数理解析研究所講究録
557巻 1985年 138-152

A Stopping Problem in a Dynamic Stock Option Model with a Random Walk

南山大・経営 沢木勝茂 (Katsushige Sawaki)
〃 〃 新海哲哉 (Tetsuya Shinkai)

1. Introduction

証券取引をする際に投資家が利用可能な手段の一つに、コール・オプションと呼ばれる契約がある。コール・オプションとは、あらかじめ定められた銘柄の株式を定められた期間内に、一定の価格(株式の市場価格とは独立に定められた価格)で一度だけ購入することができる権利を保証した契約である。本稿では、こうしたコール・オプションを保有している個人投資家が特定の銘柄の株式をできるだけ低価格で購入しようとしているケースを考える。このとき、市場での株価の変動がランダム・ウォークに従うとする。——すなわち、X_tを残り計画期間数がtであるときの株式の市場価格とし、S_tがその期の経済状態を表すものとすると、X_tは価格変動式

$$X_t^{S_{t+1}} = X_{t+1} + Z_{t+1}^{S_{t+1}}$$

で与えられると仮定する。ただし，$Z_{t+1}^{S_{t+1}}$は前の期の経済状態S_{t+1}が決まることによって分布が決定される確率変数で前期から今期までの株式市場価格の変動分を表す。そこで投資家がいつ市場で株式を購入するか、またはオプションを実行すれば株式の期待購入価格を最小化できるかを考える。

こうした問題は、計画期間内の任意の期で、投資家が市場で株式を購入するか、或いはオプションを実行することにより株式を手に入れるか、または次の期の市場価格をみてから決めるかという最適停止問題として定式化されうる。

そこで本稿では、経済状態が既知の推移確率をもつマルコフ連鎖に従って移るとき、推移確率及び価格変動分の分布に関する諸仮定のもとでの投資家の最適購入政策を考える。また価格変動分の期待値が負であるケースの最適政策を考え、その場合、価格変動分が平均μ_t，分散σ^2をもつ正規分布であると仮定して、最適購入価格方程式を導出し、そのパラメータに関する感度分析を行う。

2. Model Formulation

全計画期間をTとし、以下に定義する変数の添字tはすべて残りの計画期間数を表すものとする。ある投資家が計画期間Tのうち任意の時点で、特定の銘柄の株式を定められた価格cで購入できるコール・オプション契約をしているとしよう。さらにその投資家は各期首に株式の市場価格を知り、市場で株式を購入するかまたはオプションを実行するかどちらかの方法で株式を購入するか、または次の期の市場価格を知るまで購入を見合わせるかを決定しなければならないとする。そこで以下のようなnotationsを用いる。先にも述べたようにすべての変数の添字tは残りの計画期間数を表し、これをt期と呼ぶことにする。($t=0,1,\cdots,T$)

S_t：t期の状態でその実現値をi, $i=1,\cdots,S$とする。

またS$_t$は既知の推移確率

$$P_{ij}=P_r\{S_{t-1}=j\mid S_t=i\}$$

をもつマルコフ連鎖とする。

X_t：t期の株式の市場価格。

Z_t：株価の変動分でS_tによって分布が決まる独立(tについて)な確率変数で、$S_t=i$のとき分布$F_i(\cdot)$をもつ。

c：コール・オプションの行使価格。

また株価の変動式として次の式を仮定する。

(1) $$X_t = X_{t+1} + Z_{t+1}^{S_{t+1}}$$

ただし，$E[|Z_t^i|] < \infty$, $\forall t, i$.

ここで、$V_n(i, x)$ を次のように定義する。

$V_n(i, x)$ ＝満期まで n 期残っていて現在の状態が i で株価が x のとき最適政策を実行したときの最小期待購入費用（価格）。

最適性の原理より、$V_n(i, x)$ は次式を満たす。

(2) $$V_n(i,x) = \min\left\{x, \sum_{j=1}^{S} P_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} V_{n-1}(j, x+z)\, dF_i(z)\right\}.$$
$$, n = 1, 2, \cdots, T,$$

ただし.

(3) $$V_0(i,x) = \min\{x, c\},\ V_n(i,x) = 0 \text{ for } x<0.$$

3. Optimal Purchasing Policies

この節では次のような仮定のもとで、最適購入政策を考える。

《仮 定》

(A) 各kに対して，$\sum_{j=k}^{S} P_{ij}$ は iの増加関数。

(B) $F_1(z) \geq F_2(z) \geq \cdots \geq F_S(z)$ ，$\forall z$ 。

注) 状態を表す数が大きければ大きいほど良い経済状態を意味する。すなわち1が最悪、Sが最良の状態である。仮定(B)は経済状態が良いほどその期の価格変動の期待値が大きくなることを表し、仮定(A)は現在の経済状態が良ければ良いほど，それ以上の状態へ推移する確率が大きくなることを意味している。

<u>Lemma 1</u>

(i) 各iとnに対して、$V_n(i,x)$はxの凹増加関数で、$V_n(i,x)-x$はxの凹減少関数である。

(ii) 各iとxに対して，$V_n(i,x)$はnの減少関数である。

(iii) 各nとxに対して，$V_n(i,x)$はiの増加関数である。

(証明) ここで

$$H_n(i,x) \equiv V_n(i,x) - x$$

(4)

$$J_n(i,x) \equiv \sum_{j=1}^{s} P_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} H_{n-1}(j, x+z) dF_i(z) + E[Z_n^i]$$

とすれば、(2), (3)式は次のように書ける。

(5) $H_n(i,x) = \min\{0, J_n(i,x)\}$

(6) $H_0(i,x) = \min\{0, c-x\}$ 。

命題(i)から証明することにしよう。nについての帰納法を用いる。まず単調性から示す。$n=0$について，(3)，(6)式より明らかに$V_0(i,x)$，$H_0(i,x)$はそれぞれxの増加関数、減少関数である。$V_{n-1}(i,x)$，$H_{n-1}(i,x)$が各iに対してそれぞれxの増加関数、減少関数であると仮定すると、(2)式より、$x_1 \leqq x_2$に対して

$$\begin{aligned} V_n(i,x_1) &= \min\{x, \sum_{j=1}^{s} P_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} V_{n-1}(j, x_1+z) dF_i(z)\} \\ &\leqq \min\{x, \sum_{j=1}^{s} P_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} V_{n-1}(j, x_2+z) dF_i(z)\} \\ &= V_n(i,x_2) \text{。 また(4), (5)式より} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_n(i,x_1) &= \min\{0, \sum_{j=1}^{s} P_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} H_{n-1}(j, x_1+z) dF_i(z) + E[Z_n^i]\} \\ &\geqq \min\{0, \sum_{j=1}^{s} P_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} H_{n-1}(j, x_2+z) dF_i(z) + E[Z_n^i]\} \end{aligned}$$

$$= H_n(i, x_2)$$

また、凹性については、(3),(6)式から、$V_0(i,x)$, $H_0(i,x)$ はxについて凹であるから、$V_{n-1}(j,x)$, $H_{n-1}(j,x)$ がxについて凹であると仮定すると、x^1キx^2, $0 \leqq \alpha \leqq 1$, $y_1 = x^1 + z$, $y_2 = x^2 + z$とすれば、

$$V_{n-1}(j, \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2 + z)$$

$$= V_{n-1}(j, \alpha(x^1 + z) + (1-\alpha)(x^2 + z))$$

$$= V_{n-1}(j, \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2)$$

$$\geqq \alpha V_{n-1}(j, y_1) + (1-\alpha)V_{n-1}(j, y_2)$$

$$= \alpha V_{n-1}(j, x^1 + z) + (1-\alpha)V_{n-1}(j, x^2 + z)$$

したがって $V_{n-1}(j, x+z)$ はxに対して凹である。同様にして、$\sum_{j=1}^{S} P_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} V_{n-1}(j, x+z) dF_i(z)$が各$i$に対して$x$の凹関数であることは容易に示せる。ゆえに、(2),(4)式より $V_n(i,x)$, $H_n(i,x)$は各iに対してxの凹関数である。

次に(iii)について証明を行う。(4),(5)式から、$c \geqq x$のとき

$$H_0(i,x) = 0 \quad \text{かつ}$$

$$H_1(i,x) = \min\{0, E[Z_n^i]\} \leqq 0$$

ゆえに $H_1(i,x) \leqq H_0(i,x), \forall i$。

また $c < x$のとき

(4), (5), (6)式より

$$H_1(i,x)=\min\left\{0,\ \sum_{j=1}^{S}P_{ij}\int_{-\infty}^{\infty}(c-x-z)dF_i(z)+\int_{-\infty}^{\infty}z\,dF_i(z)\right\}$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{S}P_{ij}\left\{(c-x)\int_{c-x}^{\infty}dF_i(z)-\int_{c-x}^{\infty}z\,dF_i(z)\right\}+\int_{-\infty}^{\infty}z\,dF_i(z)$$

$$=c-x+\int_{-\infty}^{c-x}(x-c+z)dF_i(z)$$

$$=c-x+\left\{(x-c+z)F_i(z)\Big|_{-\infty}^{c-x}-\int_{-\infty}^{c-x}F_i(z)dz\right\}$$

$$=c-x-\int_{-\infty}^{c-x}F_i(z)dz$$

$$\leqq c-x=H_0(i,x).$$

$H_{n-2}(i,x)\geqq H_{n-1}(i,x)$, $\forall i,x$ と仮定すると、

(4), (5)式より

$$J_n(i,x)=\sum_{j=1}^{S}P_{ij}\int_{-\infty}^{\infty}H_{n-1}(j,x+z)dF_i(z)+E[Z_n^i]$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{S}P_{ij}\int_{-\infty}^{\infty}H_{n-2}(j,x+z)dF_i(z)+E[Z_{n-1}^i]$$

ただし，Z_n^iはiのみに依存し、nに独立であると仮定したから，$E[Z_n^i]=E[Z_{n-1}^i]$ 。それゆえ上の不等式が成立する。ゆえに $H_n(i,x)\leqq H_{n-1}(i,x)$, $\forall i,x$, また(4)式より(ii)が成立する。

最後に(iii)を示す。$n=0$ については、(4), (6)式より明らかに成立する。$n-1$ について(iii)の成立を仮定すれば、

$H_{n-1}(i,x)$, $J_{n-1}(i,x)$がiについて増加であることになる。ゆえに、

$$J_n(i,x)=\sum_{j=1}^{S}p_{ij}\int_{-\infty}^{\infty}H_{n-1}(j,x+z)\,dF_i(z)+E[Z_n^i]$$

$$=\sum_{k=1}^{S}\sum_{j=k}^{S}p_{ij}\int_{-\infty}^{\infty}\{H_{n-1}(k,x+z)-H_{n-1}(k-1,x+z)\}\,dF_i(z)+E[Z_n^i]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{S}\{H_{n-1}(k,x+z)-H_{n-1}(k-1,x+z)\}\sum_{j=k}^{S}p_{ij}\,dF_i(z)+E[Z_n^i]$$

$$\leqq\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{S}\{H_{n-1}(k,x+z)-H_{n-1}(k-1,x+z)\}\sum_{j=k}^{S}p_{i+1,j}\,dF_{i+1}(z)+E[Z_n^{i+1}]$$

$$=J_n(i+1,x)$$

ただし、$H_{n-1}(0,x)\equiv 0$, $\forall x$. また3番目の等号は帰納法の仮定より成立し、不等号は仮定(A),(B)より成立する。ゆえに(4)式より(iii)が成立する。

[証明終り]

ここで次のように$a_n(i)$を定義する。

集合$\{x : J_n(i,x)>0\}\neq\phi$ならば、

(7) $a_n(i)\equiv\sup_x\{x : J_n(i,x)>0\}$.

$\{x : J_n(i,x)>0\}=\phi$ならば、

(8) $a_n(i)\equiv-\infty$, $\quad n=1,2,\cdots,T$.

ただし　$a_0(i)=c$ 。

<u>Theorem 1</u>　n 期において，$X_n=x$，$S_n=i$ が観察されたとすると，投資家は次のような最適政策をもつ。

もし，$x < a_n(i)$ ならば，市場価格かオプション実行価格 c のうち低いほうで株式を購入する。
もし，$x \geqq a_n(i)$ ならば、もう1期購入を延期する。

(証明) もし集合 $\{x : J_n(i,x) > 0\} \neq \phi$ ならば，Lemma 1 の(i)と $a_n(i)$ の定義から定理で述べられているような実数 $a_n(i)$ 及び最適政策が存在する。また集合 $\{x : J_n(i,x) > 0\} = \phi$ ならば、定義より $a_n(i) = -\infty$ であるから定理は成立する。

[証明終り]

<u>Theorem 2</u>　$a_n(i)$ は次の性質をもつ。

(i)　$a_0(i) \geqq a_1(i) \geqq \cdots \geqq a_T(i)$, $\forall i$.

(ii)　$a_n(1) \leqq a_n(2) \leqq \cdots \leqq a_n(S)$, $\forall n$.

(証明) Lemma 1 の(ii), (iii)及び $a_n(i)$ の定義より明らか。

[証明終り]

次に市場価格の変動分Z_n^iが、負の平均をもつケースを考える。すなわち，$E[Z_n^s] \leqq 0$，$\forall n$と仮定する。

<u>Theorem 3</u>　$E[Z_n^s] \leqq 0$，$\forall n$ならば，満期前に市場で株式を購入することは最適でない。

(証明) (4)，(6)式より

$$J_1(i,x) = \sum_{j=1}^{s} P_{ij} \int_{c-x}^{\infty} (c-x-z)\, dF_i(z) + \int_{-\infty}^{\infty} z\, dF_i(z) \leqq 0$$

ただし、上の不等号は定理の仮定と仮定(B)より成立。
ゆえに、Lemma 1 の(ii)から、$J_n(i,x) \leqq 0$，$\forall i, x$。
したがって集合 $\{x : J_n(i,x) > 0\} = \phi$，$n=1,\cdots,T, \forall i$が成立。定義より　$a_n(i) = -\infty$，$n=1,\cdots,T, \forall i$となる。またTheorem1で$a_0(i) = c$ だから定理が成立する。

[証明終り]

3. Derivation of the minimal purchasing price formula

この節では，t期の経済状態が1個のみの場合を考える。すなわち，$Z_t^i = Z_t$ とする。各Z_tは独立な正規分布$N(\mu_t, \sigma)$に従うと仮定し，さらに $\mu_t \leqq 0$，$\forall t$ とする。するとTheorem 3から次の定理を得る。

Theorem 4　$X_T = x$ が所与のとき，最小期待購入価格 V は、

(9)　$V(x, c, T, \mu, \sigma) = c - \sigma\sqrt{T}\{\varphi(\alpha) + \alpha\Phi(\alpha)\}$,

ただし，$\mu \equiv \sum_{t=1}^{T}\mu_t$ ，$\alpha = (c - x - \mu)/(\sigma\sqrt{T})$

$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-t^2/2\}$ ，$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t}\varphi(s)ds$ とする。

(証明) Theorem 3 から．

$$
\begin{aligned}
V(x, c, T, \mu, \sigma) &= E \min\{X_0, c \mid X_T = x\} \\
&= E \min\{x + \sum_{t=1}^{T} Z_t, c\} \\
&= x + \mu + \sigma\sqrt{T} \cdot E\Big[\min\Big\{\Big(\sum_{t=1}^{T} Z_t - \mu\Big)/(\sigma\sqrt{T}), \\
&\qquad (c - x - \mu)/(\sigma\sqrt{T})\Big\}\Big] \\
&= x + \mu + \sigma\sqrt{T} \cdot E \min\{Z, \alpha\}, \\
&\qquad \Big(Z \equiv \Big(\sum_{t=1}^{T} Z_t - \mu\Big)/(\sigma\sqrt{T}) \approx N(0, 1)\Big) \\
&= x + \mu + \sigma\sqrt{T}\big(-\varphi(\alpha) + \alpha - \alpha\Phi(\alpha)\big) \\
&= c - \sigma\sqrt{T}\,[\varphi(\alpha) + \alpha\Phi(\alpha)] ,
\end{aligned}
$$

ただし、$\alpha = (c - x - \mu)/(\sigma\sqrt{T})$ ，$\mu = \sum_{t=1}^{T}\mu_t$ ，

$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-t^2/2\}$

$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t}\varphi(s)\,ds$.　　　　［証明終り］

(注) $T \to \infty$ のとき $V(x, c, T, \mu, \sigma) \to c$ となる。

(証明) $E[Z_t] < \infty, \forall t$ と仮定したから、

$$\mu = \sum_{t=1}^{T} \mu_t = T\hat{\mu}$$ なる $\hat{\mu}$ が存在する。

そこで、$$\lim_{T\to\infty} \alpha = \lim_{T\to\infty} \frac{c - x - T\hat{\mu}}{\sigma\sqrt{T}} = \lim_{T\to\infty} \frac{-\hat{\mu}}{\frac{\sigma}{2\sqrt{T}}} = -\infty,$$

したがって $T \to \infty$ のとき $\sqrt{T} \to \infty$ よりも $\varphi(\alpha) \to 0, \Phi(\alpha) \to 0$ のほうが収束が速いので、

$$\lim_{T\to\infty} V(x, c, T, \mu, \sigma)$$
$$= \lim_{T\to\infty} \{c - \sigma\sqrt{T}[\varphi(\alpha) + \alpha\Phi(\alpha)]\}$$
$$= c$$

[証明終り]

次にTheorem 4で導出したVのパラメータに関する感度分析を行う。

<u>Proposition 5</u>

$$\frac{\partial V}{\partial x} \geqq 0, \frac{\partial V}{\partial c} \geqq 0, \frac{\partial V}{\partial T} \leqq 0, \frac{\partial V}{\partial \mu} \geqq 0, \frac{\partial V}{\partial \sigma} \leqq 0.$$

(証明) $$\frac{\partial V}{\partial x} = -\sigma\sqrt{T} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\varphi(\alpha) + \Phi(\alpha) + \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha}\Phi(\alpha)\right]$$

$$= -\alpha\varphi(\alpha) + \Phi(\alpha) + \alpha\Phi(\alpha) = \Phi(\alpha) \geqq 0.$$

同様にして、

$$\frac{\partial V}{\partial c} = 1 - \Phi(\alpha) \geqq 0 .$$

また Lemma 1の(ii)と(4)式から VはTの減少関数。

$$\frac{\partial V}{\partial \mu} = -\sigma\sqrt{T} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \Phi(\alpha)$$

$$= -\sigma\sqrt{T} \cdot (-1/(\sigma\sqrt{T}))\Phi(\alpha) \geqq 0$$

同様にして,

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = -\sqrt{T}\varphi(\alpha) \leqq 0 .$$

[証明終り]

4. Concluding Remarks

本稿では、Taylor[5]のモデルを多状態から成る停止のあるマルコフ決定過程の問題として定式化した。すなわち、状態の推移確率と株式の市場価格の変動分に対する仮定(A),(B)のもとで、最適政策は、その期の状態と期に依存する臨界値によって特徴づけられることを示し、また,市場価格変動分が非正の平均をもつときは、投資家が満期前に市場で株式を購入せずに,最終期まで待って、その期の株価とオプション実行価格のうちの低いほうで購入することが最適であること

を示した。また t 期（残り計画期間の数が t である）の状態が1つであり、かつ変動分 z_t が非正の平均 μ_t および分散 σ^2 をもつ正規分布に従うときの最小期待購入価格式を導出し、そのパラメータに関する感度分析を行った。

References

[1] Black, f. and M. Sholes; The Pricing of Option and Corporate Liabilities, *J. of Political Economy*, Vol. 81, 1973, pp. 637-659.

[2] DeGroot, M. H.; *Optimal Statistical Decisions*, McGraw-Hill, New York, 1970.

[3] Ross, S.; *Introduction to Stochastic Dynamic Programming*, Academic Press, 1983.

[4] Taylor, H. M.; Evaluating a Call Option and Optimal Timing Strategy in the Stock Market, *Management Science*, Vol. 14, 1967, pp. 111-120.

[5] Taylor, H. M.; Bounds for Stopped Partial Sums, *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 43, 1972, pp. 733-747.

[6] Sawaki, K. and Y. Tabata, Optimal Exercise Policies for A Stock Option Model, The 13th International Colloqu. on Management Sciences, Osaka, 1984.