qが存在して，α_iはIからQへのある直

接計算列に於いてオラクルテープに出力される，かつ，
(ii) x に関する M のオラクル開始 ID から始まり QUERY ID で終る任意の直接計算列に於いてオラクルテープに出力される語 y に対し，i $(1 \leq i \leq t)$ が存在して，$\alpha_i = y$，かつ，
(iii) $oracle(\sigma) \subseteq A$ かつ $(\forall \sigma' \in f(S_M, x))$ $[oracle(\sigma) \subseteq oracle(\sigma')$ かつ σ' が (i), (ii) を満たす $\Rightarrow \sigma = \sigma'$]，
が成り立つときをいう。明らかに，(M, x, A)-valid な $\sigma \in f(S_M, x)$ は一意的である。そこで，$\widetilde{L_M} = \{ x\sigma \mid \sigma \in f(S_M, x)$ かつ x は $M^{oracle(\sigma)}$ によって受理される $\}$ とすると，$\widetilde{L_M} \in P$ となることは，容易に確かめられる。次に，$\widetilde{\sigma_{M,x}}$ を $f(\widetilde{\sigma_{M,x}})$ が (M, x, A)-valid であるような $\{0, 1, \#\}$ 上の語とする。$V_M = \{ (x, i, a) \mid \widetilde{\sigma_{M,x}}$ の第 i 番目の文字は a である $\}$，$\widehat{V_M} = \{ (x, i, a) \mid f(\widetilde{\sigma_{M,x}})$ の第 i 番目の文字は a である $\}$ とする。$V_M \in P$ となることは容易に示せる。このことと仮定より，$\widetilde{V_M} \in DL(A)$ となる。仮定より，$\widetilde{L_M} \in DL$ であるから，$\widetilde{V_M} \in DL(A)$ という事実を用いれば，定理2．1と全く同様にして $L(M^A) \in DL(A)$ が示せる。 ■

3． 否定的相対化

定理2．1と2．2で用いたオラクル限定を若干ゆるめることによって，次の定理が得られる。

［定理3．1］ 任意の正数 α，β $(1 \leq \alpha < \beta)$ に対して，

次が成り立つ。

(1) $NL_{\log^\beta}(A) \nsubseteq DL^\alpha(A)$ for some A.

(2) $NL_{\log^\beta}(A) \neq$ co-$NL_{\log^\beta}(A)$ for some A.

(3) $AL_{\log^\beta}(A) \nsubseteq DL^\alpha(A)$ for some A.

(4) $\mathrm{polylog} = o(h)$を満たす任意の$h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$に対して,

$AL_h(A) \nsubseteq POLYLOG(A)$ for some A. ■

定理3.1は，2節の結果を保持したままオラクル限定をゆるめることは非常に困難であることを示している。

〈参考文献〉

[1] T. Baker, J. Gill & R. Solovay : Relativizations of The P=? NP Question, SIAM J. Comput., 4(1975), 431-442.

[2] R.V. Book : Bounded Query Machines : on NP and PSPACE, Theo. Comp. Sci., 15(1981), 27-39.

[3] J.E. Hopcroft & J.D. Ullman : Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation, Addison-Wesley, 1979.

[4] M. Izumi : Contralled relativizations of Simultaneous Rsourses Bounded Complexity Classes and Related Problems, manuscript.

[5] R.E. Ladner & N.A. Lynch : Relativization of Questions about Log Space Computability, Math. Sys. Theo., 10(1976).