数理解析研究所講究録
559巻 1985年 162-181

Hamilton-Jacobi 方程式の viscosity solution の存在・一意性の理論とその応用

中央大理工　石井仁司 (Hitoshi Ishii)

Crandall と Lions [4] により導入された viscosity solution は Hamilton-Jacobi 型の一階非線形偏微分方程式の研究を一新させ，さらに最適制御や微分ゲームに応用された．ここでは Hamilton-Jacobi 方程式の viscosity solution の存在・一意性定理とその応用について述べる．

viscosity solution の定義を述べておこう． $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^M$ は開集合， $F: \mathcal{O}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ とする． $u \in C(\mathcal{O})$ が

(0.1) $$F(y, u(y), Du(y)) = 0 \quad \text{in } \mathcal{O}$$

の viscosity subsolution ($F(y,u,Du) \leqq 0$ in $\mathcal{O}$ の viscosity solution あるいは $F(y,u,Du) \leqq 0$ in $\mathcal{O}$ in the viscosity sense，略して $F(y,u,Du) \leqq 0$ in $\mathcal{O}$ v.s.) であるとは次の条件がみたされることを意味する：

$\phi \in C^1(\mathcal{O})$ と $y_0 \in \mathcal{O}$ に対して $u-\phi$ が y_0 で最大値をとるならば，必ず

$$F(y_0, u(y_0), D\phi(y_0)) \leq 0.$$

$u \in C(\mathcal{O})$ が (0.1) の viscosity supersolution であるとは次の条件が満たされることを意味する: $\phi \in C^1(\mathcal{O})$ と $y_0 \in \mathcal{O}$ に対して $u-\phi$ が y_0 で最小値をとるならば，必ず

$$F(y_0, u(y_0), D\phi(y_0)) \geq 0.$$

$u \in C(\mathcal{O})$ が (0.1) の viscosity solution であるとは (0.1) の viscosity subsolution であり同時に viscosity supersolution であることと定義される.

以下，§1 では viscosity solution の存在・一意性定理とその証明を，§2 では viscosity solution の表現定理を，さらに応用として §3 では確率微分方程式に対する Ventcel-Freidlin 型の漸近評価への PDE approach について述べる.

§1. 存在・一意性定理

Hamilton-Jacobi 方程式に対する初期値問題

$$\text{(CP)} \qquad \begin{cases} u_t + H(t, x, u, Du) = 0 & \text{in } (0,T)\times\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

と定常問題

$$\text{(SP)} \qquad u + H(x, u, Du) = 0 \qquad \text{in } \Omega$$

を考える. ここで $T>0$, Ω は $\mathbb{R}^N$ の開部分集合, $u: [0,T)\times\Omega \to \mathbb{R}$ (あるいは $\Omega \to \mathbb{R}$) は未知関数, $D = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots,$

$\frac{\partial}{\partial x_N}$), $u_0: \Omega \to \mathbb{R}$, $H: [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ (あるいは $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$) であるとする.

H に対して次のような仮定をおく.

(H0) $\qquad H \in C([0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$.

(H1) $\qquad u \to H(t,x,u,p)$ は $\mathbb{R}$ 上で非減少関数である.

(H2) ある $m \in C([0,\infty))$ ($m \geqq 0$, $m(0)=0$) に対して, $\lambda \geqq 0$, $x, y \in \Omega$, $\ell(x,y) \equiv \{\mu x+(1-\mu)y \mid 0 \leqq \mu \leqq 1\} \subset \Omega$, $u \in \mathbb{R}$, $0 \leqq t \leqq T$ であれば

$$H(t,y,u,\lambda(x-y)) - H(t,x,u,\lambda(x-y)) \leqq m(\lambda|x-y|^2 + |x-y|)$$

が成立する.

(H3) ある $x_0 \in \mathbb{R}^N$ と $\sigma \in C([0,\infty)\times[0,\infty))$ ($\sigma \geqq 0$, $\sigma(0,R)=0$) に対して, $\lambda \geqq 0$, $x \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}$, $R>0$, $p \in \mathbb{R}^N$, $|p| \leqq R$, $|p+\lambda(x-x_0)| \leqq R$ ならば

$$H(t,x,u,p) - H(t,x,u,p+\lambda(x-x_0)) \leqq \sigma(\lambda|x-x_0|, R)$$

が成立する.

$UC(\mathcal{O})$ により $\mathcal{O}$ ($\subset \mathbb{R}^M$) 上の一様連続な関数の空間を表わし, $UC^*(\mathcal{O})$ により $\mathcal{O}$ 上の関数 u で

$$\lim_{r \searrow 0} \sup\{|u(x)-u(y)| \mid \ell(x,y) \subset \mathcal{O},\ |x-y| \leqq r\} = 0$$

を満たすものの全体を表わす. $UC_s((0,T)\times\Omega)$ により $(0,T)\times\Omega$ 上の連続関数 u で

$$\lim_{r \searrow 0} \sup\{|u(t,x)-u(t,y)| \mid 0<t<T,\ x,y \in \Omega,\ |x-y| \leqq r\} = 0$$

を満たすものの全体を表わし，$UC_s^*((0,T)\times\Omega)$ により $(0,T)\times\Omega$ 上の連続関数 u で

$$\lim_{r\searrow 0}\sup\{|u(t,x)-u(t,y)| \mid \ell(x,y)\subset\Omega,\ |x-y|\leq r\}=0$$

を満たすものの全体を表わす．

<u>定理 1.1.</u> (H0)-(H3) を仮定する．(i) $u, v\in UC_s^*((0,T)\times\Omega)\cap C([0,T)\times\overline{\Omega})$ が

$$u_t+H(t,x,u,Du)\leq 0,\quad v_t+H(t,x,v,Dv)\geq 0 \quad \text{in } (0,T)\times\Omega \text{ v.s.}$$

$$u\leq v \quad \text{on } (0,T)\times\partial\Omega \cup \{0\}\times\Omega$$

をみたすとき，$u\leq v$ on $(0,T)\times\Omega$ が成立する．

(ii) $\Omega=\mathbb{R}^N$, $u_0\in UC(\mathbb{R}^N)$ とするとき，(CP) の viscosity solution $u\in UC_s((0,T)\times\mathbb{R}^N)\cap C([0,T]\times\mathbb{R}^N)$ が存在する．

この結果は Ishii [14] による．解の比較に関しては Crandall-Lions [4] において有界な解に対する相当一般的な結果がまず得られた．その後 Ishii [11, 12] において，$UC_s((0,T)\times\Omega)$ に属する解についての結果に改良された．さらに Crandall-Lions [5] において条件 (H2) が導入され，Ishii [14] において (H3) が導入された．解の存在に関しては Crandall-Lions [4] において $H=H(Du)$ に対する結果がまず得られ，ついで Lions [16, 17]，Souganidis [19]，Barles [1] により一般化された．Barles [1] においては $(0,T)\times\partial\Omega$ で関数値が一致するような viscosity subsolution と

supersolution の存在を仮定して，一般の Ω に対する viscosity solution $\in BUC([0,T]\times\overline{\Omega})$ の存在が示された．
Ishii [12] は解の modulus of continuity を直接的な方法で評価し，$UC_S((0,T)\times\mathbb{R}^N)$ における解の存在を示した．条件(H1)は次の(H1)′に弱められる．

(H1)′ ある $\gamma\in\mathbb{R}$ に対して，$u\to H(t,x,u,p)-\gamma u$ は $\mathbb{R}$ 上で非減少である．

(H0)-(H3) を満たす Hamiltonian H の例として，$H=|p|^2$ と $H=\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\{g(x,a,b)\cdot p+f(x,a,b)\}$ を挙げておく．ここで A, B はある集合，$g:\mathbb{R}^N\times A\times B\to\mathbb{R}^N$ は $g=g_1+g_2$ と書け，g_1, g_2, f は次の条件を満たす：$(g_1(x,a,b)-g_1(y,a,b))\cdot(x-y)\geqq 0$,

$$|g_2(x,a,b)-g_2(y,a,b)|\leqq C|x-y|,\quad |g_2(x,a,b)|\leqq C,$$

$$\lim_{r\searrow 0}\sup\{|g_1(x,a,b)-g_1(y,a,b)|\ |\ |x-y|\leqq r\}=0,$$

$$\lim_{r\searrow 0}\sup\{|f(x,a,b)-f(y,a,b)|\ |\ |x-y|\leqq r\}=0.$$

次に(SP)に対する結果を述べるために条件(H4)を導入する．

(H4) ある $a>0$, $0<\nu\leqq 1$ $(a\nu<1)$ と $h\in C([0,\infty))$ (h は非減少，$h\geqq 0$) に対して，$\lambda\geqq 0$, $\ell(x,y)\subset\Omega$ であれば

$$H(y,u,\lambda(x-y))-H(x,u,\lambda(x-y))\leqq a\lambda|x-y|^2+|x-y|^\nu+h(\lambda|x-y|)$$

が成立する．

$H:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ に対しても，H を t に依存しない $[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ 上の関数と見なし条件(H0)-(H3)を適用する．

定理 1.2. (H0)-(H3) を仮定する. (i) $u, v \in UC^*(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ が

$$u + H(x, u, Du) \leqq 0, \qquad v + H(x, v, Dv) \geqq 0 \quad in\ \Omega\ v.s.$$

$$u \leqq v \quad on\ \partial\Omega$$

を満たすとき, $u \leqq v$ on Ω が成立する. (ii) $\Omega = \mathbb{R}^N$ とし (H4) をさらに仮定する. このとき (SP) の viscosity solution で $UC(\mathbb{R}^N)$ に属するものが存在する.

定理 1.2, (i) の証明　簡単の為, $\Omega = \mathbb{R}^N$ の場合を考える. $\zeta \in C^1(\mathbb{R})$ は $0 \leqq \zeta \leqq 1$, $\zeta(r) = 0$ $(r \leqq 0)$, $\zeta'(r) = 1$ $(r \geqq 1)$ を満たす関数とし, $\zeta_R(r) = \zeta(r - R)$ により ζ_R $(R > 0)$ を定義する. $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $R > 0$ とし

$$\Phi(x, y) = u(x) - v(y) - \frac{1}{\alpha}|x - y|^2 - \beta\zeta_R(|x - x_0|)$$

とおく. $u, v \in UC(\mathbb{R}^N)$ だから, ある $C_1 > 0$ に対して

$$|u(x) - u(y)| \leqq C_1\,(|x - y| + 1), \quad |v(x) - v(y)| \leqq C_1\,(|x - y| + 1)$$

が成立する. $\beta = C_1 + 1$ ととれば, ある点 $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ で Φ は最大値をとる. 特に $\Phi(\bar{x}, \bar{y}) \geqq \Phi(\bar{x}, \bar{x})$. したがって

$$\frac{1}{\alpha}|\bar{x} - \bar{y}|^2 \leqq v(\bar{x}) - v(\bar{y}) \leqq m_0(|\bar{x} - \bar{y}|).$$

ここで m_0 は v の modulus of continuity を表わす. m_0 は concave だから, $0 < \alpha < 1$ と仮定すれば, 適当な $C_2 > 0$ に対して $|\bar{x} - \bar{y}| \leqq C_2$ が言える. したがって $|\bar{x} - \bar{y}|^2 \leqq \alpha m_0(C_2)$, さらに $\frac{1}{\alpha}|\bar{x} - \bar{y}|^2 \leqq m_0(\sqrt{\alpha m_0(C_2)})$. $x \to \Phi(x, \bar{y})$ は $\bar{x}$ で最大値

をとり，$y \to \Phi(\bar{x}, y)$ は $\bar{y}$ で最大値をとるので，viscosity solution の定義より

$$u(\bar{x}) + H(\bar{x}, u(\bar{x}), \tfrac{2}{\alpha}(\bar{x}-\bar{y}) + \beta(\bar{x}-x_0)\zeta_R'/|\bar{x}-x_0|) \leqq 0,$$

$$v(\bar{y}) + H(\bar{y}, v(\bar{y}), \tfrac{2}{\alpha}(\bar{x}-\bar{y})) \geqq 0$$

が得られる．もし $u(\bar{x}) \geqq v(\bar{y})$ であれば，これらの差を取り

$$\begin{aligned} u(\bar{x}) - v(\bar{y}) &\leqq H(\bar{y}, v(\bar{y}), \tfrac{2}{\alpha}(\bar{x}-\bar{y})) - H(\bar{x}, u(\bar{x}), \tfrac{2}{\alpha}(\bar{x}-\bar{y}) + \beta\tfrac{\bar{x}-x_0}{|\bar{x}-x_0|}\zeta_R') \\ &\leqq H(\bar{y}, u(\bar{x}), \tfrac{2}{\alpha}(\bar{x}-\bar{y})) - H(\bar{x}, u(\bar{x}), \tfrac{2}{\alpha}(\bar{x}-\bar{y})) + \sigma(\beta, \tfrac{2}{\alpha}|\bar{x}-\bar{y}| + \beta) \\ &\leqq m(\tfrac{2}{\alpha}|\bar{x}-\bar{y}|^2 + |\bar{x}-\bar{y}|) + \sigma(\beta, \tfrac{2}{\alpha}|\bar{x}-\bar{y}| + \beta) \\ &\leqq m(m_0(\sqrt{\alpha m_0(C_2)}) + \sqrt{\alpha m_0(C_2)}) + \sigma(\beta, \tfrac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha m_0(C_2)} + \beta) \end{aligned}$$

を得る．ここで (H1)−(H3) を使った．最後の辺を $C(\alpha, \beta)$ と書く．$C(\alpha, \beta)$ は R に依存しない．こうして

$$\Phi(x, x) = u(x) - v(x) \leqq \Phi(\bar{x}, \bar{y}) \leqq C(\alpha, \beta) \qquad (|x| \leqq R).$$

$R \to \infty$ として，$u - v$ が $\mathbb{R}^N$ 上で有界なことが判る．この有界性により，任意の $0 < \alpha < 1$，$\beta > 0$，$R > 0$ に対してある $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ で Φ が最大値を取ることが判る．上と全く同じ計算から，$u(x) - v(x) \leqq C(\alpha, \beta)$ $(|x| \leqq R,\ 0 < \alpha < 1,\ \beta > 0)$. $R \to \infty$，$\beta \searrow 0$ としてから $\alpha \searrow 0$ とすると，$u(x) \leqq v(x)$ on $\mathbb{R}^N$ を得る．　　　　Q.E.D.

<u>定理 1.2, (ii) の証明</u>　まず (SP) の解に対する a priori estimates を行う．$u \in UC(\mathbb{R}^N)$ を (SP) の viscosity

solution とする. $A>0$, $B>0$ とし, $v(x)=A\langle x-x_0\rangle+B$ とおく ($\langle x\rangle=(|x|^2+1)^{1/2}$ とする). m は非減少で concave, σ は各変数について非減少であると仮定してよい. (H1)-(H3) を使えば

$$
\begin{aligned}
v(x)+H(x,v(x),Dv(x)) &\geq A\langle x-x_0\rangle+B+H\left(x,0,A\frac{x-x_0}{\langle x-x_0\rangle}\right)\\
&\geq A\langle x-x_0\rangle+B+H(x,0,0)-\sigma(A,A)\\
&\geq A\langle x-x_0\rangle-C_3(|x-x_0|+1)+B-\sigma(A,A)+H(x_0,0,0)
\end{aligned}
$$

が得られる. ここで $C_3>0$ は $m(r)\leq C_3(r+1)$ を満たす定数である. $A=C_3$, $B=|H(x_0,0,0)|+\sigma(A,A)+C_3$ ととれば, $v(x)+H(x,v(x),Dv(x))\geq 0$ in $\mathbb{R}^N$. u と v と比較して, $u(x)\leq C_3\langle x-x_0\rangle+|H(x_0,0,0)|+\sigma(C_3,C_3)+C_3$ on $\mathbb{R}^N$. 同様にして, $u(x)\geq -C_3\langle x-x_0\rangle-|H(x_0,0,0)|-\sigma(C_3,C_3)-C_3$ on $\mathbb{R}^N$. こうして

$$
(1.1)\qquad |u(x)|\leq C_3\langle x-x_0\rangle+|H(x_0,0,0)|+\sigma(C_3,C_3)+C_3 \quad \text{on } \mathbb{R}^N
$$

が得られた. 次に条件 (H4) を使う. $(x,y)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ に対して

$$
v(x,y)=\frac{1}{1-a\nu}\langle x-y\rangle^\nu+h\left(\frac{\nu}{1-a\nu}\right)
$$

とおく. このとき, $^\forall r\in\mathbb{R}$ に対して

$$
\begin{aligned}
&v(x,y)+H(x,r,D_xv)-H(y,r,-D_yv)\\
&=v(x,y)+H\left(x,r,\frac{\nu}{1-a\nu}\frac{x-y}{\langle x-y\rangle^{2-\nu}}\right)-H\left(y,r,\frac{\nu}{1-a\nu}\frac{x-y}{\langle x-y\rangle^{2-\nu}}\right)\\
&\geq v(x,y)-\frac{\nu}{1-a\nu}\langle x-y\rangle^\nu-\langle x-y\rangle^\nu-h\left(\frac{\nu}{1-a\nu}\right)=0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N.
\end{aligned}
$$

一方 $w(x,y)=u(x)-u(y)$ は

$$w + H(x, u(x), D_x w) - H(y, u(y), -D_y w) = 0 \quad in\ \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \ v.s.$$

をみたす．したがって，$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mid u(x) > u(y)\}$,

$\tilde{H}(x,y,p,q) = \inf_{r \in \mathbb{R}} \{H(x,r,p) - H(y,r,-q)\}$ とおくとき，

$$v + \tilde{H}(x,y,D_x v, -D_y v) \geq 0 \quad in\ \Delta,$$

$$w + \tilde{H}(x,y,D_x w, -D_y w) \leq 0 \quad in\ \Delta \ v.s.$$

が成立する．$\tilde{H}$ は (H1)−(H3) を満たすので（(i) の証明には (H0) は使われてない），$w(x,y) \leq v(x,y)$ on Δ が得られる．こうして

(1.2) $$|u(x) - u(y)| \leq \frac{1}{1-a\nu}\langle x-y\rangle^{\nu} + h\left(\frac{\nu}{1-a\nu}\right) \quad on\ \Delta$$

が導びかれる．さて，$0 < \varepsilon < 4$ を任意にとろう．(H2) における m は $m(r) \geq \sqrt{r}$ を満たしていると仮定してよい．

$\alpha = \alpha(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2m(\varepsilon)}\ (< 1)$, $\quad A = A(\varepsilon) = \max\left\{\frac{1}{\alpha}, \frac{\sqrt{2}^{\nu}}{1-a\nu} + h\left(\frac{\nu}{1-a\nu}\right)\right\}$

とおき，$v(x,y) = A\langle x-y\rangle_\varepsilon^{\alpha} + m(\varepsilon)$ により $v \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ を定義する（$\langle x\rangle_\varepsilon = (|x|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$ とする）．$r \in \mathbb{R}$, $|x-y| \leq 1$ であれば，(H2) を使って

$$\begin{aligned} & v + H(x,r,D_x v) - H(y,r,-D_y v) \\ &= v + H\left(x,r,\alpha A\frac{x-y}{\langle x-y\rangle_\varepsilon^{2-\alpha}}\right) - H\left(y,r,\alpha A\frac{x-y}{\langle x-y\rangle_\varepsilon^{2-\alpha}}\right) \\ &\geq v - m\left(\langle x-y\rangle_\varepsilon^{\alpha} + \langle x-y\rangle_\varepsilon^{\alpha}\right) \geq v - m(\varepsilon) - 2\frac{m(\varepsilon)}{\varepsilon}\langle x-y\rangle_\varepsilon^{\alpha} = 0. \end{aligned}$$

ここで不等式 $m(r) \leq m(\varepsilon) + \frac{m(\varepsilon)}{\varepsilon} r \ (r \geq 0)$ を用いた．$w(x,y) = u(x) - u(y)$ と v を $\Delta_1 \equiv \{(x,y) \in \Delta \mid |x-y| < 1\}$ 上で比較すれば，$w \leq v$ on Δ_1 を得る．

$$m_0(r)=\begin{cases} \inf\{A(\varepsilon)\langle r\rangle_\varepsilon^{\alpha(\varepsilon)}+m(\varepsilon) \mid \quad 0<\varepsilon<4\} & (0\leq r\leq 1) \\ \frac{1}{1-a\nu}\langle r\rangle^{\nu}+h\left(\frac{\nu}{1-a\nu}\right) & (r>1) \end{cases}$$

とおくとき，$\lim_{r\searrow 0} m_0(r)=0$ となり

(1.3) $\quad |u(x)-u(y)|\leqq m_0(|x-y|) \qquad (x,y\in\mathbb{R}^N)$

が成立する．

最後に，(SP)における Hamiltonian H を適当に近似し Lions [16, 17]，Souganidis [19]，Barles [1]，Ishii [12] 等の結果の一つを使えば近似式に対する viscosity solution が得られる．評価 (1.1)，(1.3) と Ascoli-Arzela の定理を用いて (SP) に対する viscosity solution の存在が示される．

Q. E. D.

定理 1.1 の証明は Ishii [14] を参照されたい．

§2. 解の表現

(SP) の viscosity solution を適当な微分ゲームの value として表現するという問題を扱う．

A, B を可分な距離空間とし，$f\in C(\mathbb{R}^N\times A\times B,\mathbb{R})$，$g\in C(\mathbb{R}^N\times A\times B,\mathbb{R}^N)$ とする．次の仮定をおく．

(H5) 任意の $\mathbb{R}^N\times A\times B$ の compact 部分集合 K に対して適当に $L>0$ をとれば

$$|g(x,a,b)-g(y,a,b)|\leqq L|x-y| \qquad ((x,a,b),\ (y,a,b)\in K)$$

が成立する．

$\alpha:[0,\infty)\to A$, $\beta:[0,\infty)\to B$ は可測であるとして，微分方程式に対する初期値問題

$$
\text{(ODE)} \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = g(x(t), \alpha(t), \beta(t)) & (\text{a.e. } t \geqq 0) \\ x(0) = x \in \mathbb{R}^N \end{cases}
$$

を考える．(ODE) の解を $X_t = X_t(x,\alpha,\beta)$ と書くことにする．2人の players I, II がいて，pay-off と呼ばれる functional

$$
P(x,\alpha,\beta) = \varlimsup_{T\to\infty} \int_0^T e^{-t} f(X_t(x,\alpha,\beta), \alpha(t), \beta(t))\,dt
$$

を player I は α を control して最大にしようとし player II は β を control して最小にしようとしている状況を想定する．このゲームの value を次のように定義する．まず α が player I の control であるとは，α が区間 $[0, t(\alpha))$ から A への可測写像であり ($0 < t(\alpha) \leqq \infty$)，さらに各 $0 < t < t(\alpha)$ に対して適当な compact 集合 $K \subset A$ を取れば $\alpha(s) \in K$ (a.e. $s \in [0,t]$) が満たされることを意味する．このような α の全体を $\mathcal{C}_{\mathrm{I}}$ と記す．同様に $\mathcal{C}_{\mathrm{II}}$ も定義される．すなわち，$\beta \in \mathcal{C}_{\mathrm{II}}$ であるとは $[0, t(\beta))$ から B への可測写像であり ($0 < t(\beta) \leqq \infty$) さらに各 $0 < t < t(\beta)$ に対して compact 集合 $K \subset B$ が存在し $\beta(s) \in K$ (a.e. $s \in [0,t]$) が成立することとする．$\xi: \mathcal{C}_{\mathrm{II}} \to \mathcal{C}_{\mathrm{I}}$ が player I の strategy であるとは次の条件が満たされることを意味する：$\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{C}_{\mathrm{II}}$ が $\beta_1(s) = \beta_2(s)$ (a.e. $s \in [0,t]$)

を満たすならば $\xi(\beta_1)(s)=\xi(\beta_2)(s)$ （$a.e.\ s\in[0, t\wedge t(\xi(\beta_1))\wedge t(\xi(\beta_2)))$）
が成立する．ただし，$t\wedge s$ で $\min\{t,s\}$ を表わすものとする．
このような ξ の全体を $\mathcal{S}_{\mathrm{I}}$ と記す．$\xi\in\mathcal{S}_{\mathrm{I}}$ が $x\in\mathbb{R}^N$ で admissible であるということを次の二条件が成立することと定める．(i) $\beta\in\mathcal{C}_{\mathrm{II}}$ であり $t(\xi(\beta))<t(\beta)$ ならば

$$\sup_{0\le t<t(\xi(\beta))}\left\{|X_t(x,\xi(\beta),\beta)|+\int_0^t e^{-s}f(X_s,\xi(\beta)(s),\beta(s))\,ds\right\}=\infty.$$

(ii) $\inf\left\{\int_0^t e^{-s}f(X_s,\xi(\beta)(s),\beta(s))\,ds \;\middle|\; \beta\in\mathcal{C}_{\mathrm{II}},\ 0<t<t(\xi(\beta))\right\}>-\infty.$

x で admissible な $\xi\in\mathcal{S}_{\mathrm{I}}$ の全体を $\mathcal{S}_{\mathrm{I}}(x)$ と書く．$\mathcal{S}_{\mathrm{II}}(x)$ も同様に定義される．$x\in\mathbb{R}^N$, $\xi\in\mathcal{S}_{\mathrm{I}}(x)$ に対して $\beta\in\mathcal{C}_{\mathrm{II}}$ が admissible であるとは $t(\beta)=t(\xi(\beta))=\infty$ が成立することと定める．このような $\beta\in\mathcal{C}_{\mathrm{II}}$ の全体を $\mathcal{C}_{\mathrm{II}}(x,\xi)$ と表わす．
最後に $x\in\mathbb{R}^N$ における (upper) value を

$$U(x)=\sup_{\xi\in\mathcal{S}_{\mathrm{I}}(x)}\ \inf_{\beta\in\mathcal{C}_{\mathrm{II}}(x,\xi)} P(x,\xi(\beta),\beta) \tag{2.1}$$

と定義する．

$H:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ を

$$H(x,p)=\sup_{b\in B}\ \inf_{a\in A}\{-g(x,a,b)\cdot p-f(x,a,b)\}$$

により定義する．

<u>定理 2.1.</u> 上に定義した H が (H0)–(H5) と条件

(H6) 任意の $\varepsilon>0$ と compact 集合 $K\subset\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ に対して，B の compact 集合 K_B がとれて

$$H(x,p)<\varepsilon+\sup_{b\in K_B}\ \inf_{a\in A}\{-g(x,a,b)\cdot p-f(x,a,b)\}\quad((x,p)\in K)$$

が成立する．

を満足する．このとき，$U \in UC(\mathbb{R}^N)$ となりしかも

(2.2) $$U(x) + H(x, DU) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N \quad v.s.$$

が満たされる．

関連した結果が Lions [16], Souganidis [18], Barron-Evans-Jensen [2], Evans-Souganidis [9], Evans-Ishii [7], Ishii [13] に得られている．最適制御問題の value が対応した Bellman 方程式の viscosity solution になることは Lions [16] によって最初に示された．これらの結果では，定理 1.1, 1.2 における Hamiltonian H に対する仮定と比較したとき，f, g に対する仮定が少し強くなっている．定理 2.1 はこの点に関して改良になっている．

<u>命題 2.1.</u> 任意の $H \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ は適当な可分距離空間 A, B と (H5), (H6) が成立するような $f \in C(\mathbb{R}^N \times A \times B, \mathbb{R})$ と $g \in C(\mathbb{R}^N \times A \times B, \mathbb{R}^N)$ に対して

$$H(x, p) = \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \{ -g(x, a, b) \cdot p - f(x, a, b) \}$$

と表わされる．

証明は Ishii [15] を参照されたい．命題 2.1 と定理 2.1 を組み合せれば，次の定理を得る．

<u>定理 2.2.</u> $\Omega = \mathbb{R}^N$ とする．$H(x, u, p) = H(x, p)$ が (H0)-(H4) を満たすとき，A, B, f, g を命題 2.1 のように選べば，

(SP) の viscosity solution $u \in UC(\mathbb{R}^N)$ は

$$u(x) = \sup_{\xi \in \mathcal{S}_I(x)} \inf_{\beta \in \mathcal{C}_{II}(x,\xi)} P(x, \xi(\beta), \beta)$$

と表現される.

(CP) に対しても同様な結果が得られる.

<u>定理 2.1 の証明の概略</u>　まず各 $x \in \mathbb{R}^N$ に対して, $U(x) \in \mathbb{R}$ であることを見る. $\phi \in C^1(\mathbb{R}^N)$ を $\phi(x) + H(x, D\phi(x)) \geq 0$ in $\mathbb{R}^N$ と $\lim_{|x| \to \infty} \phi(x) = \infty$ を満たす関数とする (ϕ の存在については定理 1.2, (ii) の証明を参照). $x \in \mathbb{R}^N$, $\xi \in \mathcal{S}_I(x)$, $\varepsilon > 0$ を固定するとき, 次の selection lemma が成立する (Ishii [15] を参照).

<u>補題 2.1.</u>　ある $\beta \in \mathcal{C}_{II}(x, \xi)$ に対して

$$H(x(t), D\phi(x(t))) + \frac{d}{dt}\phi(x(t)) + f(x(t), \xi(\beta)(t), \beta(t)) < \varepsilon \qquad \text{a.e. } t \geq 0$$

が成立する. ここで $x(t) = X_t(x, \xi(\beta), \beta)$.

この補題と ϕ が supersolution であることを使えば,

$$-\phi(x(t)) + \frac{d}{dt}\phi(x(t)) + f(x(t), \xi(\beta)(t), \beta(t)) < \varepsilon \qquad \text{a.e. } t \geq 0.$$

ただし, $x(t) = X_t(x, \xi(\beta), \beta)$ とし β は補題 2.1 で与えられたものとする. この式を e^{-t} 倍し, $[0, t]$ 上で積分すると

$$e^{-t}\phi(x(t)) - \phi(x) + \int_0^t e^{-s} f(x(s), \xi(\beta)(s), \beta(s))\,ds < \varepsilon \qquad (t > 0)$$

が得られる. これより $U(x) \leq \phi(x)$ が結論できる. ただし $\phi \geq 0$ と仮定しておく. 同様に適当な C^1 subsolution と比較して, $U(x)$ の下からの評価を得る. こうして $U(x) \in \mathbb{R}$ が

示される．次に同様な比較を $U(x)-U(y)$ と $\phi(x,y)+H(x,D_x\phi)-H(y,-D_y\phi)\geqq 0$ を満たす $\phi\in C^1(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)\cap UC(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$ の間で行う（そのような ϕ の存在については定理 1.2, (ii) の証明を参照）．そして $\sup\{|U(x)-U(y)|\ |x-y|=1\}<\infty$ を得る．更に，任意の $\varepsilon>0$ に対して $\phi_\varepsilon\in C^1(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)\cap UC(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$ を $\phi_\varepsilon(x,y)+H(x,D_x\phi_\varepsilon)-H(y,-D_y\phi_\varepsilon)\geqq 0$ $(|x-y|<1)$ と $\phi_\varepsilon(x,x)\leqq\varepsilon$ と $\inf\{\phi_\varepsilon(x,y)\mid |x-y|=1\}\geqq\sup\{|U(x)-U(y)|\ \big|\ |x-y|=1\}$ を満たすように選び（定理 1.2, (ii) の証明を参照），$U(x)-U(y)$ と比較する．こうして $U\in UC(\mathbb{R}^N)$ が示される．U が (2.2) の *viscosity solution* であることは *dynamic programming principle* を用いて示されるが，詳細は Ishii [15] に譲る． Q.E.D.

§3 確率微分方程式の解の漸近評価への応用

確率微分方程式

$$(\mathrm{SDE})\qquad \begin{cases} dX_t^\varepsilon = b(X_t^\varepsilon)\,dt + \varepsilon\, c(X_t^\varepsilon)\,dW_t & (t>0) \\ X_0^\varepsilon = x & \text{a.s.} \end{cases}$$

を考える．ここで $b\in C^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$，$c\in C^1(\mathbb{R}^N, M^{N\times N})$ とし，W_t $(t\geqq 0)$ は N 次元 *Wiener process* を表わす．Ω を $\mathbb{R}^N$ の有界領域とし $\partial\Omega$ は滑らかであると仮定する．$\partial\Omega$ の空でない開部分集合 Γ を考える．対応する確率測度を P で表わし，$u^\varepsilon(x)=P(X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_x}\in\Gamma)$ とおく．ただし $\tau^\varepsilon_x=\inf\{t\geqq 0\mid X_t^\varepsilon\in\partial\Omega\}$．

$u^\varepsilon(x)$ は (SDE) の解 X_t^ε が Γ を通過して Ω を出る確率を与える. $a = C^T C$ とおき, 以下ではある $\theta > 0$ に対して

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \qquad (x \in \overline{\Omega},\ \xi \in \mathbb{R}^N)$$

を仮定する. このとき $u^\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}\setminus\partial\Gamma)$ となり

$$(3.1)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\varepsilon^2}{2}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\,u^\varepsilon_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{N} b_i\, u^\varepsilon_{x_i} = 0 & \text{in } \Omega \\ u^\varepsilon = 1 & \text{on } \Gamma \\ u^\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega\setminus\overline{\Gamma} \end{cases}$$

が満たされる.

Fleming [10] は $u^\varepsilon(x) = \exp\{-\frac{I(x)+o(1)}{\varepsilon^2}\}$ $(\varepsilon \searrow 0)$ となるような $I(x)$ を決定するという問題を考え, 次のような結果を得た.

<u>定理 3.1.</u> $a, b \in C^2(\mathbb{R}^N)$ とし,

(H7) $x(\cdot) \in H^1_{loc}([0,\infty), \mathbb{R}^N)$, $x(s) \in \overline{\Omega}$ $(s \geq 0)$ ならば

$$\int_0^\infty |\dot{x}(s) - b(x(s))|^2 ds = \infty.$$

を仮定する.

$$I(x) = \inf\{\frac{1}{2}\int_0^{\tau_x} \|\dot{x}(s) - b(x(s))\|^2 ds \mid x(0) = x,\ x(\tau_x) \in \Gamma \text{ if } \tau_x < \infty\}$$

$(\|x\|^2 = \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij} x_i x_j$, ただし $(a^{ij}) = a^{-1}$) とおくとき

$$(3.2)\qquad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\left(-\varepsilon^2 \log u^\varepsilon(x)\right) = I(x) \qquad (x \in \Omega)$$

が成立する.

以下ではこの定理の viscosity solution の考えを利用した別証明を与える.

<u>補題 3.1.</u> (H7) の仮定の下に，任意の $A>0$ に対して次の条件を満たす $T_0>0$，$\lambda_0>0$ が存在する：$T \geqq T_0$，$0 \leqq \lambda \leqq \lambda_0$，$x(\cdot) \in H^1([0,T]:\overline{\Omega})$ ならば

(3.3) $$\frac{1}{2}\int_0^T e^{-\lambda s}\|\dot{x}(s)-b(x(s))\|^2 ds \geqq A.$$

証明は Evans-Ishii [8] を参照されたい．

<u>補題 3.2.</u> (H7) を仮定する．$w \in C(\overline{\Omega})$ が

(3.4) $$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} w_{x_i} w_{x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i w_{x_i} = 0 \quad \text{in } \Omega \text{ v.s.}$$

を満たすならば

$$w(x) = \inf\Big\{\frac{1}{2}\int_0^{\tau_x}\|\dot{x}(s)-b(x(s))\|^2 ds + w(x(\tau_x)) \;\Big|\; x(0)=x,$$
$$x(\tau_x) \in \partial\Omega,\quad x(\cdot) \in H^1([0,\tau_x),\Omega)\Big\}$$

が成立する．

<u>証明</u> $\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} p_i p_j - \sum_{i=1}^{N} b_i p_i = \max_{\alpha \in \mathbb{R}^N}\{-\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\alpha_i p_j - \sum_{i=1}^{N} b_i p_i - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\alpha_i\alpha_j\}$ ($p \in \mathbb{R}^N$) に注意すれば，任意の $\lambda>0$ に対して，(3.4) は

$$\lambda w + \max_{\alpha \in \mathbb{R}^N}\{-\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\alpha_i w_{x_j} - \sum_{i=1}^{N} b_i w_{x_i} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\alpha_i\alpha_j\} = \lambda w \quad \text{in } \Omega \text{ v.s.}$$

と同値である．viscosity solution の表現定理（Evans-Ishii [7]）により

$$w(x) = \inf_{\alpha(\cdot)}\Big\{\int_0^{\tau_x}\Big[\frac{1}{2\lambda}\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x(t))\alpha_i(t)\alpha_j(t) + w(x(t))\Big]dt + e^{-\tau_x} w(x(\tau_x))\Big\},$$

（ただし

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{1}{\lambda}a(x(t))\alpha(t) + \frac{1}{\lambda}b(x(t)) & (t>0) \\ x(0) = x \end{cases}$$

$\alpha : [0,\infty) \to \mathbb{R}^N$ は可測，$\tau_x = \inf\{t \geqq 0 \mid x(t) \in \partial\Omega\}$.）

と書くことができる．$\alpha(t)=a(x(t))^{-1}(\lambda\dot{x}(t)-b(x(t)))$ を w の表現式に代入し，変数変換をすれば

$$w(x)=\inf\left\{\int_0^{\tau_x}e^{-\lambda s}\left(\frac{1}{2}\|\dot{x}(s)-b(x(s))\|^2+\lambda w(x(s))\right)ds+e^{-\tau_x}w(x(\tau_x))\,\middle|\right.$$
$$\left. x(0)=x,\ x(\cdot)\in H^1([0,\tau_x),\Omega),\ x(\tau_x)\in\partial\Omega\right\}.$$

補題 3.1 に注意して，$\lambda\searrow 0$ とすれば求める式が得られる．

Q.E.D.

<u>定理 3.1 の証明</u>　$v^\varepsilon(x)=-\varepsilon^2\log u^\varepsilon(x)$ とおけば，v^ε は

$$(3.5)\quad -\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{i,j=1}^N a_{ij}v^\varepsilon_{x_ix_j}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N a_{ij}v^\varepsilon_{x_i}v^\varepsilon_{x_j}-\sum_{i=1}^N b_iv^\varepsilon_{x_i}=0\quad in\ \Omega,$$
$$v^\varepsilon=0\quad on\ \Gamma,\qquad v^\varepsilon(x)\to\infty\quad as\ x\to\partial\Omega\backslash\overline{\Gamma}$$

を満たす．Bernstein 評価を行えば，各 $\Omega'\subset\subset\Omega\cup\Gamma$ に対して，ε に依存しない定数 $C(\Omega')>0$ が存在し

$$|v^\varepsilon(x)|\leqq C(\Omega'),\qquad |Dv^\varepsilon(x)|\leqq C(\Omega')\qquad (x\in\Omega')$$

を満たすことが示される（[8]参照）．これより，$\varepsilon=\varepsilon_k\searrow 0$ とした時の v^ε の極限として，$v\in C(\Omega\cup\Gamma)$ を得る．v は (3.4) の解であり，さらに $v(x)=0$ on Γ を満たす．v は (3.4) の解だから，(3.4) 式の形により Ω 上で Lipschitz 連続である．したがって $v\in C(\overline{\Omega})$ となるように一意的に拡張される．ここで補題 3.2 を使い，$v(x)\leqq I(x)$ $(x\in\Omega)$ が示される．逆向きの不等式 $I(x)\geqq v(x)$ $(x\in\Omega)$ は (3.4) 式における Hamiltonian $H(x,p)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)p_ip_j+\sum_{i=1}^N b_i(x)p_i$ が p に関して convex であることを利用して示される．実際，$\overline{\Omega}$ のある近傍で (3.4)

の近似方程式をみたすような関数で $I(x)$ を近似し，その関数を molifier で滑らかにしたものを考えれば，(3.5)の近似方程式の subsolution が作れる．楕円型方程式に対する比較定理を使い，近似度を高めて行けば $I(x) \geq v(x)$ $(x \in \Omega)$ が得られる（詳しくは[8]を参照されたい）．こうして定理3.1が示された． Q.E.D.

References

1. G. Barles, Thése de 3^e cycle, Univ. Paris IX - Dauphine, Paris, 1982 - 1983.

2. N. E. Barron, L. C. Evans and R. Jensen, Viscosity solutions of Isaacs' equations and differential games with Lipschitz controls, J. Diff. Eq. 53 (1984), 213 -233.

3. M. G. Crandall, L. C. Evans and P. L. Lions, Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, Trans. AMS. 282 (1984), 487 - 502.

4. M. G. Crandall and P. L. Lions, Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, Trans. AMS. 277 (1983), 1 - 42.

5. M. G. Crandall and P. L. Lions, On existence and uniqueness of solutions of Hamilton-Jacobi equations, to appear in Nonlinear Anal.

6. R. J. Elliott and N. J. Kalton, The existence of value in differetial games, AMS. Memoirs 126, 1972.

7. L. C. Evans and H. Ishii, Differential games and nonlinear first-order PDE on bounded domains, to appear in Manuscripta Math.

8. L. C. Evans and H. Ishii, A PDE approach to some asymptotic problems concerning random differential equations with small noise intensities, to appear in Ann. Inst. H. Poincaré.

9. L. C. Evans and P. E. Souganidis, Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs equations, Indiana Univ. Math. J. 33 (1984), 773 - 797.

10. W. H. Fleming, Exit probabilities and optimal stochastic control, Appl. Math. Op. 4 (1978), 329 - 346.

11. H. Ishii, Uniqueness of unbounded viscosity solution of Hamilton-Jacobi equations, Indiana Univ. Math. J. 33 (1984), 722 - 748.

12. H. Ishii, Remarks on existence of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, Bull. Facul. Sci. & Eng. Chuo Univ. 26 (1983), 5 - 24.

13. H. Ishii, On representation of solutions of Hamilton-Jacobi equations with convex Hamiltonians, preprint.

14. H. Ishii, Existence and uniqueness of solutions of Hamilton-Jacobi equations, preprint.

15. H. Ishii, On representation of solutions of Hamilton-Jacobi equations, in preparation.

16. P. L. Lions, Generalized Solutions of Hamilton-Jacobi Equations, Pitman, Boston, 1982.

17. P. L. Lions, Existence results for first-order Hamilton-Jacobi equations, Ric. Mat. Napoli, 32 (1983), 3 - 23.

18. P. E. Souganidis, Thesis, Univ. of Wisconsin, 1983.

19. P. E. Souganidis, Existence of viscosity solutions of Hamilton- Jacobi equations, to appear in J. Diff. Eq.