数理解析研究所講究録
558巻 1985年 96-113

準確率測度の理論

徳大教養部　伊東由文（Yoshifumi Ito）

始めに，表題の変更について一言注意しておきます。講演の時，「直交確率測度（Orthogonally Scattered Probability Measure）」と呼んでいたものは，そのものは確率測度ではなくて，そのノルムの2乗が確率測度になるような，Hilbert空間値集合関数ですから，これを今後「準確率測度（Hypoprobability Measure）」と呼びたいと思います。この名前の付け方は，小松彦三郎先生との会話の中からヒントを得たものです。そういう訳で，この表題に改めました。この研究集会で講演することをお許しいただいた金子晃先生，講演の時コメントをいただいた，小松彦三郎先生，森本光生先生に感謝いたします。

量子力学において，波動関数$\psi(x,t)$を解釈するとき，我々は状況を次のように理解しています。量子力学的粒子の時間発展はSchrödinger方程式を満たす波動関数$\psi(x,t)$によって記述され，その時，粒子はある空間領域Dにおいて，確率

$\int_D |\psi(x,t)|^2 dx$ を持って見い出されるというように理解しています。しかし，この解釈はこれまで便宜的なものと考えられ，論理的，数学的に決定的な基礎付けを持っていませんでした。それ故，私は，そのような基礎付けを求めていましたが，最近，量子力学における波動関数の解釈の論理的，数学的基礎付けに役立つと思われる数学的実体を見い出し，その公理化を行いました。それは，波動関数に対する次のような状況を公理化したものであります。波動関数 $\psi(x,t)$ が与えられているということは，$L_2(\mathbb{R}^3)$ に値を持つ集合関数 $A \to \chi_A(x)\psi(x,t)$ が与えられ，その L_2-ノルムの2乗 $\|\chi_A \psi(\cdot,t)\|^2$ が，粒子が領域 A に見い出される確率を表すようになっていることを意味します。

これは，Masani 氏の直交測度の理論の特殊化としての準確率測度の理論であります。これは，確率論が測度論の特殊化であることに対応するものです。この小論では，紙数の都合で，準確率測度論の概要を証明抜きに述べます。証明は参考文献[9]を見て下さい。

1. 準確率測度の概念と基本性質

この節では，準確率測度の概念を導入し，その基本性質を述べます。

<u>定義 1.1.</u> $(\Omega, \mathcal{B})$ は，集合 Ω と，Ω の部分集合の σ-代数

$\mathbb{B}$からなる可測空間とします．Hは複素Hilbert空間とします．そのとき，ξは，次の条件が満たされるとき，$(\Omega, \mathbb{B})$上の（H-値）準確率測度であるといいます：

(i) ξは$\mathbb{B}$からHへの集合関数である．

(ii) $A=\sum_{n=1}^{\infty} A_n$（$A_n \in \mathbb{B}$の可算直和）$\Rightarrow \xi(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi(A_n)$（Hの位相で）．

(iii) $A, B \in \mathbb{B}$，$A \cap B=\phi \Longrightarrow \xi(A) \perp \xi(B)$．

(iv) $\|\xi(\Omega)\|=1$，ここで，$\|\cdot\|$はHのノルムである．

以後とくにことわりない限り，集合関数ξの終空間は常に複素Hilbert空間Hであると仮定する．

<u>系</u>．ξが$(\Omega, \mathbb{B})$上の準確率測度であれば，$\|\xi(\cdot)\|^2$は$(\Omega, \mathbb{B})$上の確率測度である．

<u>定義1.2.</u> $\|\xi(\cdot)\|^2$は準確率測度ξに随伴した確率測度と呼ばれ，$P_\xi(\cdot)$と表される．かくして，$A \in \mathbb{B}$に対し，$P_\xi(A)=\|\xi(A)\|^2$が成り立つ．

<u>例1.3.</u> (a) Eは$(\Omega, \mathbb{B})$上で定義された，Hの射影作用素値集合関数とし，$\|x\|=1$なる任意の$x \in H$に対し，$\xi_x(A)=E(A)x$（$A \in \mathbb{B}$）とする．そのとき，各ξ_xは$(\Omega, \mathbb{B})$上の準確率測度である．

(b) $(\Omega, \mathbb{B}, Q)$は確率空間とし，$H=L_2(\Omega, \mathbb{B}, Q)$とする．$\xi(A)=\chi_A$とする．ここで，$\chi_A$は$A \in \mathbb{B}$の特性関数を表す．

そのとき，ξは$(\Omega, \mathcal{B})$上のH-値準確率測度で，$P_\xi = Q$が成り立つ．

(c) $\mathbb{A} = \{\chi_\omega ; \omega \in \Omega\}$はHの正規直交系とし，$\Omega$は添数集合とする．$\mathcal{B}$は$\Omega$のすべての部分集合の族とする．$\xi(A) = \sum_{\omega \in A} a_\omega \chi_\omega$，$A \in \mathcal{B}$とする．ここで，係数$\{a_\omega\}$は$\sum_{\omega \in \Omega} |a_\omega|^2 = 1$を満たす複素数列である．そのとき，$\xi$は$(\Omega, \mathcal{B})$上の準確率測度である．

<u>注意.</u> 準確率測度論は直交測度の一般論と量子力学の理論の解釈の範囲に入るものである．伊藤清[5]，P. Masani [7]，P. A. M. Dirac [1]，J. v. Neumann [8]を参照．

<u>命題1.4.</u> ξは可測空間$(\Omega, \mathcal{B})$上の準確率測度とする．そのとき，任意の$A, B \in \mathcal{B}$に対し，次が成り立つ．

(1) $\|\xi(A) - \xi(B)\|^2 = P_\xi(A) + P_\xi(B) - 2P_\xi(A \cap B)$,

(2) $B \subset A \Rightarrow \|\xi(A) - \xi(B)\|^2 = P_\xi(A) - P_\xi(B)$,

(3) $B \subset A \Rightarrow \|\xi(B)\| \leqq \|\xi(A)\|$,

(4) $B \subset A$, $\xi(A) = 0 \Rightarrow \xi(B) = 0$.

あらかじめ，確率空間$(\Omega, \mathcal{B}, P)$と$\mathcal{B}$上で定義されたH-値集合関数ξが与えられたとき，ξが準確率測度であるかどうかを証明するのに，次の結果が有用である．

<u>定理1.5.</u> (i) $(\Omega, \mathcal{B}, P)$は確率空間とし，(ii) ξは$\mathcal{B}$上定義されたH-値集合関数とする．そのとき，次の条件は同値で

ある：

(1) 任意の A, B に対し，$(\xi(A), \xi(B)) = P(A \cap B)$.

(2) ξ は，$P_\xi = P$ となる $(\Omega, \mathbb{B})$ 上のH-値準確率測度である．

この場合，ξ は $(\Omega, \mathbb{B}, P)$ 上の（H-値）準確率測度と呼ばれる．

<u>命題1.6.</u> ξ は可測空間 $(\Omega, \mathbb{B})$ 上の準確率測度とし，$A, B \in \mathbb{B}$ とすると，次が成り立つ．

(1) $\xi(A \setminus B) = \xi(A) - \xi(A \cap B)$.

(2) $B \subset A \Rightarrow \xi(A \setminus B) = \xi(A) - \xi(B)$.

(3) $\xi(A \cup B) = \xi(A) + \xi(B) - \xi(A \cap B)$.

(4) $\xi(A \triangle B) = \xi(A) + \xi(B) - 2\xi(A \cap B)$，ここで，$A \triangle B = (A \setminus B) + (B \setminus A)$.

(5) $P_\xi(A \triangle B) = \|\xi(A) - \xi(B)\|^2$.

命題1.6(5)から容易に次の有用な結果を導びく．

<u>命題1.7.</u> ξ が $(\Omega, \mathbb{B})$ 上の準確率測度であるとする．そのとき，ξ は，$A, B \in \mathbb{B}$ に対し，$\rho(A, B) = P_\xi(A \triangle B)$ で定義される $\mathbb{B}$ 上の普通の距離 ρ の下に，$(\Omega, \mathbb{B})$ あるいは $\mathbb{B}$ 上で一様連続である．とくに，もし，$A, A_n \in \mathbb{B}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ ならば，$P_\xi(A \triangle A_n) \to 0 \Rightarrow \xi(A) = \lim_{n \to \infty} \xi(A_n)$ を得る．

2. 準確率測度の値域

定義 2.1. ξ を可測空間 $(\Omega, \mathbb{B})$ 上の準確率測度とする. そのとき, $\xi(\mathbb{B})=\{\xi(A); A\in\mathbb{B}\}$ によって張られる最小の閉部分空間を ξ の値域といい, S_ξ と表す.

定義 2.2. 可測空間 $(\Omega, \mathbb{B})$ 上の準確率測度 ξ で $S_\xi=H$ となるものは H-基底準確率測度といわれる.

定義 2.3. ξ は $(\Omega, \mathbb{B})$ 上の準確率測度とする. そのとき, $\mathbb{B}$ あるいは $(\Omega, \mathbb{B})$ が可分であるとは σ-代数 $\mathbb{B}$ が命題 1.7 の距離 ρ を持った距離空間として可分のときにいう.

系. ξ は $\mathbb{B}$ が可分であるような可測空間 $(\Omega, \mathbb{B})$ 上の準確率測度とする. そのとき, S_ξ は H の可分な部分空間である.

3. 準期待値の概念と基本性質.

$(\Omega, \mathbb{B}, P)$ は確率空間で, ξ はその上の準確率測度とする. いま, Ω 上の適当な複素数値関数 ϕ に対し, 準期待値 $E[\phi]=\int_\Omega \phi(\omega)\xi(d\omega)$ を定義したい. 我々は, これを P. Masani [7] 氏の方法で行う. 次の周知の事実が話しの展開にとって基本的である.

定理 3.1. $(\Omega, \mathbb{B}, P)$ は確率空間とし, $L_{2,P}=L_2(\Omega, \mathbb{B}, P)$ は $E[|\phi|^2]<\infty$ なる Ω 上の複素数値 $\mathbb{B}$-可測関数全体の集合とする. そのとき,

(1) $L_{2,P}$ は, 内積 $(\phi, \psi)_P=E[\phi\bar{\psi}]$ の下に Hilbert 空間であ

る．ここで，確率0の事象の上で異なる関数は同一視する．

(2) すべての$\mathbb{B}$-単純関数$\sum_{n=1}^{r} a_n \chi_{A_n}$，$A_n \in \mathbb{B}$，$a_n \in \mathbb{C}$全体の集合は$L_{2,P}$において到る所稠密である．

ここで，確率変数ϕに対する期待値の記号$E[\phi]=\int_\Omega \phi(\omega)P(d\omega)$を用いた．

いま，ξを確率空間$(\Omega, \mathbb{B}, P)$上の準確率測度とし，任意の$\phi \in L_{2,P}$に対し，ξに関するϕの準期待値$\mathbb{E}[\phi]=\int_\Omega \phi(\omega)\xi(d\omega)$を次の性質を持つように定義したい：

(HE) (1) $\mathbb{E}[\phi] \in H$，(2) $(\mathbb{E}[\phi], \mathbb{E}[\psi]) = (\varphi, \psi)_P = E[\varphi \bar{\psi}]$．

これらの性質を選び出したのは，次の補題が示すように，それらから，準期待値の持つべき他のすべての性質が従うからである．

<u>補題 3.2.</u> $L_{2,P}$に属する確率変数ϕに対して定義され，性質(HE)を持つ準期待値$\mathbb{E}[\phi]$は次の性質を持つ：任意のϕ，ψ，$\phi_n \in L_{2,P}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$と任意の複素数a，bに対し，

(1) $\|\mathbb{E}[\phi]\|^2 = \|\phi\|_P^2 \equiv E[|\phi|^2]$．

(2) $\mathbb{E}[\phi; A] = \int_\Omega \phi(\omega)\chi_A(\omega)\xi(d\omega)$，$A \in \mathbb{B}$とおけば，任意の$A, B \in \mathbb{B}$に対し，$(\mathbb{E}[\phi; A], \mathbb{E}[\psi; B]) = (\mathbb{E}[\phi; A \cap B], \mathbb{E}[\psi; A \cap B])$が成り立つ，ここで，$\chi_A(\omega)$は事象$A$の特性関数である．

(3) $\mathbb{E}[a\phi + b\psi] = a\mathbb{E}[\phi] + b\mathbb{E}[\psi]$．

(4) $\|\mathbb{E}[\phi_m] - \mathbb{E}[\phi_n]\|^2 = E[|\phi_m - \phi_n|^2]$．

(5) $\phi_n \to \phi$ in $L_{2,P} \Leftrightarrow \mathbb{E}[\phi_n] \to \mathbb{E}[\phi]$ in H.

<u>定義 3.3.</u> (i) $\mathcal{B}$-単純関数 $\phi = \sum_{n=1}^{r} a_n \chi_{A_n}$, $A_n \in \mathcal{B}$, $a_n \in \mathbb{C}$ に対し, $\mathbb{E}[\phi]$ を公式 $\mathbb{E}[\phi] = \sum_{n=1}^{r} a_n \xi(A_n)$ によって定義する. (ii) $L_{2,P}$ に属する, $\mathcal{B}$-単純でない任意の ϕ に対し, $\mathbb{E}[\phi]$ を公式 $\mathbb{E}[\phi] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\phi_n]$ によって定義する. ここで, $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ は $L_{2,P}$ において ϕ に収束する $\mathcal{B}$-単純関数 ϕ_n の任意の列である. そのとき, $\mathbb{E}[\phi]$ を準確率測度 ξ に関する ϕ の準期待値という.

定義から, 準期待値が性質(HE)を持つことが容易に従う. ゆえに, 次を得る.

<u>定理 3.4.</u> 任意の $\phi \in L_{2,P}$ に対し, 準期待値 $\mathbb{E}[\phi]$ は(HE)と補題 3.2 のすべての性質を持つ.

<u>系.</u> すべての $\mathbb{E}[\phi]$, $\phi \in L_{2,P}$ の集合は, 準確率測度 ξ の値域 S_ξ である.

上の定理と系を次の有用な結果に集約できる.

<u>定理 3.5.</u> $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ は確率空間とし, ξ は $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の準確率測度とする. そのとき, 対応 $U: \phi \to \mathbb{E}[\phi]$ は $L_{2,P}$ から S_ξ の上への等距離写像である.

かくして, そのような各 ξ は, 自然な対応 U によって同型な2つの Hilbert 空間 S_ξ と $L_{2,P}$ を伴う.

したがって, S_ξ に属する各 x に, $x = \mathbb{E}[\phi]$ となる $L_{2,P}$ の元 ϕ が一意に対応する. M_ξ を H から S_ξ の上への射影とすると,

上の定理によって，各 $x \in H$ に，$M_\xi(x) = \mathbb{E}[\phi_x]$ となる $\phi_x \in L_{2,P}$ が対応する．x と ϕ_x はどのように関係しているか．明らかに，$\phi_x = U^{-1}(M_\xi(x)) = (U^{-1}M_{\mathcal{R}(U)})(x) = U^* x$ が成り立つ．ここで，U^* は，U を $L_{2,P}$ から H の中への等距離写像と考えての U の共役作用素で，$\mathcal{R}(U)$ は U の値域を表し，$M_{\mathcal{R}(U)}$ は $\mathcal{R}(U)$ への射影を表す．x と ϕ_x の関係をより明らかにするために，確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ が次のものである場合を考えよう：(1) Ω は可算集合 $\Omega = \{1, 2, 3, \cdots\}$ である．(2) $\mathcal{B}$ は Ω のすべての部分集合よりなる σ 代数である．(3) $(\Omega, \mathcal{B})$ 上のある準確率測度 ξ に対し，$P = P_\xi$．そのとき，$(\xi(n); n = 1, 2, 3, \cdots)$ は H の直交系で，$M_\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x, \frac{\xi(n)}{\|\xi(n)\|}\right) \frac{\xi(n)}{\|\xi(n)\|}$ を得る．ϕ_x は Ω 上で定義され，任意の $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，$\phi_x(n) = \left(x, \frac{\xi(n)}{\|\xi(n)\|}\right) \frac{1}{\|\xi(n)\|}$ $= \frac{(x, \xi(n))}{P(\{n\})} = \frac{dQ_x}{dP}(n)$ が従う．ここで，最後の辺は，複素測度 $Q_x(\cdot) = (x, \xi(\cdot))$ の P に関する Radon-Nikodym 微係数を表す．

さらに，準確率測度の変換の理論，不定積分の類似，累次積分の類似等に関する結果があるが紙数の関係で省略する．

4. 条件付準確率測度と条件付準期待値

<u>定義 4.1.</u> ξ は与えられた確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の準確率測度とする．そのとき，与えられた $A \in \mathcal{B}$ に対し，条件 $\|\xi(A)\| \neq 0$ の下に，$\xi_A(B) = \xi(A \cap B) / \|\xi(A)\|$，$B \in \mathcal{B}$ とおいて，$\xi_A(B)$

を事象Aを仮定したときの(H-値)条件付準確率測度という.

<u>系</u>. 上の記号において, $\xi_A(B)$は, $B\in\mathbb{B}$の関数と考えて, $(\Omega, \mathbb{B}, P_A)$上の準確率測度で, $\|\xi_A(B)\|^2=P_A(B)$ が成り立つ. ここで, $P_A(B)$ は事象Aを仮定したときのBの条件付確率である.

<u>命題4.2.</u> $\xi(A\cap B)=\|\xi(A)\|\,\xi_A(B)$.

<u>定義4.3.</u> ξは確率空間$(\Omega, \mathbb{B}, P)$上の準確率測度とし, $\phi=\phi(\omega)$は$L_{2,P}$に属する複素数値確率変数とする. そのとき, $\mathbb{E}_A[\phi]=E[\phi;A]/\|\xi(A)\|$によって, $\mathbb{E}_A[\phi]$を定義し, これを$\|\xi(A)\|\neq 0$なる事象Aを仮定したときの, ϕの条件付準期待値という.

<u>系</u>. 定義4.3の記号で, $\mathbb{E}_A[\phi]=\int_A \phi(\omega)\,\xi_A(d\omega)=\int_\Omega \phi(\omega)\chi_A(\omega)\,\xi_A(d\omega)$ が成り立つ.

いま, 与えられた確率変数$\phi(\omega)$が値$\check{\phi}$をとるとし, $\|\xi\{\phi=\check{\phi}\}\|=\|\xi(\{\omega;\phi(\omega)=\check{\phi}\})\|>0$と仮定して, $A=\{\omega;\phi(\omega)=\check{\phi}\}$とおいたとき, Bに対し条件付準確率測度$\xi_{\phi=\check{\phi}}(B)$を$\xi_{\phi=\check{\phi}}(B)=\xi_A(B)$で定義し, 確率変数$\psi\in L_{2,P}$に対する条件付準期待値を$\mathbb{E}_{\phi=\check{\phi}}(\psi)=\mathbb{E}_A[\psi]$で定義する.

複素平面$\mathbb{C}$のBorel集合Cに対し, $\xi_\phi(C)=\xi(\phi^{-1}(C))$, $\xi_\phi(C|A)=\xi_A(\phi^{-1}(C))$を定義する. その時, $\xi_\phi(\cdot)$は確率変数$\phi\in L_{2,P}$の準確率法則であり, $\xi_\phi(C|A)$は$P(A)>0$なる事

象$A\in\mathbb{B}$を仮定したときの確率変数$\phi\in L_{2,P}$の条件付準確率法則である．そのとき，次を得る．

<u>命題4.4.</u> $\mathbb{E}_A[\phi]=\int_{\mathbb{C}}\check{\phi}\,\xi_\phi(d\check{\phi}\mid A)$が成り立つ．

また，他の確率変数ψの条件付準確率法則$\xi_\psi(C\mid\phi=\check{\phi})$と条件付準期待値$\mathbb{E}[\psi\mid\phi=\check{\phi}]=\mathbb{E}_{\phi=\check{\phi}}[\psi]$を定義できる．ここで，$C$は$\mathbb{C}$におけるBorel集合で，$\phi,\psi\in L_{2,P}$，$\|\xi(\phi=\check{\phi})\|>0$とする．

<u>定理4.5.</u> $(\Omega,\mathbb{B},P)$を確率空間とする．任意の確率変数$\phi\in L_{2,P}$と任意の$B\in\mathbb{B}$に対し，$\check{\phi}$の関数として，$\mathbb{C}$上のH-値可測関数$\xi_{\phi=\check{\phi}}(B)$が存在して，$\mathbb{C}$のBorel集合$C$に対し，$P(\phi^{-1}(C)\cap B)=\int_C\|\xi_{\phi=\check{\phi}}(B)\|^2P_\phi(d\check{\phi})$が成り立つ．かくして，$\|\xi_{\phi=\check{\phi}}(B)\|^2$は$Q(C)=P(\phi^{-1}(C)\cap B)$の$P_\phi(C)$に関するRadon-Nikodym微係数である．

<u>5. 実区間上の準確率測度と準期待値；直交増分を持つ関数</u>

<u>定義5.1 (Masani).</u> Λは$(-\infty,\infty)$の任意の部分区間とする．Λ上のH-値関数は条件"$a,b,c,d\in\Lambda$, $a<b\leqq c<d\Rightarrow x(b)-x(a)\perp x(d)-x(c)$"が成り立つとき，直交増分を持つという．

以後，条件

(A) "$(-\infty,\infty)$の部分区間Λ上の直交増分を持つH-値関数x

に対し，$\sup\{\|x(t)-x(s)\|^2 ; s,t\in\Lambda, s\leqq t\}=1$ が成り立つ"を仮定する．その時，直交増分を持つΛ上のH-値関数はΛのBorel集合からなるある集合族$\mathcal{B}$上のH-値準確率測度を生成することを示すことができる．これは，次の周知の補題に依存している．

<u>補題5.2.</u> xは$(-\infty,\infty)$の部分区間Λ上で定義された，条件(A)を満たす，直交増分を持つH-値関数とする．そのとき，(1)Λ上の唯1つの関数fが存在して，$s,t\in\Lambda, s\leqq t \Rightarrow 1\geqq f(t)-f(s)=\|x(t)-x(s)\|^2\geqq 0$ を満たす．(2)関数fは確率分布関数である．(3) 任意の$t\in \mathrm{Int}(\Lambda)$に対し，$x(t-0)=\lim_{s\to t-0}x(s)$と$x(t+0)=\lim_{s\to t+0}x(s)$が存在する；明らかな修正によって，これはまた$\Lambda$の端点$t$に対しても成り立つ．(4) $s,t\in\Lambda, s\leqq t \Rightarrow f(t^*)-f(s^\#)=\|x(t^*)-x(s^\#)\|^2$，ここで，"$*$"は記号"$+0$"，"$-0$"あるいは空白のいずれでもよい．"#"についても同様である．(5)関数$x(\cdot-0)$と$x(\cdot+0)$はそれぞれΛ上左連続および右連続である．(6) Λのある算部分集合の外部の任意のtに対し，$x(t-0)=x(t)=x(t+0)$.

いま，xは$(-\infty,\infty)$の部分区間Λ上で定義された，条件(A)を満たす，直交増分を持つH-値関数とする．Λの有界な左半開部分区間からなる前環(pre-ring) (5.1) $\mathcal{J}=\{J ; J=(a,b]\subset\Lambda\}$を導入し，(5.2) 任意の$J=(a,b]\in\mathcal{J}$に対し，$\xi(J)$

$= x(b+0) - x(a+0)$, $P(J) = \|x(b+0) - x(a+0)\|^2$ を定義する。ここで，前環の定義は Masani [7], p. 63 による。

<u>補題5.3.</u> $x, \mathcal{J}, \xi, P$ が補題5.2，(5.1)，(5.2)におけるものであれば，ξ は $P_\xi = P$ なる $\mathcal{J}$ 上のH-値準確率測度である。

いま，Masani [7] の Hahn 拡張定理2.3 & 2.5 は，ξ が確率空間 $(\Lambda, \mathbb{B}, \hat{P})$ 上の準確率測度 $\tilde{\xi}$ に一意に拡張できることを保証する。ここで，$\mathbb{B}$ は Λ のすべての Borel 部分集合からなるσ-代数で，$\hat{P}$ は P の $\mathbb{B}$ への Hahn 拡張である。ゆえに，次を得る。

<u>定理5.4.</u> x を $(-\infty, \infty)$ の部分区間 Λ 上で定義された，条件(A)を満たす，直交増分を持つH-値関数とし，$\mathbb{B}$ は Λ のすべての Borel 部分集合からなるσ-代数とする。(1) 任意の $(a, b] \subset \Lambda$ に対し，$P((a, b]) = \|x(b+0) - x(a+0)\|^2$ であるような $\mathbb{B}$ 上の確率測度 P が一意に存在する。(2) 任意の $(a, b] \subset \Lambda$ に対し，$\xi((a, b]) = x(b+0) - x(a+0)$ であるような $(\Lambda, \mathbb{B}, P)$ 上のH-値準確率測度 ξ が一意に存在する。

ここで，実区間 Λ 上の複素数値関数 ϕ の ξ に関する準期待値を Stieltjes 式に定義する。

$\pi : a = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = b$ を $[a, b]$ 上の有限ネットとする。$\Delta_k = [\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ とし，集合 $\pi^* = \{t_1, \cdots, t_n\}$, $t_k \in \Delta_k$ を π の双対という。Δ_k が π の部分区間であることを "$\Delta_k \in \pi$"

と表す．$|\Delta_k| = \lambda_k - \lambda_{k-1}$，$|\pi| = \max\{|\Delta_1|, \cdots, |\Delta_n|\}$ と表す．$[a, b]$ 上の直交増分を持つH-値関数 x と $[a, b]$ 上の複素数値関数 ϕ に対し，

$$(5.3)\quad E[\pi, \pi^*] = \sum_{\Delta_k \in \pi,\, t_k \in \pi^*} \phi(t_k)\{x(\lambda_k) - x(\lambda_{k-1})\}$$

とおく．このとき，次を得る．

<u>定理5.5.</u> x, $\mathbb{B}$, ξ, P は $\Lambda = [a, b]$ に対して定理5.4で与えられたものとする．ϕ は $[a, b]$ 上の複素数値連続関数とする．そのとき，Riemann-Stieltjes 積分 $\int_a^b \phi(\lambda)\, dx(\lambda) = \lim_{|\pi| \to 0} E(\pi, \pi^*)$ が存在し，$\phi(a)\{x(a+0) - x(a)\} + \int_{(a, b)} \phi(\lambda)\, \xi(d\lambda) + \phi(b)\{x(b) - x(b-0)\}$ に等しい．

ここで，H-値Riemann-Stieltjes 積分とH-値Bochner 積分を結び付ける，部分積分法の一般化を述べる．

<u>定理5.6.</u> x は $[a, b]$ 上定義された，条件(A)を満たす，直交増分を持つH-値関数とし，ϕ は $[a, b]$ 上の複素数値絶対連続関数とする．そのとき，$\int_a^b \phi(\lambda)\, dx(\lambda) = \phi(b)x(b) - \phi(a)x(a) - \int_{[a, b]} \phi'(\lambda)\, x(\lambda)\, d\lambda$ が成り立つ．ここで，右辺の最後の項はLebesgue 測度に関するH-値Bochner 積分である．

6. L_2-値準確率測度

定理3.1の記号を用いる．$(\Lambda, \mathbb{F}, Q)$ を確率空間とし，$L_{2,Q} = L_2(\Lambda, \mathbb{F}, Q)$ とする．ξ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の $L_{2,Q}$-値準確率測度とする．そのとき，ξ の $B \in \mathcal{B}$ における値は Λ

上の関数であるから，この値を $\xi(B)$ のかわりに $\xi_{(B)}$ と表すと好都合である．そのとき，任意の $A, B \in \mathcal{B}$ に対し，$E_Q(\xi_{(A)}\overline{\xi_{(B)}}) = \int_\Lambda \xi_{(A)}(\lambda)\overline{\xi_{(B)}(\lambda)}\,Q(d\lambda) = (\xi_{(A)}, \xi_{(B)})_Q = P(A \cap B)$ のような等式を書くことができる．準期待値は $\int_\Omega \phi(\omega)\xi(d\omega)$ ではなく，$\mathbb{E}_P(\phi) = \int_\Omega \phi(\omega)\xi_{(d\omega)}$ と書かれるだろう．そのとき，次を得る．

<u>命題6.1.</u> $(\Lambda, \mathbb{F}, Q)$ は確率空間とし，χ_A は $A \in \mathbb{F}$ の特性関数とする．そのとき，χ は $(\Lambda, \mathbb{F}, Q)$ 上の $L_2(\Lambda, \mathbb{F}, Q)$-基底準確率測度である．さらに，任意の $f \in L_{2,Q}$ に対し，$f = \int_\Lambda f(\lambda)\chi_{(d\lambda)}$ を得る．

<u>定理6.2（L_2 空間の間の等距離写像）</u>．$i = 1, 2$ に対し，$(\Lambda_i, \mathcal{B}_i, P_i)$ は2つの確率空間とし，$H_i = L_2(\Lambda_i, \mathcal{B}_i, P_i)$ とする．そのとき，(1) H_1 から H_2 への各等距離写像 V に，$(\Lambda_1, \mathcal{B}_1, P_1)$ 上の H_2-値準確率測度 η が対応して，$S_\eta = V(H_1)$ であり，

(6.1) 任意の $f \in H_1$ に対し，$V(f) = \int_{\Lambda_1} f(\lambda_1)\eta_{(d\lambda_1)}$

が成り立つ．(2) $(\Lambda_1, \mathcal{B}_1, P_1)$ 上の各 H_2-値準確率測度 η に (6.1) を満たす H_1 から $S_\eta (\subset H_2)$ の上への等距離写像 V が対応する．

<u>系1.</u> $i = 1, 2$ に対し，$(\Lambda_i, \mathcal{B}_i, P_i)$ と H_i は定理6.2と同じとする．そのとき，H_1 から H_2 の上へのユニタリ作用素 V が与えられたとき，次を満たす ξ，η が存在する：(1) η は $(\Lambda_1, \mathcal{B}_1, P_1)$ 上の H_2-基底準確率測度で，ξ は $(\Lambda_2, \mathcal{B}_2, P_2)$ 上

のH_1-基底準確率測度である．(2) 任意の$f \in H_1$と任意の$g \in H_2$に対し，$V(f)=\int_{\Lambda_1} f(\lambda_1)\eta(d\lambda_1)$，$V^*(g)=\int_{\Lambda_2} g(\lambda_2)\xi(d\lambda_2)$．(3) 任意の$B_1 \in \mathbb{B}_1$と任意の$B_2 \in \mathbb{B}_2$に対し，$(\eta(B_1), \chi(B_2))_{H_2} = (\chi(B_1), \xi(B_2))_{H_1}$．

系2. $i=1, 2$に対し，$(\Lambda_i, \mathbb{B}_i, P_i)$と$H_i$は定理6.2と同じとする．$\eta$は$(\Lambda_1, \mathbb{B}_1, P_1)$上の$H_2$-値準確率測度とし，$\xi$は$(\Lambda_2, \mathbb{B}_2, P_2)$上の$H_1$-値準確率測度とし，任意の$B_1 \in \mathbb{B}_1$と任意の$B_2 \in \mathbb{B}_2$に対し，$(\eta(B_1), \chi(B_2))_{H_2} = (\chi(B_1), \xi(B_2))_{H_1}$が成り立つとする．その時，次が成り立つ．(1) $S_\eta = H_2$，$S_\xi = H_1$；i.e. η，ξはそれぞれH_2-基底，H_1-基底準確率測度である．(2) 定理6.2(2)で与えられる等距離写像VはH_1からH_2の上へのユニタリ作用素である．

7. 単位の分解.

ここで，準確率測度の例として，単位の分解について述べる．藤田-伊藤-黒田[3]の11章に従ってこれを述べる．

定義7.1. $(\Omega, \mathbb{B})$は可測空間とし，Hは複素Hilbert空間とする．H上の射影作用素$E(\Lambda)$の系$\{E(\Lambda); \Lambda \in \mathbb{B}\}$は次が満たされるとき，(可測空間$(\Omega, \mathbb{B})$上の)単位の分解という．各$\Lambda \in \mathbb{B}$に$H$上の射影作用素$E(\Lambda)$が指定され，次の条件(E.1), (E.2), (E.3)が満たされる；

(E.1) $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \phi$ならば，$E(\Lambda_1) \perp E(\Lambda_2)$が成り立つ，

すなわち，各 $x, y \in H$ に対し，$(E(\Lambda_1)x, E(\Lambda_2)y) = 0$ が成り立つ。

(E.2) $\Lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ (直和) ならば，$E(\Lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\Lambda_n)$ が強収束位相で成り立つ。

(E.3) $E(\Omega) = I$ (= 恒等作用素).

<u>定理7.2.</u> $(\Omega, \mathcal{B})$ は可測空間とし，$\{E(\Lambda); \Lambda \in \mathcal{B}\}$ は Hilbert 空間 H 上の射影作用素の系とする。$\|x\| = 1$ なる各 $x \in H$ に対し，$\xi_x(\Lambda) = E(\Lambda)x$，$\Lambda \in \mathcal{B}$ とおく。そのとき，$\xi_x(\cdot)$ は $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の H − 値準確率測度である。

$\phi \in L_{2,P}$ $(P = P_{\xi_x})$ に対し，$\mathbb{E}[\phi] = \int_\Omega \phi(\omega)\xi_x(d\omega)$ を定義できる。これは，補題3.2の性質を持つ。その時，藤田−伊藤−黒田[3]の記号で $\mathbb{E}[\phi] = \int_\Omega \phi(\omega) dE(\omega)x$ を得る。したがって，自己共役作用素のスペクトル分解の理論が我々の理論の枠組の中で取り扱える。しかし，x が規格化されているという制限は，量子力学における波動関数はそれらが規格化されている時にのみ意味があるという点において許されるものである。

＜参考文献＞

[1] P.A.M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics, Fourth Ed., Oxford, 1958.

[2] J.L. Doob, Stochastic Processes, John Wiley

& Sons, Inc., New York - London - Sydney, 1953.

[3] 藤田宏 - 伊藤清三 - 黒田成俊, 関数解析 I～III, 岩波書店, 1978.

[4] P. R. Halmos, Measure Theory, Springer, New York - Heidelberg - Berlin, 1950.

[5] 伊藤 清, 確率論, 岩波書店, 1953.

[6] A. N. Kolmogoroff, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer, Berlin, 1933 (Japanese translation).

[7] P. Masani, Orthogonally Scattered Measures, Adv. in Math., 2 (1968), 61-117.

[8] J. v. Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1981.

[9] Y. Ito, Theory of Hypoprobability Measures, Preprint, 1984.