数理解析研究所講究録
557巻 1985年 203-221

逐次手法における停止時間について

新潟大 理 磯貝英一 (Eiichi Isogai)

1. はじめに

近年，無作為標本に基づいた，ノンパラメトリックな確率密度関数の推定問題が広く研究され，パターン認識問題，識別機械における学習理論等への応用が議論されている。特に電子計算機の発展とともに，計算のわずらわしさを少なくするために逐次推定量が提案された。（たとえば Devroye [6], 著者 [8], [10], Wolverton and Wagner [14] ）

一方，実際問題において標本の大きさが確率変数になる場合がある。たとえば ある道路のある地点を通過する車の速度の分布を知りたい時，t時刻までに通過したN_t台の車の速度は実際に記録できる。この場合N_tは確率変数になる。また，ある推定問題において要求された精度を得るまでに抽出される標本の大きさが確率変数になることがある。特に，Chow and Robbins [4] は母平均に対する逐次的な信頼区間につ

いて論じている。すなわち，与えられた信頼係数をもつ信頼区間を得るために標本抽出をいつ停止し，それまでに得られた標本に基づいてどのような信頼区間を作ればよいか。この問題に対して彼等は停止時間と信頼区間を具体的に与えた。そして，ここで得られた信頼区間の性質を「信頼区間の漸近的一致性」と呼んだ。このような発想をノンパラメトリックな確率密度関数の推定問題に適用したものとして Carroll [3], 著者 [9], Stute [13] などがある。以上のことについては Prakasa Rao [11] でまとめられている。

一方，信頼区間の漸近的一致性を議論するときに用いられる理論として random indices に関した理論がある。これは次のような問題に関する理論である：

$Y_1, Y_2, \cdots$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 上で定義された確率変数列で，$\tau_1, \tau_2, \cdots$ を $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 上で定義された正の整数値をとる確率変数列とする。このとき もし

$$Y_n \xrightarrow[L]{} Y \quad \text{as } n \to \infty \quad \text{(法則収束)}$$

ならば いかなる条件の下で

$$Y_{\tau_k} \xrightarrow[L]{} Y \quad \text{as } k \to \infty$$

が成り立つであろうか。この問題に関する理論は古くから研究されている。Anscombe [2] は いわゆる Anscombe の条件と呼ばれている十分条件を与えた。Csörgő and Fischeler [5] はより

一般的な場合について論じている。さらに Aldous [1] は必要十分条件について議論している。最近では Govindarajulu [7] がこの理論について研究している。

さて，本報告の目的は著者 [9] で得られた停止時間についての十分条件がより一般化できることを示すことである。

2. 準備

本節では 本報告で使用される逐次推定量を定義し，また次節で使用されるいくつかの結果を与える。

$f(x)$ は R^p 上のルベーグ測度に関する確率密度関数 (p.d.f.) で未知とする。また $X_1, X_2, \cdots$ は共通の p.d.f. $f(x)$ をもった独立で同一分布に従う，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された p 次元確率ベクトル列とする。

著者 [9] で定義された次の逐次推定量 $f_n(x)$ を用いる：

$$(2.1) \qquad f_0(x) \equiv K(x)$$

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) + a_n \{K_n(x, X_n) - f_{n-1}(x)\} \qquad n \geqq 1$$

ここに

$$(2.2) \qquad a_n = \frac{a}{n} \quad (0 < a \leqq 1)$$

$$K_n(x, y) = h_n^{-p} K\left(\frac{x-y}{h_n}\right) \qquad x, y \in R^p$$

$\{h_n\}$ は正数列で $h_n \downarrow 0 \ (n \to \infty)$ をみたすとする。

$K: R^p \to R$ は有界かつ可積分なボレル可測関数で次の条件をみたすとする：

<u>条件 K</u>

$$\int_{R^p} K(y)dy = 1\ ,\quad \int_{R^p} \|y\|^2 |K(y)| dy < \infty$$

$$\int_{R^p} y_i K(y)dy = 0 \quad {}^{\forall}i=1,\cdots,p\ ,\quad \|y\|^p |K(y)| \to 0 \text{ as } \|y\|_p \to \infty$$

ただし $\|\cdot\|_p$ は R^p 上のユークリッドノルムを表わす。

$\{h_n\}$ について下のいくつかの条件を与える：

(H1) $\quad n h_n^p \uparrow \infty \text{ as } n \to \infty$;

ある a ($a>0$) に対して

(H2) $\quad n^{1-2a} h_n^p \to 0 \text{ as } n \to \infty$

(H3) ある正定数 β が存在して

$$n^{1-2a} h_n^p \sum_{j=1}^{n} j^{2(a-1)} h_j^{-p} \to \beta \quad \text{as } n \to \infty$$

(H4) $\quad n^{\frac{3}{2}-3a} h_n^{\frac{3}{2}p} \sum_{j=1}^{n} j^{3(a-1)} h_j^{-2p} \to 0 \text{ as } n \to \infty$

(H5) $\quad n^{\frac{1}{2}-a} h_n^{\frac{1}{2}p} \sum_{j=1}^{n} j^{a-1} h_j^2 \to 0 \text{ as } n \to \infty$;

(H6) $\quad {}^{\forall}\varepsilon > 0$ に対して ${}^{\exists}\delta > 0$ such that

$$\left|\frac{n}{m} - 1\right| < \delta \Rightarrow \left|\frac{h_n}{h_m} - 1\right| < \varepsilon .$$

例

条件Kをみたす例

$$K(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}p} \exp\{-\frac{1}{2}\|x\|_p^2\}$$

(H1) ~ (H6)をみたす例

$$h_n = n^{-\frac{r}{p}}, \quad \max\{\frac{p}{p+4}, 1-2a\} < r < 1, \quad 0 < a \leqq 1$$

さて 停止時間$N(t)$についての条件を与える。

$^\forall t \in (0, \infty)$に対して

$N(t)$は$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$上で定義された正の整数値をとる確率変数,

$\pi(t)$は正数で $\lim_{t\to\infty} \pi(t) = \infty$ をみたす,

θは$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$上で定義された正数値をとる離散型確率変数，すなわち

$\exists\, l_k \in (0, \infty)$ $k = 1, 2, \cdots$ (kは有限または無限)

such that $\quad P_k = P\{\theta = l_k\} > 0 \quad k = 1, 2, \cdots$

かつ

$$(2.3) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} P_k = 1 \; .$$

$N(t)$に関して次の条件を考える。

条件 T

上で与えられた性質をもつある$\pi(t)$, θに対して

$$\frac{N(t)}{\pi(t)} \xrightarrow[P]{} \theta \quad \text{as} \quad t \to \infty \quad (確率収束)$$

が成り立つ。

$$\gamma_0 = \gamma_1 = 1, \quad \gamma_n = \prod_{j=2}^{n} (1 - a_j) \quad n \geqq 2$$

$$\beta_{mn} = \begin{cases} \prod_{j=m+1}^{n} (1 - a_j) & \text{if } n > m \geqq 0 \\ 1 & \text{if } n = m \geqq 0 \end{cases}$$

ただし $a_n = \frac{a}{n}$ $(a > 0)$

とおく。

本報告中では $C, C_1, C_2, \cdots$ は適当な正定数を表わし,
$[b]$ $(b \in R)$ は b を越えない最大の整数を表わすとする。
容易に次のことがわかる。

(2.4) $\beta_{mn} = \gamma_n \gamma_m^{-1}$ $\quad n \geqq m \geqq 1$

(2.5) $C_1 n^{-a} \leqq \gamma_n \leqq C_2 n^{-a}$ $\quad n \geqq 1$

さて 次の記号を導入する。

$$S_0 = V_0 \equiv 0$$

$$S_n = (f_n(x) - f(x)) - \beta_{0n}(f_0(x) - f(x))$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \beta_{jn} \{K_j(x, X_j) - f(x)\} \qquad n \geqq 1$$

$$V_n = \sqrt{n h_n^p}\, S_n$$
$$= \sqrt{n h_n^p \gamma_n^2} \sum_{j=1}^{n} a_j \gamma_j^{-1} \{K_j(x, X_j) - f(x)\} \qquad n \geqq 1$$

このとき $n \geqq 1$ に対して

$$(2.6) \quad \sqrt{nh_n^p}\,(f_n(x) - f(x)) = V_n + \sqrt{nh_n^p}\,\beta_{0n}(f_0(x) - f(x))$$

Lemma 2.1

$g : R^p \longrightarrow R$ は有界かつ連続な偏導関数 $\dfrac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ $(i, j = 1, \cdots, p)$ をもつとする，すなわち

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \sup_{x \in R^p} \left| \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right| < \infty .$$

$k : R^p \longrightarrow R$ は次をみたすボレル可測関数とする：

$$\int_{R^p} y_i k(y) dy = 0 \quad {}^\forall i = 1, \cdots, p \quad \text{かつ} \quad \int_{R^p} \|y\|^2 |k(y)| dy < \infty .$$

h を正数とする。このとき

$$\left| \int_{R^p} h^{-p} k\left(\frac{x-y}{h}\right) g(y) dy - g(x) \int_{R^p} k(y) dy \right| \leqq C \cdot h^2$$

が成り立つ。

（証明）

テイラーの定理と仮定より

$$\left| \int_{R^p} h^{-p} k\left(\frac{x-y}{h}\right) g(y) dy - g(x) \int_{R^p} k(y) dy \right|$$

$$= \left| \int_{R^p} k(y) \{ g(x-hy) - g(x) \} dy \right|$$

$$\leqq \frac{1}{2} h^2 \int_{R^p} |k(y)| \, | y^t H(x - \xi h y) y | \, dy \qquad (0 < \xi < 1)$$

$$= \frac{C_1}{2} h^2 \int_{R^p} \|y\|^2 |k(y)| dy \leqq C \cdot h^2$$

ここに　$H(x) = \left(\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)$ は x における g のヘッセ行列.

（証終）

Lemma 2.2　（漸近正規性）

(2.2) の a に対して (H2) ～ (H5) がみたされるとする。もし $f(x)$ が有界かつ連続な偏導関数 $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ $(i, j = 1, \cdots, p)$ をもてば $f(x) > 0$ なる点 x に対して

$$\sqrt{n h_n^p} \left(f_n(x) - f(x) \right) \xrightarrow[L]{} N(0, \sigma^2(x)) \quad \text{as } n \to \infty$$

が成り立つ。ただし

$$(2.7) \qquad \sigma^2(x) = a^2 \beta \int_{R^p} K^2(y) dy \, f(x)$$

（証明 略）

Lemma 2.3

Lemma 2.2 の仮定の下で

$$V_{[\theta \pi(t)]} \xrightarrow[L]{} N(0, \sigma^2(x)) \quad \text{as } t \to \infty$$

が成り立つ。

（証明）

Lemma 2.2，(2.5)，(H 2) より

$$V_n \xrightarrow[L]{} N(0, \sigma^2(x)) \quad \text{as } n \to \infty$$

また

$$V_n = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j \gamma_j \{K_j(x, X_j) - f(x)\}}{\sqrt{(n h_n^p \gamma_n^2)^{-1}}}$$

$$(n h_n^p \gamma_n^2)^{-1} \longrightarrow \infty \quad \text{as } n \to \infty$$

だから Rényi [12] の Lemma 4 より

任意に固定した $k \geqq 1$ に対して

(2.8) $\quad P\{V_n < y \mid A_k\} \longrightarrow F(y) \quad \text{as } n \to \infty \quad {}^{\forall} y \in R$

ただし $F(y)$ は $N(0, \sigma^2(x))$ の分布関数で A_k は事象

$[\theta = l_k]$ を表わす。

${}^{\forall}\varepsilon > 0$ を固定する。(2.3) より

${}^{\exists}k_0 \geqq 1$ such that

(2.9) $\quad \sum_{k=k_0+1}^{\infty} p_k < \varepsilon$

${}^{\forall} y \in R$ を固定する。(2.9) より

${}^{\forall} t \in (0, \infty)$ に対して

$$| P\{ V_{[\theta \pi(t)]} < y \} - F(y) |$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(P\{ V_{[l_k \pi(t)]} < y \mid A_k \} - F(y) \right) p_k \right|$$

$$< \sum_{k=1}^{k_0} \left| P\{ V_{[l_k \pi(t)]} < y \mid A_k \} - F(y) \right| + \varepsilon$$

$l_k > 0$, $\pi(t) \to \infty$ $(t \to \infty)$ より $[l_k \pi(t)] \to \infty$ $(t \to \infty)$

よって (2.8) を用いて

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \left| P\{ V_{[l_k \pi(t)]} < y \} - F(y) \right| \leqq \varepsilon \qquad {}^{\forall}\varepsilon > 0 .$$

従って

$$P\{ V_{[\theta \pi(t)]} < y \} \longrightarrow F(y) \quad \text{as } t \to \infty \qquad {}^{\forall} y \in R$$

(証終)

<u>Lemma 2.4</u>

$\{h_n\}$ は $h_n \downarrow 0$ $(n \to \infty)$ となる正数列で (H1) ~ (H5) をみたすとする。$\{\delta_n\}$ は実数列で

$$|\delta_n| \leqq C_1 h_n^2 \qquad {}^{\forall} n \geqq 1$$

をみたすとする。

$\{Z_n\}$ は次をみたす独立な，$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の確率変数列とする：

$$E[Z_n] = 0 \ , \quad h_n^p E[Z_n^2] \leqq C_2 \qquad {}^{\forall} n \geqq 1$$

$$n h_n^p \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \beta_{jn}^2 E[Z_j^2] \leqq C_2 \qquad {}^{\forall} n \geqq 1 .$$

$W_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \beta_{jn} Z_j + \sum_{j=1}^{n} a_j \beta_{jn} \delta_j$ $(n \geqq 1)$ とおく.

ただし $a_n = \frac{a}{n}$ $(a>0)$.

このとき 条件 T の下で

$$\sqrt{N(t)h^p_{N(t)}}\left(W_{N(t)} - W_{[\theta\pi(t)]}\right) \xrightarrow[P]{} 0 \text{ as } t\to\infty$$

が成り立つ。

(証明 略)

3. 結果

本節では random indices の問題を考える。Theorem 3.1 の応用として $f(x)$ の信頼区間を与え その漸近的一致性を示す。

Theorem 3.1

(2.2) の a に対して (H1) ~ (H6) がみたされるとし，条件 T を仮定する。

もし $f(x)$ が有界かつ連続な偏導関数 $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ $(i, j = 1, \cdots, p)$ をもてば $f(x)>0$ なる点 x に対して

$$\sqrt{N(t)h^p_{N(t)}}\left(f_{N(t)}(x) - f(x)\right) \xrightarrow[L]{} N(0, \sigma^2(x)) \text{ as } t\to\infty$$

が成り立つ。ここに $\sigma^2(x)$ は (2.7) で与えられたものである。

（証明）

(2.6) より

$$(3.1)\quad \sqrt{N(t)h^p_{N(t)}}\,(f_{N(t)}(x)-f(x)) = V_{N(t)} + \sqrt{N(t)h^p_{N(t)}}\,\beta_{0N(t)}(f_0(x)-f(x))$$

条件 T より

$$N(t) \xrightarrow[P]{} \infty \quad \text{as} \quad t\to\infty$$

よって (2.5), (H2) より

$$(3.2)\quad \sqrt{N(t)h^p_{N(t)}}\,\beta_{0N(t)}(f_0(x)-f(x)) \xrightarrow[P]{} 0 \quad \text{as} \quad t\to\infty$$

また 条件 T より

$$\frac{N(t)}{[\theta\pi(t)]} \xrightarrow[P]{} 1 \quad \text{as} \quad t\to\infty$$

従って (H6) より

$$\frac{h_{N(t)}}{h_{[\theta\pi(t)]}} \xrightarrow[P]{} 1 \quad \text{as} \quad t\to\infty$$

故に

$$\frac{N(t)\,h^p_{N(t)}}{[\theta\pi(t)]\,h^p_{[\theta\pi(t)]}} \xrightarrow[P]{} 1 \quad \text{as} \quad t\to\infty$$

よって Lemma 2.3 を用いて

$$(3.3)\quad V_{[\theta\pi(t)]}\left\{\left(\frac{N(t)\,h^p_{N(t)}}{[\theta\pi(t)]\,h^p_{[\theta\pi(t)]}}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right\} \xrightarrow[P]{} 0 \quad \text{as} \quad t\to\infty$$

$$U_n^{(1)} = K_n(x, X_n) - E[K_n(x, X_n)]\,,\quad U_n^{(2)} = E[K_n(x, X_n)] - f(x)$$

とおくと S_n は

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \beta_{jn} U_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} a_j \beta_{jn} U_j^{(2)}$$

とかける。 Lemma 2.1 より

$$|U_n^{(2)}| \leqq C_3 h_n^2 \qquad \forall n \geqq 1$$

明らかに $\{U_n^{(1)}\}$ は独立で

$$E[U_n^{(1)}] = 0 \qquad \forall n \geqq 1$$

よって 著者 [8] の Proposition 2.5 より

(3.4) $$h_n^p E[(U_n^{(1)})^2] \leqq C_4 \qquad \forall n \geqq 1$$

(H3) より

$$n^{1-2a} h_n^p \sum_{j=1}^{n} j^{-2(a-1)} h_j^{-p} \leqq C_5 \qquad \forall n \geqq 1$$

よって (3.4), (2.4), (2.5) を用いて

$$n h_n^p \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \beta_{jn}^2 E[(U_j^{(1)})^2]$$

$$\leqq C_4 n h_n^p \sum_{j=1}^{n} j^{-2} \beta_{jn}^2 h_j^{-p} \leqq C_6 \qquad \forall n \geqq 1$$

従って Lemma 2.4 のすべての条件がみたされたから

(3.5) $$\sqrt{N(t) h_{N(t)}^p}\,(S_{N(t)} - S_{[\theta\pi(t)]}) \xrightarrow[P]{} 0 \quad \text{as } t \to \infty$$

が成り立つ。一方

$$V_{N(t)} = V_{[\theta\pi(t)]} + \sqrt{N(t)h_{N(t)}^{p}}\,(S_{N(t)} - S_{[\theta\pi(t)]})$$

$$+ V_{[\theta\pi(t)]}\left\{\left(\frac{N(t)\,h_{N(t)}^{p}}{[\theta\pi(t)]\,h_{[\theta\pi(t)]}^{p}}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right\}$$

だから (3.1), (3.2), (3.3), (3.5) と Lemma 2.3 より

$$\sqrt{N(t)h_{N(t)}^{p}}\,(f_{N(t)}(x) - f(x)) \xrightarrow[L]{} N(0, \sigma^2(x)) \quad \text{as } t\to\infty$$

（証終）

Theorem 3.1 より次が成り立つ。

<u>Corollary 3.1</u>

$^\forall\alpha \in (0,1)$ が与えられたとし，$D = D_\alpha > 0$ は $\Phi(D) - \Phi(-D) = \alpha$ をみたすとする。ただし Φ は $N(0,1)$ の分布関数である。(2.2) の a に対して (H1) ～ (H6) が みたされるとする。

$\theta \equiv 1$ として 条件 T が成り立つと仮定する。

$f(x)$ は 有界かつ連続な偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ $(i, j = 1, \cdots, p)$ をもつとする。

$t \in (0, \infty)$ に対して $d(t)$ は $\lim_{t\to\infty} d(t) = 0$ をみたす正数列とし

$$I_{n,t}(x) = [\, f_n(x) - d(t),\ f_n(x) + d(t)\,]$$

とおく。 もし

$$d^2(t)\,[\pi(t)]\,h^p_{[\pi(t)]} \xrightarrow[P]{} D^2\sigma^2(x) \quad \text{as } t \to \infty$$

ならば $f(x) > 0$ なる点 x に対して

$$P\{\, f(x) \in I_{N(t),t}(x) \,\} \longrightarrow \alpha \quad \text{as } t \to \infty$$

が成り立つ。

(証明)

条件 T より

$$(3.6) \qquad \frac{N(t)}{[\pi(t)]} \xrightarrow[P]{} 1 \quad \text{as } t \to \infty$$

よって (H 6) より

$$\frac{h_{N(t)}}{h_{[\pi(t)]}} \xrightarrow[P]{} 1 \quad \text{as } t \to \infty$$

従って (3.6) より

$$(3.7) \qquad \frac{N(t)\, h^p_{N(t)}}{[\pi(t)]\, h^p_{[\pi(t)]}} \xrightarrow[P]{} 1 \quad \text{as } t \to \infty$$

(3.7) と仮定より

$$d^2(t)\, N(t)\, h_{N(t)}^{p} \xrightarrow[P]{} D^2\sigma^2(x) \quad \text{as } t \to \infty$$

よって

$$(3.8) \qquad \frac{d(t)\sqrt{N(t)\, h_{N(t)}^{p}}}{D\, \sigma(x)} \xrightarrow[P]{} 1 \quad \text{as } t \to \infty$$

従って Theorem 3.1 より

$$\frac{\sqrt{N(t)\, h_{N(t)}^{p}}\,(f_{N(t)}(x) - f(x))}{\sigma(x)} \xrightarrow[L]{} N(0,1) \quad \text{as } t \to \infty$$

よって (3.8) より

$$\frac{D\,(f_{N(t)}(x) - f(x))}{d(t)} \xrightarrow[L]{} N(0,1) \quad \text{as } t \to \infty$$

故に

$$P\{\, |f_{N(t)}(x) - f(x)| \leqq d(t) \,\}$$

$$= P\left\{ \frac{D\,|f_{N(t)}(x) - f(x)|}{d(t)} \leqq D \right\}$$

$$\longrightarrow \Phi(D) - \Phi(-D) = \alpha \quad \text{as } t \to \infty$$

(証終)

<u>Corollary 3.2</u>

$$h_n = n^{-\frac{r}{p}}, \quad \max\left\{\frac{p}{p+4},\, 1-2a\right\} < r < 1, \quad 0 < a \leqq 1$$

とおく。$f(x)$ は有界かつ連続な偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\, \partial x_j}$

$(i, j = 1, \cdots, p)$ をもつと仮定する。

$t \in (0, \infty)$ に対して

$d(t)$ は正数で $\lim_{t \to \infty} d(t) = 0$ をみたし

$N(t)$ は $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上で定義された正の整数値をとる確率変数で

$$\frac{N(t)}{(d(t))^{2/(r-1)}} \xrightarrow[P]{} (D\sigma(x))^{\frac{2}{1-r}} \quad \text{as } t \to \infty$$

をみたすとする。ここに D は Corollary 3.1 にあるものである。このとき $f(x) > 0$ なる点 x に対して

$$P\{ f(x) \in I_{N(t), t}(x) \} \longrightarrow \alpha \quad \text{as } t \to \infty$$

が成り立つ。

(証明)

2 節の例より (H1) ~ (H6) がみたされる。

$$(3.9) \qquad \pi(t) = (D\sigma(x)/d(t))^{\frac{2}{1-r}}$$

とおくと 仮定より

$$N(t)/\pi(t) \xrightarrow[P]{} 1 \quad \text{as } t \to \infty$$

$$(3.10) \qquad \pi(t) \to \infty \quad \text{as } t \to \infty$$

よって $\theta \equiv 1$ として条件 T が成り立つ。

(3.9), (3.10) より

$$d^2(t)[\pi(t)] h^p_{[\pi(t)]} \longrightarrow D^2\sigma^2(x) \quad \text{as } t \to \infty$$

よって Corollary 3.1 のすべての条件がみたされたから Corollary 3.1 より Corollary 3.2 が成り立つ。

(証終)

参考文献

[1] Aldous, D. J. (1978). Weak convergence of randomly indexed sequences of random variables. Math. Proc. Camb. Philos. Soc., 83, 117-126.

[2] Anscombe, F. J. (1952). Large-sample theory of sequential estimation. Proc. Camb. Philos. Soc., 48, 600-607.

[3] Carroll, R. J. (1976). On sequential density estimation. Z. Wahrsch. Verw. Geb., 36, 137-151.

[4] Chow, Y. S., and Robbins, H. (1965). On the asymptotic theory of fixed-width sequential confidence intervals for the mean. Ann. Math. Statist., 36, 457-462.

[5] Csörgő, M., and Fischeler, R. (1973). Some examples and results in the theory of mixing and random-sum central limit theorems. Periodica Math. Hungar., 3, 41-57.

[6] Devroye, P. (1979). On the pointwise and the integral convergence of recursive kernel estimates of probability densities. Util. Math., 15, 113-128.

[7] Govindarajulu, Z. (1983). An extension of Anscombe-Rényi theorem with applications. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 28, 587-592.

[8] Isogai, E. (1980). Strong consistency and optimality of a sequential density estimator. Bull. Math. Statist., 19, No. 1∿2, 55-69.

[9] Isogai, E. (1981). Stopping rules for sequential density estimation. Bull. Math. Statist., 19, No. 3∿4, 53-67.

[10] Isogai, E. (1984). Joint asymptotic normality of nonparametric recursive density estimators at a finite number of distinct points. J. Japan Statist. Soc., 14, 125-135.

[11] Prakasa Rao, B. L. S. (1983). Nonparametric functional estimation. Academic Press.

[12] Rényi, A. (1960). On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables. Acta Math. Acad, Sci. Hungar., 11, 97-102.

[13] Stute, W. (1983). Sequential fixed-width confidence intervals for a nonparametric density function. Z. Wahrsch. Verw. Geb., 62, 113-123.

[14] Wolverton, C. T., and Wagner, T. J. (1969). Asymptotically optimal discriminant functions for pattern classification. IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-15, 258-265.