

時間平均多重連鎖セミ・マルコフ決定過程における  
修正政策及復法の収束について

甲南大学 理学部 大野勝久 (Katsuhisa Ohno)

1. はじめに

有限状態, 有限決定セミ・マルコフ決定過程において時間平均利得を最大にする最適定常政策を決定するアルゴリズムとしては, 政策及復法 (PIM), 逐次近似法 (SAM), 線形計画法 (LP), 修正政策及復法 (MPIM) が知られている [1]. 特に PIM はよく知られているが, PIM, LP は共に多状態問題にたいしては適用が困難であり, これら問題にたいしては SAM およびその一般化としての MPIM が有力な手法として研究されてきた。しかし SAM, MPIM は多重連鎖問題にたいしては無効であった。最近 Schweitzer [2] は多重連鎖問題にたいする SAM を提案し, その収束を示している。しかしながらそのアルゴリズムは複雑であり, 実用的とは思われない。本論文ではより一般的に MPIM の収束について論ずる。

## 2. 政策及復法

以下の記号を使用する。

$I = \{1, 2, \dots, M\}$  : 状態空間

$K_i (i \in I)$  : 状態  $i$  でとりうる決定の有限集合

$r_i(k) (i \in I, k \in K_i)$  :  $i$  において  $k$  をとってえられる平均利得

$P_{ij}(k) (i, j \in I, k \in K_i)$  :  $i$  において  $k$  をとったとき  $j$  へ遷移する確率

$T_i(k) (i \in I, k \in K_i)$  : 平均遷移時間 ( $T_i(k) > 0$  とする)

$F$  : 定常政策  $f = (f_1, f_2, \dots, f_M)$  の集合 ( $f_i \in K_i, i \in I$ )

$r(f) = (r_1(f_1), r_2(f_2), \dots, r_M(f_M))^T$  ( $T$  は転置を表わす)

$P(f) = (P_{ij}(f_i))$  :  $f$  にたいする遷移確率行列

$T(f) = \text{diag}(T_i(f_i))$

$g(f)$  : 定常政策  $f$  のゲイン

$v(f)$  : 定常政策  $f$  の相対値

$g(f), v(f)$  は,  $P(f)$  の各エルゴード部分連鎖に属する 1 つの状態  $s$  にたいして  $v_s = 0$  とおいて, 次の連立一次方程式を解いてえられる。

$$g = P(f)g \quad , \quad v = r(f) + P(f)v - T(f)g \quad (1)$$

ここで,  $0 < \alpha < 1$ ,

$$0 < \tau \leq (1-\alpha) \min_{i,k} \{ T_i(k) / (1-P_{ii}(k)) ; P_{ii}(k) < 1 \} \quad (2)$$

をみたす任意の  $\alpha, \tau$  について

$$\Omega(f) = \tau T(f)^{-1} \quad (3)$$

と置き、Schweitzer の data 変換:

$$\hat{P}(f) = I - \Omega(f) + \Omega(f)P(f), \quad \hat{V}(f) = \Omega(f)r(f) \quad (4)$$

を用いければ (1)式は

$$g = \hat{P}(f)g, \quad v = \hat{V}(f) + \hat{P}(f)v - g \quad (5)$$

となる。ただし、(4)式の  $I$  は単位行列であり、(5)式の解

$\hat{g}, \hat{v}$  は  $\hat{g} = \tau g(f), \hat{v} = v(f)$  となり、任意の  $f \in F$  について

$$\hat{P}(f) \geq \alpha I \quad (6)$$

をみたす。すなわち、セミ・マルコフ決定過程は上記 data 変換で任意の  $f \in F$  について (6)式をみたす同値なマルコフ決定過程に変換される。

以下記号を簡略化すため変換されたマルコフ決定過程について再び  $r(f), P(f)$  を用いることにする。すなわち

$$g = P(f)g, \quad v = r(f) + P(f)v - g \quad (7)$$

の解が  $g(f), v(f)$  であり、 $P(f)$  は任意の  $f \in F$  について

$$P(f) \geq \alpha I \quad (8)$$

をみたす。また最大ゲイン  $g^* = g(f^*), v^* = v(f^*)$  のみたす最適方程式は

$$g_i^* = \max_{k \in K_i} \left\{ \sum_{j \in I} P_{ij}(k) g_j^* \right\} \quad (i \in I) \quad (9)$$

$$g_i^* + v_i^* = \max_{k \in L_i} \left\{ v_i(k) + \sum_{j \in I} p_{ij}(k) v_j^* \right\} \quad (i \in I) \quad (10)$$

で与えられる。ここで  $L_i = \{k \in K_i; (9) \text{ 式右辺を最大化する } k\}$  である。

### [補題 1]

$P(f^*)$  のエルゴード部分連鎖の状態集合を  $E_r^*$  ( $r=1, \dots, R^*$ ), 過渡状態の集合を  $T^*$  とし,  $g_r^* = g_i(f^*)$  ( $i \in E_r^*$ ) とおく。

$$g_1^* < g_2^* < \dots < g_{R^*}^*$$

ならば,

i)  $T^* \ni i$  に対して  $g_1^* \leq g_i(f^*) \leq g_{R^*}^*$  である。

ii)  $E_r^* \ni i$  に対して

$$f_i \in D_i = K_i - \{k \in K_i; E_1^* \cup \dots \cup E_{r-1}^* \cup \{i \in T^*; g_i(f^*) \leq g_r^*\} \ni j \text{ に対して } p_{ij}(k) > 0 \}$$

であり,  $E_r^*$  は任意の  $f_i \in D_i$  ( $i \in E_r^*$ ) で閉じている。

(証明) i) は明らかであり,  $f_i \notin D_i$  ( $i \in E_r^*$ ) ならば  $E_r^*$  がエルゴード部分連鎖であることと矛盾することから ii) の前半が示される。  $E_r^*$  が閉じていない  $f_i \in D_i$  ( $i \in E_r^*$ ) が存在したとすれば, (9) 式より

$$g_r^* = \max_{k \in K_i} \left\{ \sum_{j \in I} p_{ij}(k) g_j(f^*) \right\} \geq g_r^* \sum_{j \in E_r^*} p_{ij}(f_i) + \sum_{j \notin E_r^*} p_{ij}(f_i) g_j(f^*) > g_r^*$$

となり, 矛盾である。

多重連鎖マルコフ決定過程の最適定常政策  $f^*$  を求める最もよく知られた手法は次の Howard の政策反復法である。

1. 初期政策  $f^0$  を与え,  $m=0$  とおく。

2. (値決定ルーチン)

$P(f^m)$  の各エルゴード部分連鎖に属する 1 つの状態  $s$  で  $v_s = 0$  とおき, (7) 式を解いて  $g(f^m), v(f^m)$  を定める。

3. (政策改良ルーチン) 各  $i \in I$  で

$$L_i^{m+1} = \{ \sum_{j \in I} P_{ij}(k) g_j(f^m) \text{ を最大化する } k \in K_i \}$$

$$F_i^{m+1} = \{ v_i(k) + \sum_{j \in I} P_{ij}(k) v_j(f^m) \text{ を最大化する } k \in L_i^{m+1} \}$$

を定め,  $f_i^m \in F_i^{m+1}$  ならば  $f_i^{m+1} = f_i^m$  とおき, さもなければ

$f_i^m$  を  $F_i^{m+1}$  の適当な要素ととる。全ての  $i \in I$  で  $f_i^{m+1} = f_i^m$

となれば停止。  $f^{m+1}$  は最適政策  $f^*$  であり, 最大ゲイン

$g^* = g(f^m)$ , 相対値  $v^* = v(f^m)$  である。さもなければ  $m =$

$m+1$  とおいてステップ 2 へ。

3. 修正政策及復法

PIM の値決定ルーチンを有限回の逐次近似法でおきかえた

手法が MPIM である。  $F \ni f$  に対して初期ベクトル  $w^0$

ではじまる次の逐次近似法  $\{w^l; l=0, 1, \dots\}$  を考える。

$$w^{l+1} = v(f) + P(f)w^l. \quad (11)$$

このとき,  $l=0, 1, \dots$  に対して

$$w^l = l g(f) + v(f) + P(f)^l (w^0 - v(f)) \quad (12)$$

がなりたち [3], 次の補題が成立する。

[補題 2]

$P(f)$  のエルゴード部分連鎖の状態集合を  $E_r (r=1, \dots, R)$ , 過渡状態の集合を  $T$  とし,  $g_r = g_i(f) (i \in E_r)$ ,  $g_1 < g_2 < \dots < g_R$  とする。このとき

$$i) \quad \lim_{l \rightarrow \infty} w^{l+1} - w^l = g(f) \quad (13)$$

ii)  $E_r \ni i, s_r$  にたいして,  $v_{s_r}(f) = 0$  であれば,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} w_i^l - w_{s_r}^l = v_i(f) \quad (14)$$

であり,  $s_p \in E_p (p < r)$  であれば,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} w_i^l - w_{s_p}^l = \infty. \quad (15)$$

$$iii) \quad P(f) = \begin{pmatrix} Q(f) & 0 \\ R(f) & S(f) \end{pmatrix} \quad (16)$$

とする。ここで  $Q(f)$  は  $E_1 \cup \dots \cup E_R$  に対応し,  $R(f), S(f)$  は  $T$  に対応する。このとき

$$v_i^l = w_i^l - w_{s_r}^l \quad (i \in E_r, r=1, \dots, R) \quad (17)$$

$$g_i^l = w_i^l - w_i^{l-1} \quad (i \in I) \quad (18)$$

とあり,  $v_t, g_t$  で  $T$  に対応する部分ベクトルを表わし,

$u_i^{l+1} (i \in T)$  を  $u_i^l = w_i^l (i \in T)$  から

$$u^{l+1} = R(f)u^l - g_t^l + S(f)u^l \quad (19)$$

で求めれば,  $T \ni i$  にたいして

$$\lim_{l \rightarrow \infty} u_i^l = v_i(f). \quad (20)$$

おぼろりたつ。

(証明) (8) 式より

$$\lim_{l \rightarrow \infty} P(f)^l = P^*(f) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N P(f)^t, \quad P^*(f)P(f) = P(f)P^*(f) = P^*(f) \quad (21)$$

であるから、i) は (12) 式より明らかである。i) より

$E_r \ni i$  について

$$g_r = \lim_{l \rightarrow \infty} w_i^{l+1} - w_i^l = \lim_{l \rightarrow \infty} v_i(f) + \sum_{j \in I} P_j(f) (w_j^l - w_{sr}^l) - (w_i^l - w_{sr}^l) \quad (22)$$

であり、(7) 式がなりたつことから (14) 式がえられる。

(15) 式は (12) 式から

$$\lim_{l \rightarrow \infty} w_i^l - w_{sp}^l = l(g_r - g_f) + v_i(f) + P(f)^l (w^0 - v(f))_i - P(f)^l (w^0 - v(f))_{sp}$$

とあることから導かれる。ii) の証明同様、(17)、(18) 式の  $v_i^l$ ,  $g_i^l$  は  $l \rightarrow \infty$  で  $v_i(f)$  ( $i \in E_r$ ),  $g_i(f)$  へ収束し、 $S(f)^l \rightarrow 0$  ( $l \rightarrow \infty$ ) から (20) 式がえられる。

PIM の値決定ルーチンに上記逐次近似法を用いれば MPIM がえられる。しかし補題 1 で述べた一般的な多重連鎖問題にたいする MPIM は複雑であり、以下では簡単のため  $R^* \leq 2$ , 亦即ち  $P(f^*)$  がただただ 2 つのエルゴード部分連鎖をもつことが知られた問題にたいする MPIM を述べ、次節でその収束を示す。

### 修正政策反復法 ( $R^* \leq 2$ )

1. 初期ベクトル  $v^0$ , 非負整数  $m$ , 大きな数  $L$ , 小さな正数

$\epsilon, \delta$  を定め,  $n = c = 0$ ,  $E_1 = I$ ,  $T = \phi$ ,  $R^* = 1$ ,  $D_i = K_i$  ( $i \in I$ )

とおく。

2. (政策改良ルーチン)

i)  $i \in E_r$  ( $1 \leq r \leq R^*$ ) にたいして

$$x_i^{n+1} = \max_{k \in D_i} \left\{ v_i(k) + \sum_{j \in I} p_{ij}(k) v_j^m - v_i^m \right\} \quad (23)$$

を計算し、 $f_i^m$  が最大値を与えれば  $f_i^{n+1} = f_i^m$  とおき、さもないければ  $f_i^{n+1}$  を最大値を与える任意の  $k \in D_i$  ととる。

$$s_r = \arg \min_{i \in E_r} \{ x_i^{n+1} \} \quad \text{とおく。}$$

ii)  $i \in T$  にたいして

$$L_i^{n+1} = \left\{ k \in K_i ; \sum_{j \in I} p_{ij}(k) g_j^m \geq \max_{k \in K_i} \left\{ \sum_{j \in I} p_{ij}(k) g_j^m \right\} - \delta \right\} \quad (24)$$

$$x_i^{n+1} = \max_{k \in L_i^{n+1}} \left\{ v_i(k) + \sum_{j \in I} p_{ij}(k) v_j^m - v_i^m \right\} \quad (25)$$

を計算し、 $f_i^m$  が最大値を与えれば  $f_i^{n+1} = f_i^m$  とおき、さもないければ  $f_i^{n+1}$  を最大値を与える任意の  $k \in L_i^{n+1}$  ととる。

3. (値決定ルータン)

$$w^0 = v^m + x^{n+1} \quad (26)$$

とおき、 $l = 0, 1, \dots, m-1$  にたいして

$$w^{l+1} = r(f^{n+1}) + p(f^{n+1}) w^l \quad (27)$$

を計算し、

$$v_i^{n+1} = w_i^m - w_{s_r}^m \quad (i \in E_r, 1 \leq r \leq R^*) \quad (28)$$

$$g_i^m = w_i^m - w_i^{m-1} \quad (i \in I) \quad (29)$$

とおく。 $u_i^0 = w_i^0$  ( $i \in T$ ) とおき、 $l = 0, \dots, m-1$  にたいして

$$u_i^{l+1} = v_i(f^{n+1}) + R(f^{n+1}) v^{n+1} - g_i^m + \delta(f^{n+1}) u_i^l \quad (30)$$

を計算し、 $v_i^{n+1}$  ( $i \in T$ ) を次式で定める。

$$v_i^{n+1} = u_i^m \quad (31)$$



4.  $n = n+1$  とおき,  $c = 1$  ならば ステップ 2  $\wedge$ .  $c = 0$  ならば  $\|v^n\|_d \equiv \max_{i \in I} v_i^n - \min_{i \in I} v_i^n$  を求め,  $\|v^n\|_d < L$  ならば ステップ 2  $\wedge$ . さもないければ ステップ 5  $\wedge$ .

5. (状態分類ル-子ン)

$s_1$  を含む全ての  $f_i \in K_i$  で閉じている状態の集合  $E_1$  および  $\arg \max_{i \in I} v_i^n$  を含む  $f^n$  で閉じている状態の集合  $E_2$  を定める.

$\max_{i \in E_1} x_i^n - \min_{i \in E_2} x_i^n < \varepsilon$  ならば  $R^* = 2$ ,  $E_r = E_r' (r=1, 2)$ ,

$T = I - E_1 - E_2$ ,  $D_i = K_i - \{k \in K_i; j \notin E_2 \text{ により } P_j(k) > 0\}$  ( $i \in E_2$ ),  $c = 1$  とおき, ステップ 2  $\wedge$ . さもないければ,

$L = 2L$  とおいて ステップ 2  $\wedge$ .

4. 修正政策及後法の収束

まず  $c = 0$ , 万が一  $E_1 = I$ ,  $T = \phi$ ,  $D_i = K_i (i \in I)$  により 収束を論ずる. (7) 式より, (23), (28) 式は各々

$$x^{n+1} = g(f^{n+1}) - (I - P(f^{n+1}))(v^n - v(f^{n+1})) \quad (32)$$

$$v^{n+1} = (n+1)g(f^{n+1}) + v(f^{n+1}) + P(f^{n+1})^{n+1}(v^n - v(f^{n+1})) - w_{s_1}^m e \quad (33)$$

と書くことができる. ここで  $e = (1, \dots, 1)^T$  である.

[補題 3]

$$i) \quad x^{n+1} = d^{n+1} + P(f^n)^{n+1} x^n \quad (34)$$

$$d^{n+1} = \max_{f \in F} \{ (n+1)[P(f)g(f^n) - g(f^n)] + r(f) + P(f)v(f^n) - g(f^n) - v(f^n) + (P(f) - P(f^n))P(f^n)^{n+1}(v^{n-1} - v(f^n)) \} \geq 0 \quad (35)$$

$d_i^{n+1} = 0$  とおき 必要十分条件は  $f_i^{n+1} = f_i^n$  である.

$$ii) \quad x^{n+1} \geq p(f^n)^{m+1} x^n, \quad x^{n+1} + v^n \geq r(f^*) + p(f^*) v^n \quad (36)$$

$$p^*(f^*) x^{n+1} \geq g(f^*) \geq g(f^{m+1}) = p^*(f^{m+1}) x^{m+1}, \quad p^*(f^n) x^{m+1} \geq g(f^n) \quad (37)$$

$$iii) \quad \Delta_n = \max_{i \in I} x_i^n, \quad \nabla_n = \min_{i \in I} x_i^n \quad (38)$$

とあければ

$$\Delta_{n+1} e \geq g(f^*) \geq g(f^{m+1}) \geq \nabla_{m+1} e \geq \nabla_n e \quad (39)$$

iv) 状態の集合  $C$  が  $p(f)^{m+1}$  で閉じていければ,  $p(f)$  でも閉じている。

(証明) i) (12) 式と同様

$$v^n = mg(f^n) + v(f^n) + p(f^n)^m (v^{n+1} + x^n - v(f^n)) - w_{g,e}^m$$

が成り立つ。この式と (33) 式を (23) 式に代入し, (7), (32) 式を用いて整理すれば i) が示される, ii) は i), (21) 式より導かれ, iii), iv) は明らかなである。

[補題4]

i)  $\bar{\nabla} = \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla_n$  が存在し, 空でない集合  $C \subset I$  にたいして

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_i^n = \bar{\nabla} \quad (i \in C) \quad (40)$$

ii) 有限な  $N$  が存在し, 全ての  $n \geq N$  にたいして

$$f_i^n = f_i \in K_i, \quad d_i^n = 0 \quad (i \in C) \quad (41)$$

であり,  $C$  は  $p(f^n)$  で閉じている。

(証明) (39) 式より  $\nabla_n$  は  $\bar{\nabla}$  へ収束する。  $i \in I$  にたいして,  $y_i = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_i^n$ ,  $z_i = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_i^n$  とおき,

$$A = \{ i \in I ; \text{無限に多くの } n \text{ で } x_i^n = \nabla_n \}$$

とあければ  $A$  は空でなく,  $A \ni i$  に対して  $y_i = \bar{v}$  がなりたつ。  
したがって

$$C = \{ i \in I ; y_i = \bar{v} \}$$

とあければ  $C$  は空でない。定義より  $i \in C$  に対して  $\{n\}$  の部分列  $L(i) = \{l\}$ ,  $U(i) = \{u\}$  が存在し,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} x_i^l = \bar{v}, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} x_i^u = z_i$$

である。部分列  $\{n_k; k = 0, 1, \dots\}$  を

$$n_{2k} \in U(i), \quad n_{2k+1} \in L(i), \quad n_{2k-1} < n_{2k} < n_{2k+1}, \quad n_{2k+1} - n_{2k} < \infty$$

で構成し,  $P(2k) = p(f^{n_{2k+1}-1})^{m+1} \dots p(f^{n_{2k}})^{m+1}$  とあければ, (36)

式より

$$x^{n_{2k+1}} \geq p(f^{n_{2k+1}-1})^{m+1} x^{n_{2k+1}-1} \geq \dots \geq P(2k) x^{n_{2k}}$$

である。ゆえに

$$x_i^{n_{2k+1}} \geq p_i(2k) x_i^{n_{2k}} + \sum_{j \neq i} p_j(2k) x_j^{n_{2k}} \geq v_{n_{2k}} + p_i(2k) (x_i^{n_{2k}} - v_{n_{2k}})$$

がなりたつ, (8) 式より  $p_i(2k) > 0$  であるから  $z_i \leq \bar{v}$  となり, i) が示される。

ii)  $C \ni i$  に対して十分大きな  $n$  で

$$x_i^n > \bar{v} + \gamma \tag{42}$$

となる  $\gamma > 0$  が存在する。(36) 式より  $i \in C$  に対して

$$x_i^{n+1} \geq v_n + \sum_{j \in C} p_j(f^n)^{m+1} (x_j^n - v_n) \geq v_n + \gamma \sum_{j \in C} p_j(f^n)^{m+1}$$

である。ゆえに i) から  $\sum_{j \in C} p_j(f^n)^{m+1} = 0$  であり, 補題 3-iv)

より  $C$  は  $p(f^n)$  で閉じている。したがって (34) 式より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_i^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_i^{n+1} - \sum_{j \in E} p_{ij}(f^n) x_j^n) = 0$$

と仮し、補題 3-i) から  $f^n$  はある決定  $\bar{f}_i \in K_i$  に収束する。C,  $K_i$  ともに有限であるから ii) が成り立つ。

[定理 1]

$C = I$  ならば、 $I \ni \lambda$  に対して

$$f_i^n = f_i^* \quad (n \geq N), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_i^n = g_i^*, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_i^n = v_i(f^*)$$

が成り立つ。

(証明) 補題 3-iii) および 4 より したがって

$$g(f^*) = g_i^* e = g(\bar{f}) = \bar{v} e \quad (43)$$

がえられる。任意の  $\varepsilon > 0$  に対して  $N (\geq N)$  が存在し、

$n \geq N$  において

$$x^n = \bar{v} e + \varepsilon^n, \quad |\varepsilon_i^n| < \varepsilon \quad (44)$$

であるから

$$g(\bar{f}) + v^n + \varepsilon^n = r(\bar{f}) + p(\bar{f}) v^n$$

であり、(7) 式より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v^n = v(\bar{f}) \quad (45)$$

が成り立つ。ゆえに  $d^n = 0$  となり

$$g(\bar{f}) + v(\bar{f}) = \max_{f \in F} \{ r(f) + p(f) v(\bar{f}) \}$$

と仮し、 $\bar{f} = f^*$  が示される。

以下  $C \neq I$  の場合を考える。  $T = I - C$  とおけば補題 4 より

$n \geq N$  において  $p(f^n)$  は

$$P(f^n) = \begin{pmatrix} Q(\bar{f}) & 0 \\ R(f^n) & S(f^n) \end{pmatrix} \quad (46)$$

と表わすことが出来る。ここで  $R, S$  は  $T$  に対応する行列である。以下添字  $c, t$  で  $C, T$  に対応する部分ベクトルを表わすことにする。

[定理 2]

$C \neq I$  ならば  $R^* = 2$ ,  $g_i^* < g_i^*$ ,  $C = E_i^*$  であり,  $E_i^* \ni i$  に於いて  $f_c^n = f_c^*$  ( $n \geq N$ ),  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_c^n = g_i^*$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_c^n = v_c(f^*)$  が成り立つ。

(証明) 補題 3, 4 より

$$g_c(f^n) = Q^*(\bar{f})x_c^n = Q^*(\bar{f})v_c(\bar{f}) = g_c(\bar{f}) = \bar{v}e_c \quad (47)$$

が成り立ち,  $n \geq \bar{N}$  で

$$x_c^n = \bar{v}e_c + z_c^n, \quad |z_c^n| < \varepsilon \quad (i \in C) \quad (48)$$

である。ゆえに定理 1 の証明と同様にして (45) 式が成り立ち,

$$v_c^n = v_c(\bar{f}) + \delta_c^n = v_c(f^{n+1}) + \delta_c^n, \quad |\delta_c^n| < \varepsilon \quad (i \in C) \quad (49)$$

である。(32) 式から

$$x_c^{n+1} = g_c(f^{n+1}) - R(f^{n+1})(v_c^n - v_c(f^{n+1})) - (I_t - S(f^{n+1}))(v_c^n - v_c(f^{n+1}))$$

であるから (49) 式より

$$x_c^{n+1} - g_c(f^{n+1}) + R(f^{n+1})\delta_c^n = (I_t - S(f^{n+1}))(v_c(f^{n+1}) - v_c^n) \quad (50)$$

と成り,

$$(I_t - S(f^{(m+1)}))(\nu_t(f^{(m+1)}) - \nu_t^m) = \sum_{\ell=0}^m S(f^{(m+1)})^\ell \{ x_t^{(m+1)} - g_t(f^{(m+1)}) + R(f^{(m+1)}) \delta_c^n \} \quad (51)$$

おなじりたつ。一方, (33) 式に (46), (47), (49) 式を代入すれば,

$$\nu_c^{(m+1)} = (m+1) \bar{\nu} e_c + \nu_c(\bar{f}) + Q(\bar{f})^{(m+1)} \delta_c^n - w_{s_1}^m e_c \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \nu_t^{(m+1)} &= (m+1) g_t(f^{(m+1)}) + \nu_t(f^{(m+1)}) + R(f^{(m+1)})^{(m+1)} \delta_c^n \\ &\quad + S(f^{(m+1)})^{(m+1)} (\nu_t^m - \nu_t(f^{(m+1)})) - w_{s_1}^m e_t \end{aligned} \quad (53)$$

とたつ。ここで  $R(f)^{(m+1)} = \sum_{\ell=0}^m S(f)^\ell R(f) Q(\bar{f})^{m-\ell}$  であり,  $\nu_{s_1}^{(m+1)} = \nu_{s_1}(\bar{f}) = 0$  であり, (52) 式より  $w_{s_1}^m = (m+1) \bar{\nu} + (Q(\bar{f})^{(m+1)} \delta_c^n)_{s_1}$  であり, (53) 式は

$$\begin{aligned} \nu_t^{(m+1)} - \nu_t(f^{(m+1)}) &= (m+1)(g_t(f^{(m+1)}) - \bar{\nu} e_t) + R(f^{(m+1)})^{(m+1)} \delta_c^n - (Q(\bar{f})^{(m+1)} \delta_c^n)_{s_1} e_t \\ &\quad + S(f^{(m+1)})^{(m+1)} (\nu_t^m - \nu_t(f^{(m+1)})) \end{aligned}$$

とたつ。したがって, (42), (51) 式を用いて整理すれば,

$$\begin{aligned} \nu_t^{(m+1)} - \nu_t^m &= \sum_{\ell=0}^m S(f^{(m+1)})^\ell \{ x_t^{(m+1)} - \bar{\nu} e_t + R(f^{(m+1)}) (I_c + Q(\bar{f})^{m-\ell}) \delta_c^n \} \\ &\quad - (Q(\bar{f})^{(m+1)} \delta_c^n)_{s_1} e_t \\ &> (\gamma - 3\varepsilon) e_t + \gamma \sum_{\ell=1}^m S(f^{(m+1)})^\ell e_t + 2\varepsilon S(f^{(m+1)})^{(m+1)} e_t \end{aligned} \quad (54)$$

おなじりたつ,  $\gamma > 3\varepsilon$  とおけば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_i^n = \infty \quad (i \in T) \quad (55)$$

がえられる。ある  $i \in C$  で  $P_j(f_i^*) > 0$  ( $j \in T$ ) と仮定すれば,

(36) 式 2 式右辺が  $\infty$  とおなじり矛盾である。おなじりたつ性質の  $f \in F$  で  $C$  は閉じてあり,

$$g_c(\bar{f}) = \max_{f \in F} \{ P_c(f) g_c(f) \}, \quad g_c(\bar{f}) + \nu_c(\bar{f}) = \max_{f \in F} \{ \nu_c(f) + P_c(f) \nu_c(\bar{f}) \}$$

がなりたつ。ゆえに  $R^* = 2$ ,  $g_1^* < g_2^*$ ,  $C = E_1^*$ ,  $f_i = f_i^*$  ( $i \in E_1^*$ )  
が示される。

定理 1, 2 より  $R^* \leq 2$  についてある MPIM の収束をある条件のもとで示すことができる。

[定理 3]

修正政策及後法は,  $R^* = 1$  あるいは  $R^* = 2$ ,  $g_1^* = g_2^*$  ならば常に,  $R^* = 2$ ,  $g_1^* < g_2^*$  ならば

i)  $\bar{N}$  が存在し,  $E_2^*$  は  $n \geq \bar{N}$  とする全ての  $n$  において  $P(f^n)$  で閉じている。

ii)  $T^*$  の  $\bar{n}$  について,  $\sum_{j \in T^*} P_{ij}(f_{\bar{n}}^*) < 1$  がなりたつ。

の条件のもとで、任意の  $v^0$ ,  $m$  について収束する。

(証明) 定理 1, 2 より  $R^* = 1$  あるいは  $R^* = 2$ ,  $g_1^* = g_2^*$  ならば  $C = I$  となり, MPIM は任意の  $v^0$ ,  $m$  で収束する。  $R^* = 2$ ,  $g_1^* < g_2^*$  ならば定理 2 より  $C = E_1^*$  であり, 仮定 i) から  $n \geq \bar{N}$  において  $f_i^n = f_i^*$  ( $i \in E_1^*$ ),  $\sum_{j \in E_2^*} P_{ij}(f_{\bar{n}}^*) = 1$  ( $i \in E_2^*$ ) がなりたつ。さらに  $E_1^*$  の  $\bar{n}$  について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_i^n = g_1^* \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_i^n = v_i(f^*)$$

がなりたつ。仮定 i) より  $n \geq \bar{N}$  において  $x_i^n$  ( $i \in E_2^*$ ) は

$K_i$  と  $D_i = K_i - \{k \in K_i; j \notin E_2^* \text{ について } P_{ij}(f_{\bar{n}}^*) > 0\}$  に限定して

えられるものと一致する。したがって定理 1 で,  $I = E_2^*$  と

おけば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_i^n = g_i^* \quad (i \in E_2^*)$$

が成り立つ。  $\|v^x\|_d \uparrow \infty$ ,  $\max_{i \in E_2} x_i^n - \min_{i \in E_2} x_i^n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) であるから、ある有限な  $n = N'$  でステップ 5 の条件が成立し、 $E_1 = E_1^*$ ,  $E_2$  が定められる。さて、仮定 i) より  $E_2 \subset E_2^*$  であり、(37) 式より  $i \in E_2$  について

$$\varepsilon > \max_{i \in E_2} x_i^n - \min_{i \in E_2} x_i^n \geq \sum_{j \in E_2} P_{ij}^*(g^*) \{ \max_{i \in E_2} x_i^n - x_j^n \}$$

であるから、 $\sum_{j \in E_2} P_{ij}^*(g^*) = 0$  となり  $E_2 \supset E_2^*$  が成り立つ。ゆえに  $E_2 = E_2^*$  であり、 $i \in E_2^*$  についてある収束は定理 1 より導かれる。  $i \in T = T^*$  についてある収束は、仮定 ii) より  $K_i$  を  $\sum_{j \in T^*} P_{ij}(k) < 1$  とする  $k$  に限定でき、割引利得問題についてある収束証明 [4] と同様に示すことができる。

### 参考文献

[1] 大野, マルコフ決定過程の計算アルゴリズム, 第4回数理計画シンポジウム論文集 pp. 143-158, 1983.

2 Schweitzer, P.J., "A value-iteration scheme for undiscounted multichain Markov renewal programs," Zeitschrift für Operations Res. 28, 143-152, 1984.

3 Denardo, E.V., "Computing a bias-optimal policy in a discrete-time Markov decision problem," Opns. Res. 18, 279-289, 1970.

4 Ohno, K., "A unified approach to algorithms with a suboptimality<sup>test</sup> in discounted semi-Markov decision processes," JORSJ 24, 296-324, 1981.